





26-11-44

4278

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XVIII

Palchetto 6

Num.° d'ordine 17

10236

17. 2

NAZIONALE

B. Prov.

12

1945

NAPOL.

R. BIBLIOTECA

VITT. EM. III

11

June 1915

ÉLÉMENS
D'ALGÈBRE.

*On trouve chez le même Libraire les Ouvrages
suivans du même Auteur.*

Éléments d'Arithmétique, 5^e édition, 1827, 5 francs.

Application de l'Algèbre à la Géométrie, in-8°, 1825, 7 fr. 50 c.

Se trouvent aussi,

A BORDEAUX,

Chez GASSIOT FILS AÎNÉ, Libraire, fossés de l'Intendance, n° 61.

611210

ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE;

PAR M. BOURDON,

CHEVALIER DE L'ORDRE ROYAL DE LA LÉGION D'HONNEUR, INSPECTEUR DE
L'ACADÉMIE DE PARIS, EXAMINATEUR POUR L'ADMISSION AUX ÉCOLES
ROYALES POLYTECHNIQUE, MILITAIRE, DE LA MARINE, FORESTIÈRE, etc.;
MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATIQUE DE PARIS, ETC.

OUVRAGE ADOPTÉ PAR L'UNIVERSITÉ.

CINQUIÈME ÉDITION.



PARIS,

BACHELIER (SUCCESSEUR DE M^{re} V^e COURCIER),
LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES, QUAI DES AUGUSTINS, N^o 55.

ET A BRUXELLES,
A LA LIBRAIRIE PARISIENNE.

~~~~~  
1828

*Tout Exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Auteur et du Libraire, sera contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricans et les débitans de ces Exemplaires.*

*Bachelier*



---

## AVERTISSEMENT.

---

Le succès qu'obtient dans l'enseignement un ouvrage élémentaire, impose à son auteur l'obligation de chercher à le perfectionner, en profitant des conseils que veulent bien lui donner des professeurs éclairés.

Plusieurs observations m'ont été faites sur la théorie du plus grand commun diviseur; et en effet, quelque soin que j'eusse apporté au développement de cette théorie, je ne me dissimulais pas que certains passages offraient des difficultés que je n'avais pu lever entièrement; aussi ai-je présenté, dans cette édition, une nouvelle théorie que je crois exempte de tout reproche, sous le rapport de l'exactitude et de la rigueur. Toutefois, comme elle se fonde sur un principe dont la démonstration (\*) ne laisse pas d'être fort étendue, j'ai pensé qu'il convenait de renvoyer celle-ci à la fin de l'ouvrage, dans une note où j'expose en même temps une méthode générale pour *décomposer un polynome rationnel et entier quelconque en facteurs premiers*.

Dans l'exposition des principes sur la divisibilité des *fonctions entières*, tout en substituant cette dernière dénomination à celle de *polynomes relatifs*, qui était un peu vague, j'ai rétabli, d'après l'avis de plusieurs personnes, la dénomination de *diviseur relatif*, comme expri-

---

(\*) Suivant les renseignemens que j'ai pu recueillir, cette démonstration serait due à un de mes confrères, M. Lefebvre de Foncy.

mant très exactement l'idée qu'on doit y attacher. J'ai même fait précéder la théorie du plus grand commun diviseur ordinaire de celle du plus grand commun diviseur relatif, comme étant plus simple et pouvant ainsi servir d'introduction à l'autre. Je compare ensuite les deux théories, pour faire ressortir leur différence.

A l'occasion des principes dont je viens de parler, je crois devoir entrer dans quelques explications. Il paraîtrait que cette espèce d'introduction à la théorie générale des équations, serait peu goûtée des élèves et des professeurs eux-mêmes, non à raison de la difficulté qu'on éprouve à les entendre, puisqu'ils sont tout-à-fait analogues à ceux qui ont été établis, en Arithmétique, sur la divisibilité des nombres, mais parce qu'on ne saisit pas bien la liaison qui existe entre eux et les propriétés des équations. Or, voici les motifs sur lesquels je me suis fondé en suivant cette marche :

1°. Pour démontrer que *si une expression quelconque a est racine d'une équation, le premier membre est divisible par  $x - a$* , on suppose ordinairement qu'un produit de la forme  $(x - a) \cdot Q$ , ( $Q$  étant une fonction entière de  $x$ ) devient nul, lorsqu'on fait  $x = a$ , parce que, dit-on,  $Q$  ne saurait devenir infini, puisque, par hypothèse,  $x$  n'entre pas en dénominateur. Mais ne pourrait-on pas considérer à priori une équation dont quelques-uns des coefficients fussent infinis? Dans ce cas, le polynome  $Q$  aurait aussi des coefficients infinis, et dès lors le principe ci-dessus serait en défaut. Le mode de démonstration que j'ai adopté me paraît exempt de cette objection.

2°. Pour démontrer que *toute équation a autant de racines qu'il y a d'unités dans l'exposant de son degré, et ne peut en avoir davantage*, on admet également ce

principe, qu'un produit de la forme  $(x-a)(x-b)\dots(x-l)$  est nul, et ne peut être nul qu'autant que l'un des facteurs  $x-a$ ,  $x-b$ ,... est lui-même égal à 0. Or, ce principe, qui peut être assez facilement admis lorsqu'on raisonne sur des quantités réelles, ne saurait l'être aussi légèrement, lorsqu'il s'agit d'expressions générales, telles que  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,.... dont la forme et la nature nous sont inconnues, et qui même peuvent être toutes ou en partie imaginaires. Le mode de démonstration que j'emploie ne suppose ce principe en aucune façon.

Au contraire, lorsqu'une fois la proposition générale est établie, on peut, en se fondant sur la composition des équations (n° 257), démontrer de la manière la plus générale, 1°. qu'un produit est nul, toutes les fois que l'un de ses facteurs est nul; 2°. qu'un produit ne saurait être nul qu'autant que l'un de ses facteurs est nul aussi. Car soit un produit  $a \cdot b \cdot c \cdot d \dots l$  d'expressions algébriques de nature quelconque. Regardons ce produit comme le dernier terme d'une équation dont les racines seraient  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,....

Cela posé, 1°. si l'on admet que l'un de ces facteurs soit nul, l'équation a alors une racine égale à 0, ce qui exige que le dernier terme manque dans l'équation; donc le produit  $a \cdot b \cdot c \cdot d \dots l$  est égal à 0; 2°. réciproquement, si l'on suppose ce produit égal à 0, l'équation renferme  $x$  comme diviseur, et est satisfaite par  $x=0$ ; donc l'un des facteurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,.... est égal à 0.

Cette explication suffira, je le pense, pour justifier ma persévérance à conserver dans le septième chapitre les principes sur la divisibilité des fonctions entières.

On trouvera également dans ce chapitre, qui est le seul où j'aie fait des changemens importans, une application de la théorie du commun diviseur à l'abaissement

d'une équation, dans le cas où l'on sait d'avance que deux des racines ont entre elles une relation déterminée et exprimée par une équation du premier degré. Le principe fondamental de la théorie des racines égales n'est, comme je le fais voir, qu'un cas particulier de cette question.

Parmi les personnes qui m'ont honoré de leurs observations et de leurs conseils, je citerai particulièrement M. Vincent, l'un des professeurs les plus distingués des collèges de Paris, auteur d'une nouvelle *Géométrie*, et M. Miet, mon ancien élève, professeur au collège de Henri IV, qui a bien voulu me seconder dans la réimpression de mon ouvrage.

---



# TABLE DES MATIÈRES.

(Les articles que l'on a marqués d'une \* ne font pas partie du Programme d'admission à l'École Polytechnique.)

## INTRODUCTION.

|                                                                         |        |
|-------------------------------------------------------------------------|--------|
| N <sup>os</sup> . But de l'Algèbre. Explication des signes algébriques. | Pages. |
| 1... 7. Résolution de plusieurs questions à l'aide de ces signes.       | 1... 9 |

## CHAP. I<sup>er</sup>. Des Opérations algébriques.

|                                                                                                                                 |          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 8... 12. Définitions préliminaires. Réduction des termes semblables.                                                            | 10... 13 |
| 13... 15. ADDITION ET SOUSTRACTION. Règle des signes de la soustraction.                                                        | 14... 17 |
| 16... 17. Règles de la MULTIPLICATION.                                                                                          | 17... 21 |
| 18... 21. Remarques sur la multiplication.                                                                                      | 21... 24 |
| 22... 24. DIVISION des monomes. Signification du symbole $a^m$ .                                                                | 24... 28 |
| 25... 32. DIVISION des polynomes. Prouver que, $m$ étant un nombre entier, l'expression $x^m - a^m$ est divisible par $x - a$ . | 28... 43 |
| 33. Des fractions algébriques. Simplification des fractions.                                                                    | 43... 44 |
| 34... 41. Théorie élémentaire du PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.                                                                    | 45... 54 |

## CHAP. II. Des Problèmes et des Équations du premier degré.

|                                                                                                     |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 42. Notions préliminaires sur les équations.                                                        | 55... 57   |
| 43... 45. Équations du premier degré à une seule inconnue.                                          | 57... 62   |
| 46... 49. Problèmes du premier degré à une seule inconnue.                                          | 62... 74   |
| 50... 55. Équations du premier degré à plusieurs inconnues. Des différentes méthodes d'élimination. | 74... 82   |
| 56... 57. Résolution de divers problèmes du premier degré à plusieurs inconnues.                    | 82... 86   |
| 58... 63. Théorie des quantités négatives.                                                          | 86... 96   |
| 64... 65. Discussion des problèmes du premier degré.                                                | 96... 104  |
| 66... 80. Discussion générale des équations du premier degré.                                       | 104... 126 |
| 81. Énoncés de nouveaux problèmes.                                                                  | 126... 127 |

### CHAP. III. *Résolution des Problèmes et Équations du second degré.*

| Num.                                                                                 | Pages.    |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 82. Introduction,                                                                    | 127...128 |
| 83... 89. Extraction de la racine carrée des quantités algébriques,                  | 128...136 |
| 90... 91. Calcul des radicaux du second degré,                                       | 136...140 |
| 92... 95. Résolution des équations du second degré à une seule inconnue,             | 140...147 |
| 96. Résolution de quelques problèmes du second degré,                                | 147...152 |
| 97... 102. Discussion générale de l'équation du second degré,                        | 152...162 |
| 103... 104. Discussion de quelques problèmes du second degré,                        | 162...173 |
| 105. Transformations des inégalités,                                                 | 173...176 |
| 106. Énoncés de nouveaux problèmes du second degré,                                  | 176...178 |
| 107... 110. Questions sur les MAXIMA et MINIMA,                                      | 178...182 |
| 111... 112. Propriétés des trinômes du second degré,                                 | 182...185 |
| 113. Applications des propriétés précédentes aux questions sur les maxima et minima, | 185...187 |
| 114... 116. Équations et problèmes du second degré à plusieurs inconnues,            | 187...191 |
| 117... 121. Équations trinômes du quatrième degré,                                   | 191...197 |

### CHAP. IV. *Analyse indéterminée.*

|                                                                      |           |
|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| 122... 128. Analyse indéterminée du premier degré. Première méthode, | 197...212 |
| 129... 135. Seconde méthode,                                         | 212...220 |
| 136... 141. Équations indéterminées à plus de deux inconnues,        | 220...230 |
| 142... 145. Analyse indéterminée du second degré,                    | 230...237 |

### CHAP. V. *Formation des Puissances et extraction des Racines d'un degré quelconque.*

|                                                                                                 |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 146... 150. Théorie des combinaisons,                                                           | 237...245 |
| 151... 155. BINÔME DE NEWTON. Conséquences qui en résultent,                                    | 245...251 |
| 156... 159. Extraction des racines de degré quelconque, et de la racine cubique en particulier, | 251...258 |
| 160... 166. Extraction des racines en général,                                                  | 258...265 |
| 167... 170. Extraction des racines des quantités algébriques,                                   | 265...269 |
| 171... 175. Calcul des radicaux,                                                                | 270...275 |
| 176... 177. De la multiplicité des valeurs d'un radical,                                        | 276...278 |
| 178. Cas singuliers du calcul des radicaux,                                                     | 278...280 |
| 179... 181. Théorie des exposants de nature quelconque,                                         | 280...286 |
| 182. * Généralisation de la formule du binôme,                                                  | 286...290 |

| Nos.                                                                               | Pages.    |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 183...186. * Applications de la formule du binôme,                                 | 290...296 |
| 187...188. * Méthode des coefficients indéterminés pour le développement en série, | 296...300 |
| 189...190. * Autre démonstration de la formule du binôme,                          | 300...304 |
| 191...192. * Notions sur les séries récurrentes,                                   | 304...308 |

### CHAP. VI. *Théories des Progressions et des Logarithmes.*

|                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| 193...198. Des progressions par différence,                         | 309...315 |
| 199...200. Des progressions par quotient,                           | 315...318 |
| 203...205. Des progressions infinies par quotient,                  | 318...323 |
| 206...208. Problèmes sur les progressions par quotient,             | 323...326 |
| 209...212. Résolution de l'équation exponentielle,                  | 326...333 |
| 213...218. Théorie des logarithmes,                                 | 333...339 |
| 219...220. Construction et disposition des tables de logarithmes,   | 339...341 |
| 221...224. Usage des tables,                                        | 341...351 |
| 225. Applications des tables de logarithmes,                        | 351...354 |
| 226...228. Calcul des expressions algébriques par logarithmes,      | 354...360 |
| 229. Applications aux proportions et aux progressions par quotient, | 360...362 |
| 230. Questions relatives à l'intérêt composé,                       | 362...366 |
| 231...233. * Séries logarithmiques,                                 | 367...373 |
| 234...235. * Développement des exponentielles en séries,            | 375...376 |
| 236. * Nous sur les différences tabulaires,                         | 377...380 |
| 237...238. * Proportion de l'usage des tables. Calcul de l'erreur,  | 380...384 |

### CHAP. VII. *Théorie générale des Equations.*

|                                                                                                                   |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 239...248. Divisibilité des FONCTIONS ENTIÈRES;                                                                   | 385...392 |
| 249...257. Propriétés générales des équations,                                                                    | 392...399 |
| 258...263. Théorie du plus grand commun diviseur relatif,                                                         | 399...403 |
| 264...274. Théorie complète du PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR,                                                        | 403...412 |
| 275. Du plus grand commun diviseur relatif entre deux polynômes rationnels et entiers,                            | 417...419 |
| 276. Transformations des équations. Évanouissement du second terme,                                               | 419...422 |
| 277. Évanouissement d'autres termes,                                                                              | 422...423 |
| 278...280. Des transformations précédentes, 2 <sup>ème</sup> partie                                               |           |
| tion et propriété des POLYNÔMES DÉRIVÉS,                                                                          | 423...428 |
| 280. Disparition des dénominateurs,                                                                               | 428...431 |
| 281. Méthode générale des transformations,                                                                        | 431       |
| 282...286. DE L'ÉLIMINATION,                                                                                      | 432...435 |
| 287...290. Usages de l'élimination. Formation de l'équation aux différences. Équation aux carrés des différences, | 435...440 |

| N <sup>os</sup> .                                                                                             | Pages.    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 291...296. DE L'ABAISSEMENT DES ÉQUATIONS. Théorie des racines égales,                                        | 440...447 |
| 297...299. Applications de la théorie des racines égales,                                                     | 447...451 |
| 300...302. Des équations réciproques,                                                                         | 451...456 |
| 303...304. THÉORIE DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES. Sommation des puissances semblables des racines d'une équation, | 456...461 |
| 305...310. Évaluation de toute fonction symétrique rationnelle,                                               | 461...465 |
| 311...314. Applications de la théorie des fonctions symétriques,                                              | 465...472 |
| 315...317. Application à l'élimination. DU DEGRÉ DE L'ÉQUATION FINALE,                                        | 472...476 |

### CHAP. VIII. *Résolution des Équations numériques à une ou plusieurs inconnues.*

|                                                                                         |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 318...319. Principes fondamentaux,                                                      | 477...482 |
| 320...324. Limites des racines. LIMITE SUPÉRIEURE des racines positives,                | 482...489 |
| 325...326. Détermination des autres limites,                                            | 489...490 |
| 327...329. Conséquences des principes précédens,                                        | 491...493 |
| 330...332. RÈGLE DES SIGNES de Descartes,                                               | 494...497 |
| 333...337. Méthode des racines commensurables,                                          | 497...510 |
| 338...339. Recherche des diviseurs du second degré,                                     | 510...511 |
| 340...344. Recherche des racines incommensurables. MÉTHODE D'APPROXIMATION de Lagrange, | 511...522 |
| 345...348. MÉTHODE de Newton,                                                           | 522...529 |
| 349. Rapprochement des deux méthodes,                                                   | 529...530 |
| 350...356. COMPLÉMENT de la théorie des racines incommensurables,                       | 530...540 |
| 357...360. Conversion en fraction continue des racines d'un degré quelconque,           | 540...545 |
| 361...377. COMPLÉMENT DE L'ÉLIMINATION entre deux équations d'un degré quelconque,      | 545...565 |
| 378...384. Élimination avec simplification,                                             | 565...573 |

### (\*) CHAP. IX. *Complément de la théorie des Équations.*

|                                                                                                    |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 385...390. Forme générale des racines imaginaires d'une équation dont les coefficients sont réels, | 574...583 |
| 391...392. Détermination des racines imaginaires,                                                  | 584...587 |
| 393...395. DES ÉQUATIONS À DEUX TERMES. Notions préliminaires,                                     | 587...589 |

(\*) Ce chapitre et le suivant ne font pas partie du programme d'admission à l'École Polytechnique.

## TABLE DES MATIÈRES.

xiii

| Not.                                                                       | Pages.    |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 396...397. Résolution de l'équation $y^m - 1 = 0$ ,                        | 589...594 |
| 398...399. Relations entre les racines de cette équation,                  | 594...597 |
| 400. Résolution de l'équation $y^m + 1 = 0$ . Relations entre les racines, | 597...599 |
| 401. SCHOLIE GÉNÉRAL sur la multiplicité des valeurs d'un radical,         | 599...600 |
| 402. DES ÉQUATIONS TRINOMES. Leur résolution,                              | 600...601 |
| 403...404. Effectuer l'opération marquée par $\sqrt[n]{A \pm \sqrt{B}}$ ,  | 602...605 |
| 405. Effectuer l'opération marquée par $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ ,           | 605...607 |
| 406. Résolution de l'équation du 3 <sup>e</sup> degré,                     | 607...611 |
| 407...411. Discussion des racines. CAS IRREDUCTIBLE,                       | 611...616 |
| 412. Résolution de l'équation du 4 <sup>e</sup> degré,                     | 616...619 |
| 413. Discussion des racines,                                               | 619...620 |
| 414...417. Méthode de résolution par les fonctions symétriques,            | 620...633 |

## CHAP. X. Complément de la théorie des Suites.

|                                                                                                                 |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 418...421. Des séries récurrentes. Détermination du TERME GÉNÉRAL,                                              | 633...639 |
| 422...424. Décomposition des fractions rationnelles,                                                            | 639...643 |
| 425...427. Sommation des séries récurrentes,                                                                    | 643...647 |
| 428...429. Caractères auxquels on reconnaît qu'une série est récurrente,                                        | 647...651 |
| 430...432. DES SÉRIES DE NOMBRES FIGURÉS. Sommation des puissances semblables d'une progression par différence, | 652...655 |
| 433...436. Applications des formules précédentes aux séries de nombres figurés,                                 | 655...659 |
| 437...438. Développement de la MÉTHODE INVERSE des séries,                                                      | 659...663 |
| 439...441. Séries trigonométriques,                                                                             | 663...666 |
| 442...443. Combinaison des séries trigonométriques et exponentielles,                                           | 666...667 |
| 444...446. Séries circulaires. RAPPORT APPROCHÉ de la circonférence au diamètre,                                | 668...671 |
| 447. CONCLUSION GÉNÉRALE,                                                                                       | 671...672 |

## NOTE sur les Polynômes rationnels et entiers.

|                                                                                                  |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1...7. Première partie. Démonstration du principe établi n <sup>o</sup> 265,                     | 673...679 |
| 8...20. Seconde partie. Décomposition d'un polynôme rationnel et entier en ses facteurs simples, | 679...692 |

## Errata.

- Page 15, ligne 5,  $+acd$ , lisez  $+acd^2$
- 17, 7, en remontant,  $96a^6b^6...$ , lisez  $96a^3b^6...$
- 27, 16,  $4a^2b^2c^2$ , lisez  $5a^2b^2c^2$
- 53, 3, — 2 l'un des termes du coefficient de  $n^2$ , lisez — 20
- 48, 8, en remontant,  $12b - 3a$ , lisez  $-12b - 3a$
- 88, 5,  $54 - 60$ , lisez  $45 - 60$
- 91, 16, quel tel, lisez quo tel
- 115, 3,  $\frac{ab'}{b}x + b' = c'$ , lisez  $\frac{ab'}{b}x + b'y = c'$
- 154, dernière ligne,  $x^2 + px + q$ , lisez  $x^2 + px - q$
- 189, 12, en remontant,  $z = s' - \sqrt{...}$ , lisez  $y = s' - \sqrt{...}$
- 245, 7,  $1.2.3...n - 1n$ , lisez  $1.2.3...(n-1)n$
- 277, 7, en remontant,  $(x^2 - p^2)(x^2 + p^2) = 0$ , supprimez =
- 286, avant-dernière ligne,  $n^{eme}$ , lisez  $m^{eme}$
- 305, 6, en remontant,  $+Ex^3$ , lisez  $+Dx^3$
- 332, 2, lisez  $b = a'\alpha'\gamma'\delta'$
- 352, 16, log. 3, lisez log. 2
- ibidem, 17, 19, 2649..., lisez 19, 2659...
- 460, 6, S., lisez S<sub>-</sub>
- 510, 11, en remontant, des indéterminées fonctions de  $p$  et de  $q$ , lisez des fonctions des indéterminées  $p$  et  $q$
- 554, 19,  $(y^2 - 1)x^2$ , lisez  $(y - 1)x^2$
- 604, 9, en remontant,  $\sqrt{....}$ , lisez  $\sqrt[3]{....}$
- 674, 3, et par conséquent P, lisez et par conséquent B
- 675, 8, par B, lisez par P
- 681, 1, 3, 5, N, lisez X

# ALGÈBRE.

## INTRODUCTION.



1. L'ALGÈBRE est la partie des Mathématiques où l'on emploie des signes propres à abrégé et à généraliser les raisonnemens que comporte la résolution des questions relatives aux nombres.

On distingue deux espèces principales de questions :

Le *théorème*, qui a pour but de démontrer l'existence de certaines propriétés par rapport à des nombres connus et donnés ; et le *problème*, dont l'objet est de déterminer certains nombres d'après la connaissance d'autres nombres qui ont avec les premiers des relations indiquées par l'énoncé.

2. Les élémens principaux dont on fait usage en Algèbre, pour parvenir à ce double but, sont :

1°. Les lettres de l'alphabet, qui servent à désigner les nombres sur lesquels on doit raisonner. Leur usage est nécessaire, soit pour abrégé les raisonnemens, soit pour les généraliser ; en ce que l'on sent mieux, par l'emploi de ces lettres, que telle ou telle propriété appartient à plusieurs nombres à la fois ; ou bien, s'il s'agit d'un problème, que la *manière* de satisfaire à son énoncé est indépendante de toute valeur particulière attribuée aux nombres compris dans cet énoncé.

2°. Le signe  $+$ , dont on se sert pour marquer l'addition de deux ou plusieurs nombres, et qui s'énonce *plus*.

Ainsi,  $25 + 36$  s'énonce 25 *plus* 36, ou 25 *augmenté de* 36. De même,  $a + b$  s'énonce *a plus b*, ou le nombre désigné par *a*, augmenté du nombre désigné par *b*.

3°. Le signe  $-$ , qui s'énonce *moins*, et dont on fait usage pour marquer la soustraction de deux nombres l'un de l'autre.

Ainsi  $45 - 24$  s'énonce *45 moins 24*, ou *45 diminué de 24*, ou bien encore, *la différence de 45 à 24*.

$a - b$  s'énonce *a moins b*, ou *a diminué de b*.

4°. Le signe de la multiplication, qui est  $\times$ , ou un point que l'on place entre les deux quantités.

Ainsi  $36 \times 25$ , ou  $36.25$ , s'énonce *36 multiplié par 25*, ou *le produit de 36 par 25*.

Lorsque les nombres dont on veut indiquer la multiplication sont désignés par des lettres, on convient encore de les écrire les uns à la suite des autres, sans interposition de signe.

Ainsi  $ab$  signifie la même chose que  $a \times b$  ou  $a.b$ ;  $abc$  signifie la même chose que  $a \times b \times c$  ou  $a.b.c$ .

Il est bien entendu que la notation  $ab$  ou  $abc$ , qui est plus simple que celle  $a \times b$  ou  $a \times b \times c$ , ne peut être employée que lorsque les nombres sont désignés par des lettres; car si l'on voulait, par exemple, représenter le produit de 5 par 6, et qu'on écrivit, pour abrégé, 56, on confondrait cette notation avec le nombre *cinquante-six* écrit dans le système décimal. Cette remarque est importante pour les commençans.

5°. Le signe de la division, qui se compose de deux points : que l'on place entre le dividende et le diviseur, ou bien encore d'une barre —, au-dessus et au-dessous de laquelle on place le dividende et le diviseur.

Ainsi  $24 : 6$ , ou  $\frac{24}{6}$ , s'énonce *24 divisé par 6*, ou *le quotient de 24 par 6*.

$\frac{a}{b}$  ou  $a : b$  s'énonce *a divisé par b*. On dit encore : *a sur b*.

La notation  $\frac{a}{b}$  est la plus usitée.

6°. Le *coefficient*, signe qu'on emploie lorsqu'un nombre, désigné par une lettre, doit être ajouté à lui-même plusieurs fois. Ainsi, au lieu d'écrire  $a + a + a + a + a$ , qui représente le nombre  $a$  ajouté à lui-même 4 fois, on écrit  $5a$ . De même,  $11a$  représente  $a$  ajouté à lui-même 10 fois;  $12ab$  représente le produit  $a$  par  $b$ , ajouté 11 fois à lui-même.



*Le coefficient est le nombre particulier écrit à la gauche d'un autre désigné par une ou plusieurs lettres, qui marque le nombre de fois, plus un, que ce second nombre est ajouté à lui-même.*

7°. L'exposant, signe dont on se sert lorsqu'un nombre, désigné par une lettre, est multiplié plusieurs fois par lui-même. Ainsi, au lieu d'écrire  $a \times a \times a \times a \times a$ , ou  $a.a.a.a.a$ , on écrit plus simplement  $a^5$ , qui signifie :  $a$  élevé à la 5<sup>e</sup> puissance, ou le produit de  $a$  multiplié 4 fois par lui-même.  $b^6$  est la même chose que  $b \times b \times b \times b \times b \times b$ , ou le produit de  $b$  multiplié 5 fois par lui-même.

*L'exposant est un nombre écrit à la droite et un peu au-dessus d'une lettre ; il marque combien de fois, plus une, le nombre désigné par la lettre doit être multiplié par lui-même, ou combien de fois cette lettre est facteur dans un produit.*

On appelle *puissance* le résultat de la multiplication d'un nombre plusieurs fois par lui-même, et *degré* de la puissance, l'exposant, c'est-à-dire le nombre de fois plus un que ce nombre doit être multiplié par lui-même.

Pour faire sentir toute l'importance de l'exposant en Algèbre, supposons qu'on veuille exprimer qu'un nombre  $a$  doit être multiplié 3 fois par lui-même, que le produit résultant doit être multiplié 3 fois de suite par  $b$ , et qu'enfin le nouveau produit doit être multiplié 2 fois de suite par  $c$  ; on écrira simplement  $a^3b^3c^2$ .

Veut-on ensuite exprimer que ce dernier résultat doit être ajouté 6 fois à lui-même, ou doit être multiplié par 7 ? on écrira  $7a^3b^3c^2$ . Ceci donne une idée du *laconisme* de la langue algébrique.

8°. Le signe  $\sqrt{\phantom{x}}$ , dont on fait précéder un nombre, lorsqu'on veut indiquer que l'on a à extraire de ce nombre une racine d'un certain degré. Ainsi,  $\sqrt[3]{a}$  s'énonce *racine troisième* ou *cubique* de  $a$ ,  $\sqrt[4]{b}$  s'énonce *racine quatrième* de  $b$ .

On appelle *racine* 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>... d'un nombre, un second

nombre qui, étant élevé à la 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>. . . puissance, reproduit le premier nombre.

Nous ne ferons usage du signe  $\sqrt{\phantom{x}}$  qu'à partir du troisième chapitre.

9°. Le signe au moyen duquel on exprime que deux quantités sont égales. Ce signe est  $=$ , et s'énonce *est égal à*.

Ainsi, pour exprimer brièvement que la différence de 36 à 25 est égale à 11, on écrit  $36 - 25 = 11$ .

C'est-à-dire, 36 moins 25 est égal à 11, ou *égal* 11.

10°. Le signe d'inégalité  $>$ , dont on se sert pour exprimer qu'une quantité est plus grande ou plus petite qu'une autre.

Ainsi,  $a > b$  signifie *a plus grand que b*,  $a < b$  signifie *a moindre que b*; c'est-à-dire que l'ouverture du signe doit être tournée du côté de la plus grande quantité.

D'après l'exposé précédent, on voit que l'on peut regarder l'Algèbre comme une espèce de langue qui se compose d'une suite de signes, à l'aide desquels on suit avec plus de facilité l'enchaînement des idées, dans les raisonnemens qu'on est obligé de faire, soit pour démontrer l'existence d'une propriété, soit pour trouver la solution d'un problème.

On concevra mieux encore l'utilité des signes algébriques, par les questions suivantes :

#### PREMIÈRE QUESTION.

3. La somme de deux nombres est 67, leur différence est 19; quels sont ces deux nombres?

#### Solution.

Tâchons d'abord d'établir, à l'aide des signes dont nous sommes convenus, une liaison entre les nombres donnés et les nombres inconnus de l'énoncé :

Si le plus petit des deux nombres cherchés était connu, on aurait le plus grand, en ajoutant 19 au plus petit. Cela posé, désignons le plus petit nombre par  $x$ ; le plus grand peut alors être désigné par  $x + 19$ ; leur somme est donc  $x + x + 19$ , ou

$2x + 19$ . Mais, d'après l'énoncé, cette somme doit être 67. On a donc l'égalité ou l'équation...  $2x + 19 = 67$ .

Or, si  $2x$  augmenté de 19 donne 67 pour résultat,  $2x$  seul est égal à 67 moins 19, ou  $2x = 67 - 19$ , ou effectuant la soustraction,  $2x = 48$ .

Donc enfin,  $x$  est égal à la moitié de 48, c'est-à-dire,

$$x = \frac{48}{2} = 24.$$

Le plus petit nombre étant 24, le plus grand  $x + 19$  est  $24 + 19$  ou 43.

En effet, on a  $43 + 24 = 67$ , et  $43 - 24 = 19$ .

\* Voici le tableau des calculs algébriques.

Soit  $x$ ... le plus petit nombre,

$x + 19$  est le plus grand.

Éq..  $2x + 19 = 67$ , d'où  $2x = 67 - 19 = 48$ ; donc  $x = \frac{48}{2} = 24$ ,

et par conséquent,  $x + 19 = 24 + 19 = 43$ .

En effet,  $43 + 24 = 67$ ,  $43 - 24 = 19$ .

\* Autre solution.

Soit  $x$  le plus grand nombre,

$x - 19$  est le plus petit.

Éq..  $2x - 19 = 67$ , d'où  $2x = 67 + 19 = 86$ ; donc  $x = \frac{86}{2} = 43$ ,

et par conséquent,  $x - 19 = 43 - 19 = 24$ .

On voit par là comment, à l'aide des signes algébriques, on parvient à comprendre, dans un cadre très resserré, les raisonnemens qu'on est obligé de faire pour résoudre un problème; raisonnemens qui, écrits en langage ordinaire, exigeraient souvent une ou plusieurs pages.

#### SOLUTION GÉNÉRALE DE CE PROBLÈME.

4. La somme de deux nombres est  $a$ , leur différence est  $b$ .  
On demande les deux nombres?

Soit  $x$ ... le plus petit nombre,

$x + b$  désigne alors le plus grand.

Eq.  $2x + b = a$ , d'où  $2x = a - b$ ; donc  $x = \frac{a-b}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ ,

et par conséquent,  $x + b = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ .

Comme la forme de ces deux résultats est indépendante de toute valeur particulière attribuée aux lettres  $a$  et  $b$ , il s'ensuit que, *connaissant la somme de deux nombres et leur différence, on obtiendra le plus grand nombre en ajoutant la demi-somme à la demi-différence, et le plus petit, en retranchant de la demi-somme la demi-différence.*

Ainsi, que la somme donnée soit 237, et la différence 99; le plus grand est  $\frac{237}{2} + \frac{99}{2}$ , ou  $\frac{237+99}{2} = \frac{336}{2} = 168$ ,

et le plus petit,  $\frac{237}{2} - \frac{99}{2}$ , ou  $\frac{138}{2} = 69$ .

En effet,  $168 + 69 = 237$ ,  $168 - 69 = 99$ .

On conçoit, d'après la question précédente, l'utilité des lettres pour représenter les données d'un problème. Comme on ne peut qu'indiquer sur ces lettres les opérations de l'Arithmétique, le résultat auquel on parvient conserve la trace des opérations qu'il faut effectuer sur les quantités connues, pour obtenir les valeurs des quantités que l'on cherche.

Les expressions  $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$  et  $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ , auxquelles on est parvenu dans le problème précédent, s'appellent, en Algèbre, des *formules*, parce qu'elles peuvent être regardées comme comprenant les solutions de toutes les questions de même nature que la précédente, dans l'énoncé desquelles on fait seulement varier les valeurs numériques des données.

#### DEUXIÈME QUESTION. — THÉORÈME.

5. *La somme de deux nombres, multipliée par leur différence, donne pour produit la différence des carrés ou des secondes puissances de ces deux nombres.*

Ainsi, soient 12 et 9 ces deux nombres; leur somme est 21, et leur différence 3. On reconnaît que le produit  $21 \times 3$  ou

63, est égal à 144 qui est le carré de 12, diminué de 81 qui est le carré de 9.

Mais, pour mettre en évidence cette propriété, quels que soient les deux nombres, représentons ces nombres par les lettres  $a$  et  $b$ . La somme sera exprimée par  $a + b$ , et la différence par  $a - b$ .

Pour former le produit de ces deux expressions, on supposera d'abord que l'on ait à multiplier la somme  $a + b$  par  $a$ , et le produit sera  $a \times a + b \times a$ , ou plus simplement,  $a^2 + ab$ ; car il faut prendre chacune des deux parties dont  $a + b$  est composé, autant de fois qu'il y a d'unités dans  $a$ , et ajouter les deux produits. Mais ce n'est point par  $a$  tout entier qu'il fallait multiplier, c'est par  $a$  diminué de  $b$ ; ainsi, le produit  $a^2 + ab$  est trop fort du produit de  $a + b$  par  $b$ , c'est-à-dire de  $ab + b^2$ . Il faut donc retrancher  $ab + b^2$  du produit précédent  $a^2 + ab$ ; ce qu'on indiquera algébriquement de cette manière :  $a^2 + ab - ab - b^2$ . Comme d'ailleurs les deux produits  $+ab$ ,  $-ab$  se détruisent réciproquement, il vient enfin  $a^2 - b^2$  pour le produit demandé.

Ce résultat  $a^2 - b^2$  ayant été obtenu indépendamment de toute valeur particulière attribuée à  $a$  et  $b$ , il s'ensuit que le théorème énoncé est vrai pour deux nombres quelconques.

### TROISIÈME QUESTION. — THÉORÈME.

6. Si, aux deux termes d'une fraction proprement dite, ou d'un nombre plus petit que l'unité, on ajoute un même nombre, la nouvelle fraction qui en résulte est plus grande que la première.

Soit  $\frac{5}{12}$  la fraction proposée; ajoutons 3 à ses deux termes, il vient  $\frac{8}{15}$ . Ces deux fractions, réduites au même dénominateur, deviennent  $\frac{75}{180}$ ,  $\frac{96}{180}$ ; or, la 2<sup>e</sup> fraction est évidemment plus grande que la première.

Pour reconnaître si ce théorème est vrai, quelle que soit

la fraction proposée, désignons cette fraction par  $\frac{a}{b}$ , en supposant  $a < b$ .

Soit  $m$  le nombre ajouté aux deux termes de cette fraction ; elle devient...  $\frac{a+m}{b+m}$ .

Afin de comparer ces deux fractions, il faut les réduire au même dénominateur ; il suffit pour cela de multiplier les deux termes  $a$  et  $b$  de la première fraction par  $b+m$ , et les deux termes de la seconde par  $b$ . Or, multiplier  $a$  par  $b+m$ , revient à prendre  $a$  autant de fois qu'il y a d'unités dans  $b$ , plus autant de fois qu'il y a d'unités dans  $m$  ; ce qui donne  $ab+am$ . On prouverait de même que le produit de  $b$  par  $b+m$  est  $b^2+bm$ , ce qui donne  $\frac{ab+am}{b^2+bm}$  pour la première fraction.

De même, si l'on multiplie les deux termes de la seconde  $\frac{a+m}{b+m}$  par  $b$ , comme on l'a vu (n° 5), elle devient  $\frac{ab+bm}{b^2+bm}$ .

Les deux numérateurs  $ab+am$ ,  $ab+bm$  ont une partie commune  $ab$  ; et la partie  $bm$  du second numérateur est plus grande que la partie  $am$  du premier numérateur, puisqu'on a supposé  $b > a$ . Donc aussi la seconde fraction est plus grande que la première ; ce qu'il fallait démontrer.

On voit d'ailleurs, par le raisonnement précédent, qu'il faut que  $\frac{a}{b}$  soit une fraction proprement dite, pour que le théorème soit vrai ; car autrement, il le serait dans un ordre inverse, puisqu'alors on aurait  $ab+bm < ab+am$ .

7. En réfléchissant sur les solutions qui ont été données des questions précédentes, on sentira que l'emploi des signes algébriques doit donner lieu à des règles communes à plusieurs questions. C'est ainsi, par exemple, que dans la seconde et la troisième question, on a été conduit à effectuer la multiplication d'une somme  $a+b$  par un nombre  $a$ , d'une somme  $a+m$  par  $b$ , d'un nombre  $a$  par une somme  $b+m$ . D'où

il résulte qu'en établissant des préceptes généraux pour trouver les résultats des opérations qu'on peut avoir à effectuer sur les quantités algébriques, on aurait des moyens fixes de résoudre toutes les questions relatives aux nombres par les symboles algébriques.

Cette partie de l'Algèbre a pour titre : *La manière d'effectuer les opérations de l'Arithmétique sur les quantités algébriques ou littérales*, c'est-à-dire sur les nombres représentés par des signes algébriques.

On ne peut se dissimuler que cette partie ne soit un peu aride, peut-être même rebutante pour les commençans; mais il est indispensable de la bien posséder, si l'on veut avancer rapidement dans le champ vaste et fécond de l'Algèbre.

## CHAPITRE PREMIER.

### §. 1<sup>er</sup>. Des Opérations algébriques:

#### *Définitions préliminaires.*

8. Toute quantité écrite en langage algébrique, c'est-à-dire à l'aide des signes de l'Algèbre, s'appelle *quantité algébrique* ou *quantité littérale*, ou bien, l'*expression algébrique de la quantité proposée*.

Ainsi,  $3a$  est l'expression algébrique du triple du nombre  $a$ ;  $5a^2$  est l'expression algébrique du quintuple du carré de  $a$ ;  $7a^3b^2$  est l'expression algébrique de sept fois le produit du cube de  $a$ , multiplié par le carré de  $b$ .

$3a - 5b$  est l'expression algébrique de la différence entre le triple de  $a$  et le quintuple de  $b$ .

$2a^2 - 3ab + 4b^2$  est l'expression algébrique du double du carré de  $a$ , diminué du triple produit de  $a$  par  $b$ , et augmenté du quadruple du carré de  $b$ .

On appelle *monome*, ou quantité à un seul terme, ou simplement *terme*, une quantité algébrique qui n'est réunie à aucune autre par le signe de l'addition ou de la soustraction; et *polynome*, ou quantité à plusieurs termes, une expression algébrique composée de plusieurs parties séparées les unes des autres par les signes  $+$  ou  $-$ . Ainsi  $3a$ ,  $5a^2$ ,  $7a^3b^2$  sont des monomes;  $3a - 5b$ ,  $2a^2 - 3ab + 4b^2$  sont des polynomes. La première de ces deux expressions est dite un *binome*, parce qu'elle est composée de deux termes. La seconde est dite un *trinome*, comme étant composée de trois termes...

9. La *valeur numérique* d'une expression algébrique est le nombre qu'on obtiendrait, si, en donnant des valeurs particulières aux lettres qui y entrent, on effectuait toutes les opérations de l'Arithmétique que comporte cette expression. Cette



valeur numérique dépend évidemment des valeurs particulières attribuées aux lettres, et doit généralement varier avec elles. Ainsi  $2a^3$  a pour valeur numérique 54, lorsque l'on fait  $a=3$ ; car le cube de 3 est 27, et 2 fois 27 donne 54. La valeur numérique de cette même expression est 250, lorsque l'on fait  $a=5$ ; car le cube de 5 est 125, et 2 fois 125 donne 250.

Je dis généralement, car, dans quelques cas, la valeur numérique d'une expression algébrique reste *constante*, quoiqu'on fasse varier les valeurs des lettres qui y entrent. Ainsi, dans l'expression  $a-b$ , tant qu'on donnera à  $a$  et  $b$  des valeurs croissantes par degrés égaux, l'expression ne changera pas.

Soit, par exemple,  $a=7$ ,  $b=4$ ; il en résulte  $a-b=3$ .

Soit maintenant  $a=12$  ou  $7+5$ , et  $b=9$  ou  $4+5$ ; il en résulte  $a-b=12-9=3$ , etc.

La *valeur numérique* d'un polynome ne change point lorsqu'on intervertit l'ordre de ses termes, pourvu que l'on ait soin de conserver à tous, leurs signes respectifs. Ainsi, les polynomes  $4a^3 - 3a^2b + 5ac^2$ ,  $5ac^2 - 3a^2b + 4a^3$ ,  $4a^3 + 5ac^2 - 3a^2b$ , ont la même valeur numérique. C'est une conséquence évidente de la nature de l'addition et de la soustraction arithmétiques. Mais cette observation sera très utile par la suite.

10. Des différens termes qui composent un polynome donné, les uns sont précédés du signe  $+$ , les autres du signe  $-$ . Les premiers portent le nom de *termes additifs*, les autres s'appellent *termes soustractifs*. On appelle aussi les premiers, *termes positifs*, et les autres, *termes négatifs*, dénominations assez impropres, que l'usage seul a consacrées.

Le premier terme d'un polynome n'est ordinairement précédé d'aucun signe; mais alors il est censé précédé du signe  $+$ .

11. On appelle *dimension* d'un terme, chacun des facteurs littéraux qui composent ce terme, et *degré* le nombre de ces facteurs ou dimensions. Le coefficient ne compte pas pour une dimension. Ainsi  $3a$  est dit un terme à une dimension ou du premier degré.  $5ab$  est dit un terme à deux dimensions ou du

second degré.  $7a^3bc^2$  étant la même chose que  $7aaabcc$ , est dit à six dimensions ou du sixième degré.

En général, le degré ou le nombre des dimensions d'un terme s'estime par la somme des exposants des lettres qui entrent dans ce terme. A ce sujet, nous remarquerons que, d'après la définition même de l'exposant (n° 2), une lettre qui n'a pas d'exposant, est censée avoir 1 pour exposant. Ainsi, le degré du terme  $8a^2bcd^3$  est  $2 + 1 + 1 + 3$ , ou 7.

Un polynome est dit *homogène*, lorsque tous ses termes sont de même degré.  $3a - 2b + c$ ,  $3a^3 - 4ab + b^3$ ,  $5a^2c - 4c^3 + 2c^2d$  sont des polynomes homogènes.  $8a^3 - 4ab + c$  n'est pas homogène.

12. On appelle *termes semblables* des termes qui sont composés des mêmes lettres affectées des mêmes exposants.

Ainsi  $7ab$  et  $3ab$ ,  $4a^3b^2$  et  $5a^3b^2$ , sont des termes semblables,  $8a^2b$  et  $7ab^2$  ne sont pas des termes semblables, car ils sont bien composés des mêmes lettres, mais les mêmes exposants n'affectent pas les mêmes lettres.

Il arrive souvent qu'un polynome renferme, dans son expression, plusieurs termes semblables, et alors il est susceptible de simplification.

Soit le polynome  $4a^2b - 3a^2c + 9ac^2 - 2a^2b + 7a^2c - 6b^3$ ; on peut (n° 9) l'écrire ainsi :  $4a^2b - 2a^2b + 7a^2c - 3a^2c + 9ac^2 - 6b^3$ ; or,  $4a^2b - 2a^2b$  se réduit évidemment à  $2a^2b$ .

$7a^2c - 3a^2c$  se réduit à  $4a^2c$ ; donc le polynome lui-même revient à  $2a^2b + 4a^2c + 9ac^2 - 6b^3$ .

Que l'on ait dans un polynome quelconque, les termes

$$+ 2a^3bc^2; - 4a^3bc^2, + 6a^3bc^2, - 8a^3bc^2, + 11a^3bc^2.$$

D'abord, la somme des termes additifs  $+ 2a^3bc^2 + 6a^3bc^2 + 11a^3bc^2$  est égale à  $+ 19a^3bc^2$ ; la somme des termes soustractifs  $- 4a^3bc^2 - 8a^3bc^2$  est égale à  $- 12a^3bc^2$ . Donc l'ensemble des cinq termes proposés se réduit à  $+ 19a^3bc^2 - 12a^3bc^2$ , ou à  $+ 7a^3bc^2$ .

Il peut se faire que la somme des termes soustractifs soit plus forte que celle des termes additifs. Dans ce cas, on

soustrait le coefficient positif du coefficient négatif, et l'on affecte le résultat du signe —. Ainsi, que l'on ait  $+5a^2b$  pour la somme des termes positifs, et  $-8a^2b$  pour la somme des termes négatifs; comme  $-8a^2b$  revient à  $-5a^2b - 3a^2b$ , il s'ensuit que  $+5a^2b - 8a^2b$  équivaut à  $+5a^2b - 5a^2b - 3a^2b$ , ou à  $-3a^2b$ .

D'où l'on peut conclure cette règle : *Pour opérer la réduction des termes semblables, formez un seul terme additif de tous les termes semblables précédés du signe +; ce qui se fait en ajoutant les coefficients de ces termes, et en affectant la somme de ces coefficients, de la partie littérale commune. Formez, par le même moyen, un seul terme soustractif de tous les termes affectés du signe —; retranchez ensuite la plus petite somme de la plus grande, et donnez au résultat le signe de la plus grande.*

(Il est bien essentiel de remarquer que la réduction ne doit porter que sur les coefficients et jamais sur les exposans.)

On trouvera, d'après cette règle, que :

$$6a^2b - 8a^2b - 9a^2b + 15a^2b - a^2b \text{ se réduit à } +3a^2b,$$

$$7abc^2 - abc^2 - 7abc^2 - 8abc^2 + 4abc^2 \text{ se réduit à } -5abc^2.$$

La réduction des termes semblables est une espèce d'opération, toute particulière à l'Algèbre, qui se rencontre dans l'addition, la soustraction, la multiplication et la division algébriques; opérations que nous allons maintenant développer.

*Remarque.* Comme celles-ci doivent offrir à l'esprit des élèves la même idée que les opérations analogues de l'Arithmétique, nous nous dispensons d'en répéter ici les définitions, qui doivent être suffisamment connues de tous ceux qui ont vu l'Arithmétique avec soin. On conçoit toutefois que le mode de les effectuer ne doit plus être le même, puisque les symboles sont différens. Tantôt ces opérations se réduisent à de simples indications, tantôt il y a lieu réellement à les effectuer, et alors il faut des règles correspondantes aux symboles que l'on emploie.

*De l'Addition algébrique.*

13. Soit d'abord à ajouter les expressions  $3a$ ,  $5b$ ,  $2c$ ; on a pour le résultat de cette addition,  $3a + 5b + 2c$ , expression que l'on ne peut simplifier davantage.

Soient encore les monomes  $4a^2b^3$ ,  $2a^2b^3$ ,  $7a^2b^3$ ; le résultat est  $4a^2b^3 + 2a^2b^3 + 7a^2b^3$ , ou réduisant (n° 12), ...  $13a^2b^3$ .

Proposons-nous maintenant les polynomes

$$3a^3 - 4ab, \quad 2a^3 - 3ab + b^3, \quad 2ab - 5b^3.$$

Pour former un seul polynome qui exprime la somme de ceux-ci, observons qu'ajouter au nombre exprimé par ....  $3a^3 - 4ab$ , le nombre exprimé par  $2a^3 - 3ab + b^3$ , c'est lui ajouter la différence du nombre d'unités exprimé par  $2a^3 + b^3$ , au nombre d'unités exprimé par  $3ab$ , opération que l'on ferait aisément, si l'on attribuait des valeurs particulières à  $a$  et  $b$ ; mais, comme elle est inexécutable dans l'état actuel des quantités, il revient au même d'ajouter d'abord  $2a^3 + b^3$  à  $3a^3 - 4ab$ , et de retrancher ensuite  $3ab$ ; ce qui donne  $3a^3 - 4ab + 2a^3 + b^3 - 3ab$ , ou changeant l'ordre des termes (n° 9) ...  $3a^3 - 4ab + 2a^3 - 3ab + b^3$ . De même, pour ajouter  $2ab - 5b^3$  à cette dernière expression, il suffit d'écrire. ....  $3a^3 - 4ab + 2a^3 - 3ab + b^3 + 2ab - 5b^3$ ; il ne s'agit plus actuellement que de faire (n° 12) la réduction des termes semblables, et il vient enfin  $5a^3 - 5ab - 4b^3$  pour le résultat demandé.

Comme des raisonnemens analogues pourraient s'appliquer à d'autres polynomes, on est en droit de conclure cette règle générale pour l'addition de deux ou plusieurs polynomes: *Écrivez les polynomes proposés les uns à la suite des autres, en conservant aux termes qui les composent leurs signes respectifs, et faites la réduction des termes semblables, s'il y a lieu.*

Voici quelques exemples.

$$\begin{array}{rcl}
 1^{\circ}. & 3a^2 - 4ab - 2b^2 & 2^{\circ}. \quad 7a^2b - 3abc - 8b^2c - 9c^3 + cd^2 \\
 & + 5a^2 + 2ab - b^2 & + 8abc - 5a^2b + 3c^3 - 4b^2c + cd^2 \\
 & + 3ab - 2b^2 - 3c^2 & + 4a^2b - 8c^3 + 9b^2c - 3d^3 \\
 \hline
 8a^2 + ab - 5b^2 - 3c^2 & & 6a^2b + 5abc - 3b^2c - 14c^3 + 2cd^2 - 3d^3.
 \end{array}$$

Dans la pratique, on dispose ordinairement les quantités proposées les unes sous les autres, comme on le voit dans ces deux exemples; on fait la réduction des termes semblables, et l'on écrit avec leurs signes respectifs les résultats de la réduction. Ainsi, dans le premier exemple, en considérant le terme  $3a^2$ , comme ce terme est semblable au terme  $5a^2$  qui se trouve sur la seconde ligne, on écrit  $8a^2$  pour le résultat de la réduction de ces deux termes, qu'on a soin de barrer légèrement (comme on le voit pour le premier terme). Passant ensuite au terme  $-4ab$ , on le réduit avec les termes  $+2ab$  et  $3ab$ , ce qui donne  $+ab$ , qu'on écrit à la droite de  $8a^2$ , et l'on barre les nouveaux termes qu'on vient de réduire. On continue ainsi l'opération jusqu'à ce que tous les termes soient barrés et réduits.

Le léger trait qu'on passe sur les termes sert à prévenir l'omission de quelques termes dans le résultat; les termes non barrés sont encore à réduire.

#### *De la Soustraction algébrique.*

14. Soit à retrancher  $4b$  de  $5a$ ; le résultat algébrique est  $5a - 4b$ . De même, la différence entre  $7a^2b$  et  $4a^2b$  est  $7a^2b - 4a^2b$ , ou  $3a^2b$ .

Soit maintenant  $2b - 3c$  à retrancher de  $4a$ ; on peut d'abord présenter le résultat de cette manière,  $4a - (2b - 3c)$ , en mettant la quantité à soustraire entre deux parenthèses, et l'écrivant à la suite de la première quantité avec le signe  $-$ . Mais les questions exigent souvent que l'on forme un seul polynôme de cette expression; et c'est en cela que consiste principalement la règle de la soustraction algébrique.

Pour parvenir à ce but, on observera que si  $a, b, c$  étaient

donnés numériquement, on ferait la soustraction indiquée par  $2b-3c$ , puis on retrancherait le résultat obtenu, de  $4a$ ; comme cette soustraction ne peut être effectuée dans l'état actuel des quantités, on commence par retrancher  $2b$  de  $4a$ , ce qui donne  $4a-2b$ ; mais en retranchant  $2b$  unités, on a soustrait un nombre trop fort de  $3c$  unités; il faut donc rectifier le résultat en lui ajoutant  $3c$ . Ainsi, l'on a  $4a-2b+3c$  pour le résultat de la soustraction proposée.

Soit encore  $5a^2-4ab+3bc-b^2$  à soustraire de  $8a^2-2ab$ ; cette opération peut être indiquée ainsi :

$$8a^2 - 2ab - (5a^2 - 4ab + 3bc - b^2).$$

Mais, pour réduire cette expression à un seul polynôme, observons que retrancher  $5a^2-4ab+3bc-b^2$  revient à retrancher la différence entre la somme  $5a^2+3bc$  des termes additifs, et la somme  $4ab+b^2$  des termes soustractifs. On peut d'abord retrancher  $5a^2+3bc$ , ce qui donne  $8a^2-2ab-5a^2-3bc$ ; et comme ce résultat est nécessairement trop faible de  $4ab+b^2$ , il faut lui ajouter cette dernière quantité, et il vient

$$\begin{array}{l} 8a^2 - 2ab - 5a^2 - 3bc + 4ab + b^2, \\ \text{ou} \quad 8a^2 - 2ab - 5a^2 + 4ab - 3bc + b^2, \end{array}$$

en rétablissant l'ordre des termes; ou bien enfin, réduisant,

$$3a^2 + 2ab - 3bc + b^2.$$

D'où l'on peut conclure cette règle générale :

*Pour soustraire deux polynômes l'un de l'autre, écrivez la quantité à soustraire à la suite de celle dont il faut soustraire, avec des signes contraires, et faites la réduction du polynôme résultant, s'il y a lieu.*

On trouvera, d'après cette règle,

$$1^{\circ}. \quad \left. \begin{array}{l} 5a^3 - 4a^2b + 3b^2c \\ - (3a^2b - 2a^3 - 8b^2c) \end{array} \right\} = 7a^3 - 7a^2b + 11b^2c.$$

$$2^{\circ}. \quad \left. \begin{array}{l} 4ab - cd - 2b^2 + 3a^2 \\ - (5ab - 4cd + 3b^2 + 3a^2) \end{array} \right\} = -ab + 3cd - 5b^2.$$

15. On peut aussi, d'après cette même règle, faire subir à des polynômes certaines transformations.

Par exemple,  $6a^2 - 3ab + 2b^2 - 2bc$ ,  
 revient à  $6a^2 - (3ab - 2b^2 + 2bc)$ .  
 De même  $7a^3 - 8a^2b - 4b^2c + 6b^3$ ,  
 revient à  $7a^3 - (8a^2b + 4b^2c - 6b^3)$ ,  
 ou bien encore, à  $7a^3 - 8a^2b - (4b^2c - 6b^3)$ .

Ces transformations, qui consistent à décomposer un polynome en deux parties séparées l'une de l'autre par le signe —, sont très utiles en Algèbre.

### *Multiplication algébrique.*

16. Nous regarderons comme démontré un principe qui est généralement admis dans tous les Traités d'Arithmétique (voyez pour la démonstration, mes *Éléments d'Arithmétique*, 4<sup>e</sup> édit., n° 127), c'est que le produit de deux ou plusieurs nombres reste le même dans quelque ordre qu'on les multiplie.

Cela posé, considérons d'abord le cas où l'on a un monome à multiplier par un monome; soit  $7a^3b^2$  à multiplier par  $4a^2b$ .

L'expression de ce produit peut d'abord s'écrire ainsi :...  $7a^3b^2 \times 4a^2b$ . Mais on peut la simplifier, en observant que, d'après le principe précédent et la signification des symboles algébriques (n° 2), elle revient à  $7 \times 4 \times aaaaabbb$ . Or, comme les coefficients sont des nombres particuliers, rien n'empêche d'en former un seul, en les multipliant entre eux; ce qui donne 28 pour coefficient du produit. Quant aux lettres, le produit  $aaaaa$  équivaut à  $a^5$ , et le produit  $bbb$ , à  $b^3$ ; ainsi l'on obtient pour résultat final,  $28a^5b^3$ .

Soit encore  $12a^2b^4c^2$  à multiplier par  $8a^3b^2d^2$ ; ce produit revient à  $12 \times 8 \times aaaaabbbbbbccdd$ , ou  $96a^5b^6c^2d^2$ . D'où l'on voit que, pour multiplier deux monomes l'un par l'autre, il faut, 1°. multiplier les deux coefficients entre eux; 2°. écrire à la suite de ce produit toutes les lettres qui entrent à la fois dans le multiplicande et le multiplicateur, en affectant chaque lettre d'un exposant égal à la somme des deux exposans dont cette même lettre est affectée dans les deux facteurs; 3°. si une lettre

*n'entre que dans l'un des facteurs, l'écrire au produit avec l'exposant dont elle est affectée dans ce facteur.*

La règle relative aux coefficients n'offre aucune difficulté.

Mais pour se rendre compte de la règle des exposans, il faut observer qu'en général un nombre  $a$  doit se trouver autant de fois facteur dans le produit, qu'il l'est, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur. Or (n° 2) les exposans des lettres marquent le nombre de fois qu'elles entrent comme facteur; donc la somme des deux exposans d'une même lettre marque le nombre de fois qu'elle doit être facteur dans le produit demandé.

On trouvera, d'après la règle précédente, que

$$\begin{aligned} 8a^2bc^3 \times 7abcd^2 &= 56a^3b^2c^3d^3, \\ 21a^3b^2cd \times 8abc^3 &= 168a^4b^3c^4d, \\ 4abc \times 7df &= 28abcdf. \end{aligned}$$

17. Passons à la multiplication des polynomes.

Soient d'abord deux polynomes  $a + b + c$  et  $d + f$ , composés de termes tous additifs; on peut présenter le produit sous la forme  $(a + b + c)(d + f)$ . Mais on a souvent besoin de former un seul polynome de ce produit indiqué, et c'est en cela que consiste la multiplication de deux polynomes.

Or, il est évident que multiplier la somme  $a + b + c$  par  $d + f$ , revient à prendre  $a + b + c$  autant de fois qu'il y a d'unités dans  $d$ , plus autant de fois qu'il y a d'unités dans  $f$ , et à ajouter les deux produits. Mais multiplier  $a + b + c$  par  $d$ , c'est prendre  $d$  fois chacune des parties du multiplicande, et réunir les produits partiels, ce qui donne  $ad + bd + cd$ . De même, multiplier  $a + b + c$  par  $f$ , c'est prendre  $f$  fois chacune des parties du multiplicande, et réunir les produits partiels. Donc enfin  $(a + b + c)(d + f) = ad + bd + cd + af + bf + cf$ .

Ainsi, pour multiplier deux polynomes composés de termes tous additifs, il faut multiplier successivement chacun des termes du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur et ajouter tous les produits.

Si les termes sont affectés de coefficients et d'exposans, on



suit les règles prescrites (n° 16) pour la multiplication des monomes. Par exemple,  $(3a^2 + 4ab + b^2)(2a + 5b)$  donne pour produit,  $6a^3 + 8a^2b + 2ab^2 + 15a^2b + 20ab^2 + 5b^3$ , ou réduisant,  $6a^3 + 23a^2b + 22ab^2 + 5b^3$ .

Pour nous rendre compte du cas le plus général, commençons par remarquer que, si le multiplicande renferme des termes additifs et des termes soustractifs, ce facteur exprime une différence entre le nombre d'unités marqué par la somme des termes additifs et le nombre d'unités marqué par la somme des termes soustractifs. Même raisonnement par rapport au multiplicateur. D'où il suit que la multiplication de deux polynomes quelconques est ramenée à la multiplication de deux binomes tels que  $a - b$ ,  $c - d$ ,  $a$  désignant la somme des termes additifs, et  $-b$  la somme des termes soustractifs du multiplicande; il en est de même de  $c$  et de  $-d$ ; par rapport au multiplicateur : voyons donc comment on peut effectuer la multiplication exprimée par  $(a - b)(c - d)$ .

Or, multiplier  $a - b$  par  $c - d$  revient évidemment à prendre  $a - b$  autant de fois qu'il y a d'unités dans  $c$ , moins autant de fois qu'il y a d'unités dans  $d$ , ou bien, à multiplier  $a - b$  par  $c$ , et à retrancher du produit celui de  $a - b$  par  $d$ . Mais multiplier  $a - b$  par  $c$ , revient à multiplier  $c$  par  $a - b$  (en vertu du principe énoncé n° 16), ce qui donne  $ca - cb$ , ou  $ac - bc$ . De même, le produit de  $a - b$  par  $d$  est  $ad - bd$ ; et comme on vient de voir que ce dernier produit doit être retranché du précédent  $ac - bc$ , il faut (n° 14) changer les signes de  $ad - bd$ , et l'écrire à la suite de  $ac - bc$ , ce qui donne enfin

$$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd.$$

Pour peu qu'on réfléchisse sur la manière dont ce produit vient d'être formé, on verra que, dans toute multiplication, si l'on considère tous les termes additifs du multiplicateur, il faut multiplier chacun des termes du multiplicande, tant additifs que soustractifs, par ces termes, et affecter les produits partiels de signes semblables à ceux dont les termes du multiplicande sont affectés; et en considérant les termes soustractifs du

*multiplieateur, multiplier de même chacun des termes du multiplicande, tant additifs que soustractifs, par ces termes, mais affecter les produits partiels de signes contraires à ceux dont les termes du multiplicande sont affectés. Quant à la multiplication partielle d'un terme du multiplicande par un terme du multiplieateur, on suit les règles établies pour les monomes (n° 16).*

Soient, par exemple, les deux polynomes

$$\begin{array}{r}
 4a^3 - 5a^2b - 8ab^2 + 2b^3, \\
 \text{et} \quad 2a^2 - 3ab - 4b^2, \\
 \hline
 8a^5 - 10a^4b - 16a^3b^2 + 4a^2b^3 \\
 - 12a^4b + 15a^3b^2 + 24a^2b^3 - 6ab^4 \\
 - 16a^3b^2 + 20a^2b^3 + 32ab^4 - 8b^5 \\
 \hline
 8a^5 - 22a^4b - 17a^3b^2 + 48a^2b^3 + 26ab^4 - 8b^5.
 \end{array}$$

Après avoir disposé les polynomes l'un au-dessous de l'autre, on multiplie chacun des termes du premier par le terme  $2a^2$  du second, ce qui donne  $8a^5 - 10a^4b - 16a^3b^2 + 4a^2b^3$ , polynome dont les signes sont les mêmes que ceux du multiplicande. Passant ensuite au terme  $3ab$  du multiplieateur, comme ce terme est affecté du signe  $-$ , on multiplie chacun des termes du multiplicande par ce terme, en ayant soin d'affecter chaque produit d'un signe contraire à celui du terme correspondant du multiplicande, ce qui donne  $-12a^4b + 15a^3b^2 + 24a^2b^3 - 6ab^4$ , produit que l'on écrit au-dessous du premier.

On fait la même opération par rapport au terme  $4b^2$ , qui est aussi soustractif, ce qui donne  $-16a^3b^2 + 20a^2b^3 + 32ab^4 - 8b^5$ . On fait ensuite la réduction des termes semblables, et l'on obtient enfin pour l'expression la plus simple du produit,

$$8a^5 - 22a^4b - 17a^3b^2 + 48a^2b^3 + 26ab^4 - 8b^5.$$

La règle des signes, qui est la plus importante à retenir dans la multiplication de deux polynomes, peut s'énoncer ainsi : *Toutes les fois que les deux termes du multiplicande et du multiplieateur sont affectés du même signe, le produit correspondant est affecté du signe  $+$ , et lorsque les deux termes sont affectés de signes contraires, le produit est affecté du signe  $-$ .*

On dit encore, en langage algébrique, que  $+$  multiplié par  $+$ , ou  $-$  multiplié par  $-$ , donne  $+$ ;  $-$  multiplié par  $+$ , ou  $+$  multiplié par  $-$ , donne  $-$ . Mais ce dernier énoncé, qui n'offre aucun sens raisonnable en lui-même (puisque l'on ne sait ce que signifie : multiplier entre eux des symboles, non de quantités, mais d'opérations arithmétiques), ce dernier énoncé, dis-je, doit être seulement regardé comme une abréviation du précédent.

Ce n'est pas la seule circonstance où les algébristes, pour abrégé le discours, emploient des expressions incorrectes, mais qui ont l'avantage de mieux graver les règles dans la mémoire.

Nous proposerons pour exercices les exemples suivans :

$$\begin{array}{r} 1^{\text{er}} \text{ Exemple. } 3a^2 - 5bd + cf \\ - 5a^2 + 4bd - 8cf \end{array}$$

---


$$\text{Prod. simp.} - 15a^4 + 37a^2bd - 29a^2cf - 20b^2d^2 + 44bcd^2f - 8c^2f^2.$$

$$\begin{array}{r} 2^{\text{e}} \text{ Exemple. } 4a^3b^2 - 5a^2b^2c + 8a^2bc^2 - 3a^2c^3 - 7abc^3 \\ 2ab^2 - 4abc - 2bc^2 + c^3 \end{array}$$

---


$$\text{Produit simplifié. } \left\{ \begin{array}{l} 8a^4b^4 - 10a^3b^4c + 28a^3b^3c^2 - 34a^3b^2c^3 \\ - 4a^2b^3c^3 - 16a^4b^3c + 12a^3b^2c^4 + 7a^2b^2c^4 \\ + 14a^2bc^5 + 14ab^2c^5 - 3a^2c^6 - 7abc^6 \end{array} \right.$$

18. Nous ferons sur la multiplication algébrique plusieurs remarques fort importantes.

*Premièrement.* Si les polynomes qu'on se propose de multiplier l'un par l'autre sont homogènes (n° 11), (et la plupart des questions qu'on cherche à résoudre par le secours de l'Algèbre, les questions de Géométrie principalement, conduisent à de semblables expressions), le produit de ces deux polynomes est aussi homogène; c'est une conséquence évidente des règles relatives aux lettres et aux exposans dans la multiplication des quantités monomes. En outre, le degré de chaque terme du produit doit être égal à la somme des degrés de deux termes

*quelconques du multiplicande et du multiplicateur.* Ainsi, dans le premier des deux exemples précédens, tous les termes du multiplicande étant du deuxième degré, ainsi que ceux du multiplicateur, tous les termes du produit sont du quatrième degré. Dans le second, le multiplicande étant du cinquième degré, et le multiplicateur du troisième degré, le produit est du huitième degré. Cette remarque sert, dans la pratique, à reconnaître des erreurs de calcul par rapport aux exposans. Par exemple, si l'on trouve que, dans l'un des termes d'un produit qui doit être homogène, la somme des exposans est égale à 6, tandis qu'elle est égale à 7 dans tous les autres termes, il y a erreur manifeste dans l'addition des exposans; et alors, on reprend la multiplication des deux termes qui ont formé ce produit partiel.

*Secondement.* Lorsque, dans la multiplication de deux polynomes, le produit n'offre aucune réduction de termes semblables, le nombre total des termes du produit est égal au produit du nombre des termes du multiplicande, multiplié par le nombre des termes du multiplicateur; c'est une conséquence de la règle (n° 17). Ainsi, que l'on ait 5 termes dans le multiplicande et 4 dans le multiplicateur, il y en a  $5 \times 4$  ou 20 dans le produit. En général, si le multiplicande se compose de  $m$  termes et le multiplicateur de  $n$  termes, le produit en renferme  $m \times n$ .

*Troisièmement.* Lorsqu'il y a des termes semblables, le nombre total des termes du produit simplifié peut être beaucoup moins grand. Mais on remarquera que, parmi les différens termes du produit, il en est qui ne peuvent se réduire avec aucun autre : ce sont, 1°. le terme provenant de la multiplication du terme du multiplicande affecté du plus haut exposant de l'une des lettres, par le terme du multiplicateur affecté du plus haut exposant de la même lettre; 2°. le terme provenant de la multiplication des deux termes affectés du plus faible exposant de la même lettre. En effet, ces deux produits partiels doivent renfermer cette lettre avec un plus haut ou un plus faible exposant que chacun des autres pro-

duits partiels; par conséquent, ils ne peuvent être semblables aux autres produits. Cette remarque, dont la vérité se déduit de la règle des exposans, sera d'une très grande utilité dans la division.

19. Pour terminer ce qui a rapport à la multiplication algébrique, nous ferons connaître différens résultats de multiplication, d'un usage fréquent en Algèbre.

1°. Soit proposé de former le carré ou la seconde puissance d'un binôme  $a + b$ . On a, d'après les principes connus,

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2;$$

c'est-à-dire que le carré de la somme de deux quantités se compose du carré de la première quantité, plus du carré de la seconde, plus du double produit de la première par la seconde.

Ainsi, soit à former le carré de  $5a^3 + 8a^2b$ ; on a, d'après ce qui vient d'être dit,  $(5a^3 + 8a^2b)^2 = 25a^6 + 80a^5b + 64a^4b^2$ .

2°. Soit à former le carré d'une différence  $a - b$ .

$$\text{On a } (a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2;$$

c'est-à-dire que le carré de la différence de deux quantités se compose du carré de la première, plus du carré de la seconde, moins le double produit de la première par la seconde.

$$\text{Ainsi } (7a^2b^3 - 12ab^3)^2 = 49a^4b^6 - 168a^3b^5 + 144a^2b^6.$$

3°. Soit proposé de multiplier  $a + b$  par  $a - b$ .

On a  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ . Donc la somme de deux quantités, multipliée par leur différence, donne pour produit la différence de leurs carrés. (C'est le théorème démontré n° 5.)

$$\text{Ainsi } (8a^3 + 7ab^2)(8a^3 - 7ab^2) = 64a^6 - 49a^2b^4.$$

On peut, en combinant ces différens résultats, trouver les produits de certains polynomes plus promptement que par le procédé ordinaire. Soit, par exemple, à multiplier.....  $5a^2 - 4ab + 3b^2$  par  $5a^2 - 4ab - 3b^2$ ; si l'on remarque que la première de ces deux quantités est la somme de deux

nombres  $5a^3 - 4ab$  et  $3b^3$ , que la seconde est la différence de ces deux mêmes nombres, on trouve de suite, pour le produit,

$$(5a^3 - 4ab)^2 - (3b^3)^2 = 25a^6 - 40a^3b + 16a^2b^2 - 9b^6.$$

20. En réfléchissant sur les résultats de multiplication que l'on vient d'obtenir, on voit que leur composition, ou la manière dont ils se forment à l'aide du multiplicande et du multiplicateur, est tout-à-fait indépendante des valeurs particulières qu'on peut attribuer aux lettres  $a$  et  $b$  qui entrent dans les deux facteurs.

*En principe, la manière dont un produit algébrique se forme à l'aide de ces deux facteurs, s'appelle LA LOI de ce produit; et cette loi reste toujours la même, quelles qu'aient été les valeurs attribuées aux lettres qui entrent dans les deux facteurs.*

21. Enfin, un polynome étant donné, on peut quelquefois, d'après son inspection, le décomposer en facteurs, ce qui est souvent utile.

Soit le polynome  $25a^4 - 30a^3b + 15a^2b^2$ ; il est évident que les facteurs 5 et  $a^2$  entrent dans chacun de ces termes. Ainsi, on peut mettre le polynome sous la forme  $5a^2(5a^2 - 6ab + 3b^2)$ . De même,  $64a^4b^6 - 25a^2b^8$  se transforme en

$$(8a^2b^3 + 5ab^4)(8a^2b^3 - 5ab^4).$$

En effet,  $64a^4b^6$  et  $25a^2b^8$  étant les carrés de  $8a^2b^3$  et  $5ab^4$ , il s'ensuit que l'expression proposée est la différence de deux carrés, et qu'elle est (n° 19) décomposable dans la somme des racines de ces carrés, multipliée par la différence des mêmes racines.

### *De la Division algébrique.*

22. La division algébrique, comme la division arithmétique, a pour but, étant donné un produit et l'un de ses facteurs, de trouver le second facteur.

Considérons d'abord le cas de deux monomes.

Soit à diviser  $72a^5$  par  $8a^3$ , ce que l'on indique ainsi :  $\frac{72a^5}{8a^3}$ .

On demande une troisième quantité monome qui, multipliée par la seconde, reproduise la première. Or, d'après les règles établies pour la multiplication des monomes, la quantité cherchée doit être telle, que son coefficient, multiplié par 8, donne pour produit 72, et que l'exposant de la lettre  $a$ , dans cette quantité, ajouté à 3, exposant de la lettre  $a$  dans le diviseur, donne pour somme 5, exposant du dividende. Ainsi, l'on obtiendra cette quantité en divisant 72 par 8, et retranchant de l'exposant 5 l'exposant 3, ce qui donne  $\frac{72a^5}{8a^3} = 9a^2$ ; et en effet on a  $8a^3 \times 9a^2 = 72a^5$ .

On a, d'après les mêmes remarques,

$$\frac{35a^3b^2c}{7ab} = 5a^{3-1}b^{2-1}c = 5a^2bc; \text{ et en effet, } 7ab \times 5a^2bc = 35a^3b^2c;$$

d'où l'on voit que, pour diviser deux monomes l'un par l'autre, il faut, 1°. *diviser les deux coefficients l'un par l'autre*; 2°. *pour les lettres communes au dividende et au diviseur, écrire chacune d'elles à la suite du coefficient, en l'affectant d'un exposant égal à l'excès de l'exposant du dividende sur celui du diviseur*; 3°. *écrire à la suite et avec leurs exposans respectifs, les lettres qui entrent dans le dividende sans entrer dans le diviseur*.

On trouve, d'après cette règle,

$$\frac{48a^3b^3c^2d}{12ab^2c} = 4a^2bcd; \quad \frac{150a^5b^8cd^3}{30a^3b^5d^2} = 5a^2b^3cd.$$

23. Il résulte de la règle précédente que la division des monomes est impossible, *premièrement*, si les coefficients ne sont pas divisibles l'un par l'autre; *en second lieu*, si certains exposans sont plus forts au diviseur qu'au dividende; *en troisième lieu*, si le diviseur renferme une ou plusieurs lettres qui ne se trouvent pas dans le dividende. Dès qu'une seule de ces trois circonstances se rencontre, le quotient reste sous la forme d'un

*monome fractionnaire*, c'est-à-dire d'une expression monome, dans laquelle entre nécessairement le signe algébrique de la division, mais qu'on peut souvent simplifier.

Soit, par exemple,  $12a^4b^2cd$  à diviser par  $8a^2bc^2$ .

On ne peut trouver ici pour quotient un *monome entier*, c'est-à-dire un monome débarrassé du signe de la division, parce que 12 n'est pas divisible exactement par 8, et qu'en outre l'exposant de  $c$  est moins grand au dividende qu'au diviseur.

Ainsi, on présentera le quotient demandé sous la forme  $\frac{12a^4b^2cd}{8a^2bc^2}$ ; mais on peut simplifier cette expression, en remarquant que les facteurs 4,  $a^2$ ,  $b$  et  $c$  étant communs aux deux termes de cette fraction, rien n'empêche de les supprimer, et l'on a pour résultat,  $\frac{3a^2bd}{2c}$ .

En général, pour simplifier un monome fractionnaire, il faut, 1°. *supprimer le plus grand facteur commun aux deux coefficients*; 2°. *retrancher le plus petit des deux exposans d'une même lettre, du plus grand, et écrire la lettre affectée de cette différence d'exposans, dans celui des deux termes de la fraction où l'exposant était le plus grand*; 3°. *écrire les lettres non communes, avec leurs exposans respectifs, dans celui des deux termes de la fraction où ces lettres entraient*.

On trouvera d'après cette nouvelle règle,

$$\frac{48a^3b^2cd^1}{36a^2b^1c^2d^2} = \frac{4ad^1}{3bce}; \quad \frac{37ab^1c^2d}{6a^2bc^1d^2} = \frac{37b^2c}{6a^2d}; \quad \frac{7a^2b}{14a^3b^2} = \frac{1}{2ab}.$$

Dans le dernier exemple, comme tous les facteurs du dividende se trouvent au diviseur, le numérateur se réduit à l'unité, parce que cela revient à diviser les deux termes de la fraction par le numérateur.

24. Il arrive souvent que les exposans de certaines lettres sont les mêmes au dividende qu'au diviseur.

Soit, par exemple, à diviser  $24a^7b^2$  par  $8a^2b^2$ ; comme la lettre  $b$  est affectée du même exposant, le quotient ne doit pas la renfermer, et l'on a  $\frac{24a^7b^2}{8a^2b^2} = 3a^5$ . Mais on remarque que



ce résultat  $3a$  peut être mis sous une forme propre à conserver la trace de la lettre  $b$  qui a disparu par l'effet de la réduction.

En effet, si l'on applique, *par convention*, à l'expression  $\frac{b^a}{b^a}$  la règle des exposans (n° 22), il vient  $\frac{b^a}{b^a} = b^0$ . Ce nouveau symbole  $b^0$  indique (n° 2) que la lettre entre 0 fois comme facteur dans le quotient, ou, ce qui revient au même, qu'elle ne doit pas y entrer; mais il indique en même temps qu'elle entrait dans le dividende et le diviseur, et qu'elle a disparu par l'effet de l'opération. Ce symbole a l'avantage de conserver la trace d'un nombre qui faisait partie de la question que l'on avait en vue de résoudre, sans changer pour cela en rien le résultat; car, puisque  $b^0$  provient de  $\frac{b^a}{b^a}$ , qui, d'ailleurs est égal à 1, il s'ensuit que  $3ab^0$  équivaut à  $3a \times 1$  ou  $3a$ . De même

$$\frac{15a^3b^3c^3}{3a^3bc^3} = 5a^0b^2c^0 = 5b^2.$$

Comme il importe d'avoir des notions exactes sur l'origine et la signification des symboles employés en Algèbre, nous proposerons de faire voir qu'en général, toute quantité  $a$ , affectée de l'exposant 0, équivaut à 1, c'est-à-dire que l'on a

$$a^0 = 1.$$

En effet, cette expression provient, comme nous venons de le dire, de ce que  $a$  est affecté du même exposant au dividende et au diviseur d'une division indiquée. Ainsi l'on a  $a^m = \frac{a^m}{a^m}$  ( $m$  désignant pour plus de généralité le nombre entier qui sert d'exposant à  $a$ ). Mais le quotient de toute quantité divisée par elle-même est 1; donc  $\frac{a^m}{a^m} = 1$ ; donc aussi l'on a  $a^0 = 1$ .

Le symbole  $a^0$  n'est, nous le répétons, employé par convention, que pour conserver dans le calcul la trace d'une lettre qui entrait dans l'énoncé d'une question, mais qui doit dispa-

raître par l'effet d'une division; et il est souvent nécessaire de conserver cette trace.

#### DIVISION DE DEUX POLYNOMES.

25. Soit à diviser  $51a^3b^2 + 10a^4 - 48a^3b - 15b^4 + 4ab^3$ , par  $4ab - 5a^2 + 3b^2$ .

Pour suivre plus facilement les calculs, on peut les disposer ainsi :

$$\begin{array}{r}
 51a^3b^2 + 10a^4 - 48a^3b - 15b^4 + 4ab^3 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4ab - 5a^2 + 3b^2 \\ -2a^3 + 8ab - 5b^2 \end{array} \\
 + 8a^3b - 10a^4 + 6a^2b^2 \\
 \hline
 57a^3b^2 - 40a^3b - 15b^4 + 4ab^3 \\
 - 32a^3b^2 + 40a^3b - 24ab^3 \\
 \hline
 25a^3b^2 - 15b^4 - 20ab^3 \\
 + 20ab^3 - 25a^2b^2 + 15b^4 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Le but de cette opération est, comme nous l'avons déjà dit (n° 22), *de trouver un troisième polynome qui, multiplié par le second, reproduise le premier.*

Il résulte de cette définition et de la règle établie (n° 17), pour la multiplication des polynomes, que le dividende est l'assemblage, *par addition et après réduction*, des produits partiels de chacun des termes du diviseur, multipliés par chacun des termes du quotient cherché. Cela posé, si l'on pouvait découvrir dans le dividende un terme qui fût provenu, *sans réduction*, de la multiplication de l'un des termes du diviseur par un des termes du quotient, alors, en divisant l'un par l'autre ces deux termes du dividende et du diviseur, on serait certain d'obtenir un terme du quotient cherché.

Or, d'après la troisième remarque du n° 18, le terme  $10a^4$  affecté du plus haut exposant de la lettre  $a$ , provient sans réduction, de la multiplication des deux termes du diviseur et du quotient, affectés du plus haut exposant de la même lettre. Donc, en divisant le terme  $10a^4$  par le terme  $-5a^2$  du diviseur, on sera certain d'avoir un terme du quotient cherché. Mais

il se présente ici une difficulté, c'est de déterminer le signe dont le terme du quotient doit être affecté. Pour ne pas être arrêté dorénavant à ce sujet, nous allons établir une règle qui sera *la règle des signes de la division*.

Comme, dans la multiplication, le produit de deux termes de même signe est affecté du signe  $+$ , et que le produit de deux termes de signes contraires est affecté du signe  $-$ , on peut conclure, 1°. que si le terme du dividende a le signe  $+$ , et celui du diviseur le signe  $+$ , le terme du quotient doit avoir le signe  $+$ ; 2°. que si le terme du dividende a le signe  $+$  et le terme du diviseur le signe  $-$ , le terme du quotient doit avoir le signe  $-$ , parce qu'il n'y a que le signe  $-$  qui, combiné par multiplication avec le signe  $-$  du diviseur, puisse reproduire le signe  $+$  du dividende; 3°. que si le terme du dividende a le signe  $-$  et le terme du diviseur le signe  $+$ , le quotient doit avoir le signe  $-$ ; 4°. enfin, si le dividende a le signe  $-$  et le diviseur le signe  $-$ , le quotient doit avoir le signe  $+$ .

En résumant, on voit que cela revient à dire :

*Si les deux termes du dividende et du diviseur sont de même signe, le quotient doit être affecté du signe  $+$ ; et s'ils sont affectés de signes contraires, le quotient doit être affecté du signe  $-$ . On dit encore, par abréviation,*

$+$  divisé par  $+$  et  $-$  divisé par  $-$  donnent  $+$ ,  
 $-$  divisé par  $+$  et  $+$  divisé par  $-$  donnent  $-$ .

Revenons à notre objet.

Dans l'exemple proposé,  $10a^4$  et  $-5a^2$  étant affectés de signes contraires, leur quotient doit avoir le signe  $-$ ; d'ailleurs  $10a^4$  divisé par  $5a^2$  donne  $2a^2$  (n° 22); donc  $-2a^2$  est un terme du quotient cherché. Après l'avoir écrit au-dessous du diviseur, on multiplie chacun des termes du diviseur par ce terme, puis on soustrait le produit  $-8a^3b + 10a^4 - 6a^2b^2$ , du dividende, ce qui se fait en l'écrivant, avec des signes contraires, au-dessous du dividende, et opérant la réduction. Il vient ainsi pour résultat de la première opération partielle,

$$57a^2b^2 - 40a^3b - 15b^4 + 4ab^3.$$

Ce résultat se compose des produits partiels de chacun des termes du diviseur par chacun des termes qui restent à déterminer au quotient. On peut donc le regarder comme un nouveau dividende, et raisonner sur lui comme sur le dividende proposé. On est ainsi conduit à prendre, dans ce résultat, le terme  $-40a^3b$ , affecté du plus haut exposant de  $a$ , et à le diviser par le même terme  $-5a^2$  du diviseur. Or, d'après les principes précédens,  $-40a^3b$  divisé par  $-5a^2$ , donne pour quotient  $+8ab$ , nouveau terme qu'on écrit à la droite du premier. Multipliant chacun des termes du diviseur par ce terme, et écrivant ces produits avec des signes contraires, au-dessous du second dividende, puis faisant la réduction, on trouve pour résultat de la seconde opération,

$$25a^2b^2 - 15b^4 - 20ab^3;$$

divisant encore  $25a^2b^2$  par  $-5a^2$ , on a pour quotient  $-5b^2$ , qui forme le troisième terme du quotient. Multipliant le diviseur par ce terme, et écrivant les termes du produit au-dessous du troisième dividende, puis faisant la réduction, on obtient pour résultat 0. Donc  $-2a^2 + 8ab - 5b^2$ , ou  $8ab - 2a^2 - 5b^2$ , est le quotient demandé; ce qu'on peut d'ailleurs vérifier, en multipliant le diviseur par ce polynome; le produit effectué doit être égal au dividende.

En réfléchissant sur les raisonnemens précédens, on voit que, comme, dans chaque opération partielle, on est obligé de rechercher le terme du dividende affecté du plus haut exposant de l'une des lettres, et de le diviser par le terme du diviseur affecté du plus haut exposant de la même lettre, on éviterait cette recherche, si l'on avait le soin d'écrire *A PRIORI* les termes du dividende et du diviseur, de manière que les exposans d'une même lettre allassent en diminuant de gauche à droite. C'est ce qu'on appelle *ORDONNER* le dividende et le diviseur par rapport à une même lettre. Au moyen de cette préparation, le premier terme à gauche du dividende, et le premier terme à gauche du diviseur, sont toujours les deux termes qu'il faut diviser l'un par l'autre, pour avoir un des termes du quotient; et il en

est de même dans toutes les opérations suivantes, parce que les quotiens partiels et les produits du diviseur par ces quotiens sont continuellement ordonnés.

Voici le tableau des calculs de l'exemple précédent, après que l'on a ordonné les deux polynomes.

$$\begin{array}{r}
 10a^4 - 48a^3b + 51a^2b^2 + 4ab^3 - 15b^4 \\
 - 10a^4 + 8a^3b + 6a^2b^2 \\
 \hline
 -40a^3b + 57a^2b^2 + 4ab^3 - 15b^4 \\
 + 40a^3b - 32a^2b^2 - 24ab^3 \\
 \hline
 + 25a^2b^2 - 20ab^3 - 15b^4 \\
 - 25a^2b^2 + 20ab^3 + 15b^4 \\
 \hline
 0.
 \end{array}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} -5a^2 + 4ab + 3b^2 \\ -2a^2 + 8ab - 5b^2 \end{array}$$

26. De là on peut conclure la règle suivante pour diviser deux polynomes l'un par l'autre : *Après avoir ordonné le dividende et le diviseur par rapport à une même lettre, divisez le premier terme à gauche du dividende par le premier terme à gauche du diviseur, vous obtenez ainsi le premier terme du quotient ; multipliez le diviseur par ce terme, et retranchez le produit du dividende proposé. Divisez ensuite le premier terme du reste par le premier terme du diviseur, vous obtenez ainsi le second terme du quotient ; multipliez le diviseur par ce second terme, et retranchez le produit, du résultat de la première opération. Continuez ainsi les opérations, jusqu'à ce qu'enfin vous obteniez pour résultat 0 ; AUQUEL CAS, LA DIVISION EST DITE EXACTE.*

Lorsque le premier terme du dividende ordonné n'est pas exactement divisible (n° 23) par le premier terme du diviseur aussi ordonné, c'est un signe que la division totale est impossible, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de polynome qui, multiplié par le diviseur, puisse reproduire le dividende. Et, en général, on reconnaît qu'une division est impossible, lorsque le premier terme de l'un des dividendes partiels n'est pas divisible par le premier terme du diviseur.

27. Nous remarquerons, en passant, que, s'il y a quelque

analogie entre la division arithmétique et la division algébrique, par rapport à la manière dont les calculs sont disposés et effectués, elles ont entre elles cette différence essentielle, que dans la division arithmétique, les chiffres du quotient s'obtiennent par tâtonnement, tandis que dans la division algébrique, le quotient que l'on obtient, en divisant le premier terme d'un dividende partiel par le premier terme du diviseur, est toujours un des termes du quotient cherché. Si ces deux termes ne sont pas divisibles l'un par l'autre, on peut conclure tout de suite que la division totale est impossible. Sous ce rapport, la division algébrique est plus simple que la division arithmétique.

En outre, rien n'empêcherait de commencer l'opération par la droite, au lieu de la commencer par la gauche, puisqu'alors ce serait opérer sur les termes affectés des plus faibles exposants de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné. Dans la division arithmétique, on ne peut trouver le quotient qu'en commençant par la gauche.

Enfin, telle est l'indépendance des opérations partielles que comporte le procédé, qu'après avoir soustrait du dividende total le produit du diviseur par le premier terme trouvé au quotient, *soustraction indispensable*, on peut, à la seconde opération, diviser l'un par l'autre les deux termes du nouveau dividende et du diviseur, affectés du plus haut exposant d'une lettre différente de celle que l'on avait considérée d'abord, et l'on obtiendra encore un des termes du quotient, qui restent à déterminer. Si l'on considère la même lettre, c'est parce qu'il n'y a pas de raison pour en changer, et que les deux polynômes étant déjà ordonnés par rapport à la première lettre, les premiers termes à gauche dans le dividende et le diviseur sont propres à donner un terme du quotient, tandis que si l'on changeait de lettre, il faudrait chercher de nouveau les termes affectés du plus haut exposant de cette lettre.

*Second exemple.*

28. Diviser  $21x^3y^2 + 25x^2y^3 + 68xy^4 - 40y^5 - 56x^5 - 18x^4y$   
par  $5y^3 - 8x^2 - 6xy$ .

Voici le tableau des calculs, en ordonnant par rapport à  $\gamma$ .

$$\begin{array}{r}
 -40y^5+68xy^4+25x^2y^3+21x^3y^2-18x^4y-56x^5 \quad \left. \vphantom{-40y^5+68xy^4+25x^2y^3+21x^3y^2-18x^4y-56x^5} \right\} \frac{5y^5-6xy^4-8x^2y^3}{-8y^5+4xy^4-3x^2y^3+7x^3y^2} \\
 +40y^5-48xy^4-64x^2y^3 \quad \hline
 1^{\text{er}} \text{ reste } 20xy^4-39x^2y^3+21x^3y^2-18x^4y-56x^5 \\
 \quad -20xy^4+24x^2y^3+32x^3y^2 \quad \hline
 2^{\text{o}} \text{ reste } \dots -15x^2y^3+53x^3y^2-18x^4y-56x^5 \\
 \quad +15x^2y^3-18x^3y^2-24x^4y \quad \hline
 3^{\text{o}} \text{ reste } \dots \dots \dots 35x^3y^2-42x^4y-56x^5 \\
 \quad -35x^3y^2+42x^4y+56x^5 \quad \hline
 \text{reste final } \dots \quad 0
 \end{array}$$

Comme il importe aux commençans de se familiariser avec les opérations algébriques, et surtout de calculer promptement, nous allons traiter de nouveau le dernier exemple, en indiquant les simplifications qu'il est à propos d'introduire.

Elles consistent, comme en Arithmétique, à soustraire du dividende chaque produit partiel, immédiatement après avoir formé ce produit.

$$\begin{array}{r} -40y^5+68xy^4+25x^2y^3+21x^3y^2-18x^4y-56x^5 \quad \left\{ \begin{array}{l} 5y^2-6xy-8x^2 \\ -8y^3+4xy^2-3x^2y+7x^3 \end{array} \right. \\ 1^{\text{re}} \text{ reste... } +20xy^4-39x^2y^3+21x^3y^2-18x^4y-56x^5 \\ 2^{\text{e}} \text{ reste... } -15x^2y^3+53x^3y^2-18x^4y-56x^5 \\ 3^{\text{e}} \text{ reste... } \quad \quad \quad 35x^3y^2-42x^4y-56x^5 \end{array}$$

Si l'on divise d'abord  $-40y^3$  par  $5y^2$ , il vient pour quotient,  $-8y$ . Multipliant  $5y^2$  par  $-8y$ , on a  $-40y^3$ , qui, chargé de signe, donne  $+40y^3$ , terme qui détruit le premier terme du dividende.

De même,  $-6xy \times -8y^3$  donne  $+$  et pour la soustraction,  $-43xy^4$ , qui, réduit avec  $+68xy^4$ , donne pour reste  $25xy^4$ .

Enfin,  $-8x^2 \times -8y^3$  donne  $+$  et pour la soustraction,  $-64x^2y^3$  qui, réduit avec  $+25x^2y^3$ , donne  $-39x^2y^3$ . Le résultat de la première opération est donc  $20xy^4 - 39x^2y^3$  suivi des autres termes du dividende qui n'ont pas été réduits avec les produits partiels déjà obtenus.

On opère sur le nouveau dividende comme on a opéré sur le dividende primitif et ainsi de suite.

*Troisième exemple.*

$$\begin{array}{r} \text{Soit à diviser } 95a - 73a^2 + 56a^4 - 25 - 59a^3 \\ \text{par } -3a^2 + 5 - 11a + 7a^3 \\ \hline 56a^4 - 59a^3 - 73a^2 + 95a - 25 \quad \left| \begin{array}{l} 7a^2 - 3a^2 - 11a + 5 \\ 1^{\text{er}} \text{ reste } \dots - 35a^3 + 15a^2 + 55a - 25 \end{array} \right. \\ \hline 2^{\text{e}} \text{ reste } \dots \quad 0 \end{array}$$

29. Il peut arriver que l'un des polynômes proposés, ou tous les deux, renferment plusieurs termes affectés d'une même puissance de la lettre par rapport à laquelle on veut ordonner.

Comment doit-on, dans ce cas, disposer les polynômes et effectuer la division ?

Soit à diviser

$$\begin{array}{r} 11a^2b - 19abc + 10a^3 - 15a^2c + 3ab^2 + 15bc^2 - 5b^2c \\ \text{par } 5a^2 + 3ab - 5bc. \end{array}$$

On remarque que les deux termes  $11a^2b - 15a^2c$  peuvent être mis sous la forme

$$(11b - 15c)a^2, \text{ ou } \begin{array}{r} 11b \\ -15c \end{array} \left| a^2, \right.$$

en écrivant une seule fois la puissance  $a^2$ , et plaçant à gauche, dans une même colonne verticale, l'ensemble des quantités qui multiplient cette puissance ; ce polynôme multiplicateur s'appelle alors le coefficient de  $a^2$ .



[Cette seconde manière de réunir les termes affectés d'une même puissance, est préférable à la première, sous deux rapports : 1°. parce que, s'il y a beaucoup de termes dans le dividende et le diviseur, on a de la peine à les faire tous tenir sur la même ligne horizontale; 2°. parce que, comme le coefficient de chaque puissance doit être lui-même ordonné par rapport à une seconde lettre, on est obligé, si le premier terme est soustractif, de faire éprouver aux termes une modification qui peut induire en erreur, lorsqu'on emploie la première manière. Soit, par exemple, l'expression  $-15b^2a^2 + 7bca^2 - 8c^2a^2$ , la modification consiste à mettre cette expression sous la forme

$$-(15b^2 - 7bc + 8c^2) a^2 \dots (n^o 15);$$

au lieu que par la seconde, on l'écrit ainsi :  $-15b^2a^2$ ; et de

$$\begin{array}{r} + 7bc \\ - 8c^2 \end{array} \left| \begin{array}{l} a^2 \\ \end{array} \right.$$

cette manière, on a l'avantage de conserver à chaque terme le signe dont il était d'abord affecté.]

Pareillement,  $-19abc + 3ab^2$  s'écrit :  $+ 3b^2 \left| \begin{array}{l} a \\ -19bc \end{array} \right.$

Cela posé, voici comment on effectuera l'opération :

$$\begin{array}{r} 10a^3 + 11b \left| \begin{array}{l} a^2 + 3b^2 \\ -15c \end{array} \right| \begin{array}{l} a - 5b^2c + 15bc^2 \\ \end{array} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 10a^3 + 11b \\ -15c \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 5a^2 + 3ba - 5bc \\ 2a + b - 3c \end{array}$$


---


$$\begin{array}{r} 1^{er} \text{ reste... } 5b \left| \begin{array}{l} a^2 + 3b^2 \\ -15c \end{array} \right| \begin{array}{l} a - 5b^2c + 15bc^2 \\ \end{array} \end{array}$$


---


$$2^{e} \text{ reste... } 0$$

Divisant d'abord  $10a^3$  par  $5a^2$ , on a  $2a$  pour quotient.

Retranchant le produit du diviseur par  $2a$ , on obtient un premier reste. Divisant la partie affectée de  $a^2$  dans ce reste par  $5a^2$ , il vient pour quotient  $b - 3c$ . Multipliant successivement chaque partie du diviseur par  $b - 3c$ , et retranchant

3..

chaque produit, on a pour résultat 0. Donc  $2a + b - 3c$  est le quotient demandé.

Pour nous rendre compte d'une manière générale du cas précédent, qui est le plus compliqué de la division, désignons le dividende par  $Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E$ , et le diviseur par  $A'a^2 + B'a + C'$ .

[C'est un usage en Algèbre, lorsqu'il doit entrer dans une question un grand nombre de quantités, d'en désigner d'abord un certain nombre par des lettres différentes; et, pour ne pas trop multiplier le nombre des lettres, de désigner les autres par les mêmes lettres accentuées. Les accents '...'' se prononcent *prime*, *seconde*, *tierce*.]

Dans ces deux polynômes, chacun des coefficients  $A, B, C, D, E, A', B', C'$ , désigne l'assemblage de plusieurs termes. Ainsi  $Aa^4$  représente toute la partie du dividende affectée de  $a^4$ , et ainsi des autres. Cela posé, puisque le plus haut exposant de  $a$  est 4 dans le dividende et 2 dans le diviseur, il doit aussi être égal à 2 dans le quotient, qui est alors de la forme  $A''a^2 + B''a + C''$ . Pour déterminer la partie de ce quotient affectée de la plus haute puissance, on remarque que le produit des deux parties  $A'a^2$  et  $A''a^2$ , ne peut éprouver aucune réduction avec les autres produits du diviseur par le quotient, et par conséquent doit être égal à la partie  $Aa^4$  du dividende, affectée de la plus haute puissance. Donc réciproquement, si l'on divise  $Aa^4$  par  $A'a^2$ , on doit avoir la partie  $A''a^2$  du quotient; cela revient à diviser  $A$  par  $A'$ , puisque  $a^4$  divisé par  $a^2$  donne  $a^2$ . Si  $A$  et  $A'$  sont eux-mêmes des polynômes composés d'une ou de plusieurs lettres, on agit sur eux comme il a été dit précédemment, ce qui exige qu'on ordonne d'abord les deux polynômes par rapport à l'une des lettres qui y entrent. Voilà pourquoi nous avons dit plus haut qu'en écrivant les termes affectés d'une même puissance dans une colonne, il faut avoir soin de les ordonner par rapport à une seconde lettre; on les ordonnerait même par rapport à une troisième lettre, si plusieurs termes d'une colonne renfermaient un même exposant de la seconde lettre.

La partie  $A^{\circ}a^3$  étant obtenue, on multiplie chacune des parties du diviseur par  $A^{\circ}a^3$ , et on retranche au fur et à mesure les produits partiels qu'on obtient, ce qui donne un premier reste sur lequel on opère comme sur le dividende proposé.

Voici deux nouveaux exemples du cas qui nous occupe. (On a eu soin d'y joindre les divisions partielles que nécessite l'opération principale.)

$$\begin{array}{r|l|l|l}
 12b^3 & a^3 + 23b^3 & a^3 + 10b^4 & a \\
 - 29bc & - 31b^3c & - 6b^3c^2 & \\
 + 15c^3 & - 9bc^2 & & \\
 \hline
 & + 15b^3 & a^3 + 10b^4 & a \\
 & - 25b^3c & - 6b^3c^2 & \\
 & - 9bc^2 & & \\
 & + 15c^3 & & \\
 \hline
 & 0 & & 
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{r|l}
 3b & a + 2b^3 \\
 - 5c & \\
 \hline
 4b & a^3 + 5b^3 \\
 - 3c & - 3c^3 \\
 \hline
 & 
 \end{array}$$

*Première Division partielle.*

$$\begin{array}{r|l}
 12b^3 - 29bc + 15c^3 & 3b - 5c \\
 - 9bc + 15c^3 & 4b - 3c \\
 \hline
 & 0
 \end{array}$$

*Deuxième Division partielle.*

$$\begin{array}{r|l}
 15b^3 - 25b^3c - 9bc^2 + 15c^3 & 3b - 5c \\
 - 9bc^2 + 15c^3 & 5b^3 - 3c^3 \\
 \hline
 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 2^o. 6b | a^4 - 7b^3 & a^3 - 3b^2 \\
 -10 | +23b & +22b^2 \\
 & -2 \\
 & -31b \\
 & +5 \\
 & -5 \\
 \hline
 -9b^3 & a^3 \\
 +27b & \\
 -20 & \\
 \hline
 +12b^3 & a^4 \\
 -23b & \\
 +5 & \\
 \hline
 +3b & a + b^3 - 2b \\
 -5 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 3b | a + b^3 - 2b \\
 -5 \\
 \hline
 2a^3 - 3b | a^3 + 4b^3 | a + 1 \\
 +4 \quad -1
 \end{array} \right\}$$

*Première Division partielle.*

$$\frac{6b - 10}{0} \bigg| \frac{3b - 5}{2}$$

*Deuxième Division partielle.*

$$\frac{-9b^3 + 27b - 20}{+12b - 20} \bigg) \frac{3b - 5}{-3b + 4}$$

*Troisième Division partielle.*

$$\frac{12b^3 - 23b + 5}{-3b + 5} \bigg) \frac{3b - 5}{4b - 1}$$

*Quatrième Division partielle.*

$$3b - 5 \bigg) \frac{3b - 5}{1}$$

30. Il existe un autre cas assez important dans la division algébrique; c'est celui où le polynôme dividende contient une ou plusieurs lettres que ne renferme pas le diviseur. On pourrait ordonner les deux polynômes par rapport à l'une des lettres communes, et faire la division comme à l'ordinaire. Mais il y a un moyen beaucoup plus simple d'obtenir le quotient.

Supposons, par exemple, que le dividende contienne diverses puissances de la lettre  $a$ , et que cette lettre n'entre pas dans le diviseur (on dit alors que celui-ci est *indépendant* de  $a$ ). En ordonnant le dividende par rapport à  $a$ , on peut le mettre sous la forme  $Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E$ ,  $A$  étant supposé le plus haut exposant de  $a$ , dans ce polynôme;  $A, B, C, D$ , sont des monômes ou polynômes qui ne renferment pas  $a$ . Soit d'ailleurs  $M$  le polynôme diviseur, indépendant de  $a$ .

Cela posé, puisque le diviseur multiplié par le quotient doit reproduire le dividende, et que le diviseur  $M$  ne contient pas  $a$ , il est clair que le quotient doit être un polynôme affecté des mêmes puissances de la lettre  $a$ , que celles qui se trouvent dans le dividende. Ainsi ce quotient est nécessairement de la forme  $A'a^4 + B'a^3 + C'a^2 + D'a + E'$ . Or, si l'on conçoit que ce quotient soit trouvé, et qu'on ait multiplié successivement le diviseur tout entier par chacune des parties  $A'a^4, B'a^3, C'a^2, \dots$ , les produits seront  $A'Ma^4, B'Ma^3, C'Ma^2, \dots$ ; et comme ils ne peuvent éprouver entre eux aucune réduction, puisque la lettre ordonnatrice  $y$  est affectée d'un exposant différent, ils doivent être respectivement égaux aux termes  $Aa^4, Ba^3, Ca^2, \dots$ , du dividende.

Ainsi l'on a

$$A'M = A, \text{ d'où } A' = A : M,$$

$$B'M = B, \text{ d'où } B' = B : M,$$

$$C'M = C, \text{ d'où } C' = C : M,$$

et ainsi de suite; d'où l'on déduit cette proposition générale:

*Pour qu'un polynôme ordonné par rapport à une certaine lettre, soit exactement divisible par un polynôme INDÉPEN-*

DANT de cette lettre, il faut que chacun des coefficients des diverses puissances du premier polynome soit exactement divisible par le second. Les coefficients des diverses puissances de la lettre dans le quotient, ne sont autre chose que les quotiens successifs de la division des coefficients du polynome dividende par le polynome diviseur.

Soit à diviser le polynome

$$3a^2b^3 - 3abc^3 - 2b^3c^2 + b^5 - 3a^2bc^2 + 3ab^3c - a^2c^3 + bc^4 + a^2b^2c$$

par  $b^2 - c^2$ .

Le dividende ordonné par rapport à  $a$ , peut être mis sous la forme  $(3b^3 + b^2c - 3bc^2 - c^3)a^2 + (3b^3c - 3bc^3)a + b^5 - 2b^3c^2 + bc^4$ ; effectuant les trois divisions partielles marquées par

$$\frac{3b^3 + b^2c - 3bc^2 - c^3}{b^2 - c^2}, \quad \frac{3b^3c - 3bc^3}{b^2 - c^2}, \quad \frac{b^5 - 2b^3c^2 + bc^4}{b^2 - c^2},$$

on trouve pour quotiens,  $3b + c$ ,  $3bc$ ,  $b^3 - bc^2$ ; ainsi l'on a pour le quotient total,  $(3b + c)a^2 + 3bca + b^3 - bc^2$ .

Les deux derniers quotiens  $3bc$  et  $b^3 - bc^2$  peuvent s'obtenir plus aisément que par le procédé ordinaire, si l'on observe, 1°. que  $3b^3c - 3bc^3$  équivaut (n° 21) à  $3bc(b^2 - c^2)$ ; 2°. que  $b^5 - 2b^3c^2 + bc^4$  équivaut à  $b(b^4 - 2b^2c^2 + c^4)$ , ou  $b(b^2 - c^2)^2$ , (n° 19).

Nous observerons, à ce sujet, que s'il existe des règles générales pour effectuer toutes les opérations, ces règles peuvent souvent être simplifiées, et il ne faut jamais négliger d'employer ces simplifications, lorsque l'occasion s'en présente. On ne s'en conforme que mieux à l'esprit du langage algébrique.

31. Parmi les différens exemples de division algébrique, il en est un remarquable par ses applications, et qui se rencontre si souvent dans la résolution des questions, que les Algébristes en ont fait une espèce de *théorème*. On a vu (n° 5 et 19) que  $(a + b)(a - b)$  donne pour produit  $a^2 - b^2$ ; donc, réciproquement  $a^2 - b^2$ , divisé par  $a - b$ , donne  $a + b$  pour quotient.

En divisant également  $a^3 - b^3$  par  $a - b$ , on trouve un quotient exact et égal à  $a^2 + ab + b^2$ .

De même,  $a^4 - b^4$  divisé par  $a - b$ , donne pour quotient  $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ .

Ces sont des résultats qu'on peut obtenir en suivant le procédé ordinaire de la division; et l'analogie porte à conclure que, quelque grand que soit l'exposant qui affecte les deux lettres  $a$  et  $b$ , la division se fait encore exactement; mais l'analogie n'est pas une certitude rigoureuse. Pour acquérir cette certitude, désignons par  $m$  l'exposant, et essayons la division de  $a^m - b^m$  par  $a - b$ .

$$1^{\text{er}} \text{ reste. } \dots \dots \frac{a^m - b^m}{+ a^{m-1}b - b^m} \left\{ \frac{a - b}{a^{m-1}} \right\},$$

$$\text{ou bien, } b(a^{m-1} - b^{m-1}).$$

Divisant d'abord  $a^m$  par  $a$ , on a pour quotient  $a^{m-1}$ , d'après la règle des exposans (n° 22). Le produit de  $a - b$  par  $a^{m-1}$  étant soustrait du dividende, on a pour premier reste  $a^{m-1}b - b^m$ , expression qu'on peut mettre sous la forme  $b(a^{m-1} - b^{m-1})$ . D'où l'on voit que, si l'on suppose  $a^{m-1} - b^{m-1}$  divisible exactement par  $a - b$ , il en est de même de  $a^m - b^m$ ; ce qui veut dire que, si la différence des puissances semblables d'un certain degré de deux quantités, est divisible exactement par la différence de ces mêmes quantités, la différence des puissances d'un degré plus grand d'une unité, est aussi divisible. Or,  $\frac{a^3 - b^3}{a - b}$  donne un quotient exact et égal à  $a^2 + b$ ; donc  $\frac{a^3 - b^3}{a - b}$

donne un quotient exact et égal à  $a^2 + b \frac{(a^3 - b^3)}{a - b}$ , ou. . . . .

$$a^3 + b(a + b), \text{ ou bien encore, } a^3 + ab + b^2.$$

Pareillement,  $\frac{a^4 - b^4}{a - b}$  donne un quotient exact et égal à  $a^3 + b \frac{(a^4 - b^4)}{a - b}$ , ou  $a^3 + b(a^2 + ab + b^2)$ , ou  $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ ;

et en général,  $\frac{a^m - b^m}{a - b}$  donne un quotient exact et égal à  $a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}$ .

L'exactitude de cette proposition se vérifie *a posteriori*, en

effectuant la multiplication

$$(a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1})(a - b).$$

On reconnaît que les produits partiels  $a^m$  et  $-b^m$  sont les seuls qui ne se détruisent pas dans la réduction. Par exemple, en multipliant  $a^{m-2}b$  par  $a$ , on trouve pour produit  $a^{m-1}b$ ; mais si l'on multiplie  $a^{m-1}$  par  $-b$ , il vient pour produit  $-a^{m-1}b$ , terme qui détruit le précédent. Il en est de même des autres termes.

Nous engageons les commençans à réfléchir sur le moyen de démonstration précédent, qui est assez souvent employé en Algèbre.

• 32. Nous avons donné (n° 23, 26), les caractères principaux auxquels on reconnaît qu'une division de quantités monomes ou polynomes n'est pas exacte, c'est-à-dire, les cas dans lesquels il n'existe pas de troisième quantité algébrique entière qui, multipliée par la seconde, reproduise la première.

Nous ajouterons, quant aux polynomes, que souvent on reconnaît, à leur inspection seule, qu'ils ne peuvent être divisibles l'un par l'autre. Lorsque ces polynomes renferment deux ou plusieurs lettres, il faut, avant d'ordonner par rapport à l'une d'elles en particulier, jeter un coup d'œil sur les deux termes du dividende et du diviseur, affectés du plus haut exposant de chacune des lettres. Si, pour une de ces lettres, les termes du plus haut exposant ne sont pas divisibles l'un par l'autre, on peut conclure que la division totale est impossible. Cette remarque doit se répéter dans chacune des opérations que comporte le procédé.

Soit, par exemple,  $12a^3 - 5a^2b + 7ab^2 - 11b^3$  à diviser par  $4a^2 - 8ab + 3b^2$ . Si l'on a égard à la lettre  $a$ , la division paraît possible; mais eu égard à la lettre  $b$ , la division est impossible, puisque  $-11b^3$  n'est pas divisible par  $3b^2$ .

Nous terminerons par les considérations suivantes:

1°. Un polynome ne peut jamais être divisible par un autre polynome renfermant une lettre qui ne se trouve pas dans le dividende; car il est impossible qu'une troisième quantité,



multipliée par une seconde, dépendante d'une lettre, donne un produit indépendant de cette lettre.

2°. Un monome n'est jamais divisible par un polynome, parce que (n° 18) tout polynome multiplié par un autre, donne au produit au moins deux termes qui ne se réduisent pas.

3°. Un polynome ne peut être divisible par un monome, qu'autant que celui-ci divise exactement chacun des termes du dividende, et le quotient s'obtient en mettant en évidence le facteur commun à tous les termes.

## § II. Des Fractions algébriques ou littérales.

### *Du plus grand commun diviseur.*

33. Les fractions algébriques doivent offrir à l'esprit la même acception que les fractions arithmétiques, telles que  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{11}{12}$ ...

c'est-à-dire qu'il faut concevoir qu'on ait divisé l'unité en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le dénominateur (le dénominateur pouvant d'ailleurs être un monome ou un polynome), et qu'on prenne une de ces parties autant de fois qu'il y a d'unités dans le numérateur. Dès lors, l'addition, la soustraction, la multiplication et la division, doivent s'effectuer suivant les règles établies en Arithmétique pour le calcul des fractions. Toutefois, on doit se conformer, dans les applications de ces règles, aux procédés indiqués précédemment pour le calcul des quantités algébriques entières, monomes ou polynomes. Ainsi, il serait superflu de s'y arrêter; nous aurons, par la suite, assez d'occasions de nous familiariser avec ces règles.

*La réduction des fractions algébriques à leur plus simple expression*, mérite néanmoins quelques développemens particuliers.

Lorsqu'une division de quantités monomes ne peut s'effectuer exactement, on l'indique à l'aide du signe connu, et dans ce cas, le quotient se présente sous la forme d'une frac-

tion que nous avons déjà appris à simplifier (n° 23). Quant aux expressions fractionnaires polynômes, voici quelques cas dans lesquels il est aisé de les réduire.

Soit, pour premier exemple, l'expression  $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$ .

On remarque que cette fraction peut (n° 19) être mise sous la forme  $\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}$ ; supprimant le facteur  $a-b$  commun aux deux termes, on obtient pour résultat...  $\frac{a+b}{a-b}$ .

Soit encore l'expression  $\frac{5a^3 - 10a^2b + 5ab^2}{8a^3 - 8a^2b}$ .

Cette expression se décompose ainsi :

$$\frac{5a(a^2 - 2ab + b^2)}{8a^2(a-b)}, \text{ ou bien, } \frac{5a(a-b)^2}{8a^2(a-b)};$$

supprimant le facteur commun  $a(a-b)$ , on trouve pour résultat...  $\frac{5(a-b)}{8a}$ .

Les cas particuliers que nous venons d'examiner sont ceux où les deux termes de la fraction sont décomposables dans le produit de la somme par la différence de deux quantités, dans le carré de la somme ou de la différence de deux quantités; et l'habitude du calcul apprend à opérer ces décompositions, lorsqu'elles sont possibles.

Mais les deux termes de la fraction peuvent être des polynômes plus compliqués, et alors leur décomposition en facteurs n'étant plus aussi facile, on doit avoir recours au procédé du plus grand commun diviseur.

Cette théorie, intimement liée à celle des équations, ne laisse pas de présenter quelques difficultés. Aussi notre intention est-elle de n'en donner ici qu'une partie, sauf à y revenir plus loin, et lorsque nous aurons acquis les matériaux nécessaires pour l'établir d'une manière complète et rigoureuse.

*Théorie élémentaire du plus grand commun Diviseur  
algébrique.*

34. *Le plus grand commun diviseur de deux polynomes est le polynome le plus grand par rapport aux exposans et aux coefficients, qui divise exactement les deux polynomes proposés.*

La propriété caractéristique du plus grand commun diviseur est que, si l'on divise les deux polynomes proposés par leur plus grand commun diviseur, les quotiens qui en résultent sont *premiers entre eux*, c'est-à-dire, ne renferment plus aucun facteur commun.

Cette proposition est évidente; car soient A et B les polynomes donnés, D leur plus grand commun diviseur, A' et B' les quotiens, on a nécessairement

$$A = A' \times D \quad \text{et} \quad B = B' \times D.$$

Or, si A' et B' avaient encore un facteur commun d', il s'ensuivrait que d' × D serait un diviseur commun aux deux polynomes et plus grand que D, soit par rapport aux exposans, soit par rapport aux coefficients; ce qui serait contre la définition de D.

35. On a vu en Arithmétique, 1°. *Que le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers contient comme facteurs tous les diviseurs particuliers communs aux deux nombres, et ne peut pas renfermer d'autres facteurs;*

2°. *Que le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers est le même que celui qui existe entre le plus petit nombre et le reste de leur division.*

La théorie du plus grand commun diviseur algébrique repose également sur ces deux principes, pour la démonstration desquels nous renvoyons au septième chapitre.

Ceci admis, supposons d'abord qu'il s'agisse de trouver le plus grand commun diviseur entre les deux polynomes

$$a^3 - a^2b + 3ab^2 - 3b^3 \quad \text{et} \quad a^2 - 5ab + 4b^2.$$

*Première opération.*

$$\frac{a^3 - a^2b + 3ab^2 - 3b^3}{+ 4a^2b - ab^2 - 3b^3} \Bigg\} \frac{a^2 - 5ab + 4b^2}{a + 4b \dots\dots}$$

$$\text{ou bien, } \frac{19ab^2 - 19b^3}{19b^2(a-b)}$$

*Deuxième opération.*

$$\frac{a^2 - 5ab + 4b^2}{- 4ab + 4b^2} \Bigg\} \frac{a - b}{a - 4b}$$

0

ce qui donne  $a - b$  pour le plus grand commun diviseur.

Commençons par diviser le polynome de plus haut degré par le polynome de plus faible degré; le quotient est, comme on le voit dans le tableau ci-dessus,  $a + 4b$ ; et l'on obtient pour reste....  $19ab^2 - 19b^3$ .

Il résulte du second principe, que le plus grand commun diviseur cherché est le même que celui qui existe entre ce reste et le polynome qui a servi de diviseur.

Mais  $19ab^2 - 19b^3$  pouvant être mis sous la forme  $19b^2(a - b)$ , on voit que le facteur  $19b^2$  divise ce reste sans diviser....  $a^2 - 5ab + 4b^2$ ; donc, en vertu du premier principe, ce facteur ne peut entrer dans leur plus grand commun diviseur; ainsi l'on peut, sans inconvénient, le supprimer, et la question est ramenée à chercher le plus grand commun diviseur entre  $a^2 - 5ab + b^2$  et  $a - b$ .

Divisant maintenant le premier de ces deux polynomes par le second, on a pour quotient exact,  $a - 4b$ ; donc  $a - b$  est leur plus grand commun diviseur, et par conséquent, c'est aussi le plus grand commun diviseur des deux polynomes proposés.

Reprenons le même exemple, en ordonnant les deux polynomes par rapport à  $b$ ,

$$- 3b^3 + 3ab^2 - a^2b + a^3 \quad \text{et} \quad 4b^2 - 5ab + a^2.$$

*Première opération.*

$$\begin{array}{r}
 -12b^3 + 12ab^2 - 4a^2b + 4a^3 \quad \} \quad 4b^3 - 5ab + a^2 \\
 \underline{-3ab^2 - a^2b + 4a^3} \quad \} \quad -3b \quad , \quad -3a \\
 -12ab^2 - 4a^2b + 16a^3 \\
 \underline{-19a^2b + 19a^3} \\
 \text{ou bien, } 19a^2(-b + a)
 \end{array}$$

*Deuxième opération.*

$$\begin{array}{r}
 4b^3 - 5ab + a^2 \quad \} \quad -b + a \\
 \underline{-ab + a^2} \quad \} \quad -4b + a \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

ce qui donne  $-b + a$  ou  $a - b$  pour le plus grand commun diviseur.

Au premier abord, on est embarrassé pour faire la division des deux polynômes, parce que le premier terme  $-3b^3$  du dividende n'est pas divisible par le premier terme  $4b^3$  du diviseur. Mais si l'on observe que le coefficient 4 de celui-ci n'est pas facteur de tous les termes de  $4b^3 - 5ab + a^2$ , et qu'ainsi, en vertu du premier principe, 4 ne saurait faire partie du plus grand commun diviseur, on peut, sans aucun inconvénient, introduire ce facteur dans le dividende, ce qui donne  $-12b^3 + 12ab^2 - 4a^2b + 4a^3$ ; et alors la division des deux premiers termes devient possible.

Effectuant cette division, on trouve pour quotient  $-3b$ , et pour reste,  $-3ab^2 - a^2b + 4a^3$ .

Comme dans ce reste, l'exposant de  $b$  est encore égal à celui du diviseur, rien n'empêche de continuer la division, en multipliant de nouveau ce reste par 4, afin de rendre possible la division des deux premiers termes.

Cette préparation faite, il vient  $-12ab^2 - 4a^2b + 16a^3$ , qui, divisé par  $4b^3 - 5ab + a^2$ , donne pour quotient  $-3a$  (qu'on séparera du premier par une virgule, comme n'ayant aucune liaison avec lui), et pour reste,  $-19a^2b + 19a^3$ .

Ce dernier reste pouvant se mettre sous la forme.....  
 $19a^2(-b+a)$ , on supprime le facteur  $19a^2$ , comme ne faisant pas partie du plus grand commun diviseur; et la question est ramenée à chercher le plus grand commun diviseur entre  $4b^2 - 5ab + a^2$  et  $-b+a$ .

Divisant ces deux polynomes l'un par l'autre, on trouve pour quotient exact,  $-4b+a$ ; donc  $-b+a$  ou  $a-b$  est le plus grand commun diviseur cherché.

36. Dans ce même exemple, comme dans tous ceux où l'exposant de la lettre principale est plus grand d'une unité dans le dividende que dans le diviseur, on peut abrégér l'opération en multipliant tout de suite le dividende par le carré du coefficient du premier terme du diviseur. On conçoit en effet que, par ce moyen, le premier quotient partiel qu'on obtient, doit renfermer ce coefficient à la première puissance. Multipliant le diviseur par le quotient, et faisant la réduction avec le dividende ainsi préparé, on a un résultat qui doit encore contenir le coefficient comme facteur, et la division peut se continuer jusqu'à ce qu'on obtienne un reste de plus faible degré que le diviseur, par rapport à la lettre principale.

Voici le tableau des opérations:

*Première opération.*

Multiplication par 16, ou par le carré de 4.

$$\begin{array}{r} -48b^2 + 48ab - 16a^2b + 16a^3 \\ \quad -12ab^2 - 4a^2b + 16a^3 \\ \hline 1^{\text{er}} \text{ reste.... } -19a^2b + 19a^3 \\ \text{ou bien, } \quad 19a^2(-b+a) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \frac{4b^2 - 5ab + a^2}{12b - 3a}$$

*Deuxième opération.*

$$\begin{array}{r} 4b^2 - 5ab + a^2 \\ - ab + a^2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \frac{-b+a}{-4b+a}$$

*N. B.* Si l'exposant de la lettre principale dans le dividende

surpassait de deux, trois unités l'exposant de la même lettre dans le diviseur, il faudrait multiplier le dividende par la troisième ou la quatrième puissance du coefficient du premier terme du diviseur. Cela est aisé à concevoir.

37. Soient, pour second exemple,

$$15a^3 + 10a^2b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 - 3ab^4$$

et  $12a^2b^2 + 38a^2b^3 + 16ab^4 - 10b^5.$

Avant de procéder à la division de ces deux polynômes, commençons par observer que le premier contient  $a$  comme facteur commun dans tous ses termes; et puisque ce facteur n'entre pas dans le second polynôme, on peut le supprimer, comme ne faisant pas partie du commun diviseur.

Par la même raison, le facteur  $2b^2$  commun à tous les termes du second polynôme et n'entrant pas dans le premier, peut être supprimé. Ainsi la question est ramenée à rechercher le plus grand commun diviseur entre les polynômes

$$15a^4 + 10a^3b + 4a^2b^2 + 6ab^3 - 3b^4$$

et  $6a^3 + 19a^2b + 8ab^2 - 5b^3.$

*Première Opération.*

$$\begin{array}{r} 30a^4 + 20a^3b + 8a^2b^2 + 12ab^3 - 6b^4 \quad \} 6a^3 + 19a^2b + 8ab^2 - 5b^3 \\ - 75a^4b - 32a^3b^2 + 37ab^3 - 6b^4 \quad \} 5a, -25b \\ \hline -150a^3b - 64a^2b^2 + 74ab^3 - 12b^4 \end{array}$$

$$+ 411a^2b^2 + 274ab^3 - 137b^4;$$

ou bien,  $137b^2(3a^2 + 2ab - b^2).$

*Deuxième Opération.*

$$\begin{array}{r} 6a^3 + 19a^2b + 8ab^2 - 5b^3 \quad \} 3a^2 + 2ab - b^2 \\ + 15a^3b + 10a^2b^2 - 5b^3 \quad \} 2a + 5b \\ \hline 0 \end{array}$$

Donc  $3a^2 + 2ab - b^2$  est le plus grand commun diviseur.

En suivant la même méthode que dans l'exemple précédent, il faudrait multiplier tout le dividende par le coefficient 6, du premier terme du diviseur, ou plutôt par le carré de 6; mais comme 15 et 6 ont un facteur commun 3, il suffit évidemment

de multiplier tout le dividende par 2, facteur de 6, qui n'entre pas dans 15.

Cette préparation faite, on effectue la division, ce qui donne d'abord un reste dont le 1<sup>er</sup> terme est  $-75a^3b$ . Comme 75 contient encore le facteur 3 qui entre dans 6, il suffit de multiplier ce reste par 2, pour continuer la division qui, étant effectuée, donne pour 1<sup>er</sup> *reste principal*,  $411a^3b^2 + 274ab^3 - 137b^4$ .

Or, il est facile de reconnaître que, dans ce reste, il existe un facteur commun  $137b^2$ ; et puisque ce facteur n'entre pas dans le second polynome, on peut le supprimer, comme ne faisant pas partie du commun diviseur; et la question est ramenée à rechercher le plus grand commun diviseur entre les polynomes

$$6a^3 + 19a^2b + 8ab^2 - 5b^3.$$

et

$$3a^2 + 2ab - b^2.$$

Effectuant la division de ces deux polynomes, on trouve pour quotient exact,  $2a + 5b$ ; ainsi le reste  $3a^2 + 2ab - b^2$  est le plus grand commun diviseur cherché.

38. *Remarque.* On pourrait demander si les suppressions qu'on opère dans le cours du calcul, de facteurs communs à tous les termes de l'un des restes, n'ont pour objet que de simplifier les calculs, ou bien, si ce sont des *opérations indispensables*. Or, on peut aisément reconnaître que ces suppressions sont nécessaires; car, si, dans l'exemple précédent, on ne supprimait pas le facteur  $137b^2$ , il faudrait, pour rendre possible la division du premier terme du nouveau dividende par le premier terme du diviseur, multiplier tout le dividende par  $137b^2$ ; mais alors, on introduirait dans le dividende un facteur qui se trouverait aussi dans le diviseur; d'où il résulterait que le plus grand commun diviseur cherché se compliquerait du facteur  $137b^2$  qui ne devait pas d'abord en faire partie.

L'exemple suivant est propre à confirmer ce qui vient d'être dit.

39. Soit à trouver le plus grand commun diviseur entre les deux polynomes



et 
$$\begin{aligned} ab + 2a^2 - 3b^2 + 4bc - ac - c^2 \\ 9ac + 2a^2 - 5ab + 4c^2 + 8bc - 12b^2 \end{aligned}$$

*Première Opération.*

$$\begin{array}{r|l} 2a^2 + b & a - 3b^2 \\ -c & -4bc \\ & -c^2 \end{array} \left\{ \begin{array}{r|l} 2a^2 - 5b & a - 12b^2 \\ + 9c & + 8bc \\ & + 4c^2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r|l} 6b & a + 9b^2 \\ -10c & -12bc \\ & -5c^2 \end{array}$$

ou bien,  $(3b - 5c)(2a + 3b + c).$

*Deuxième Opération.*

$$\begin{array}{r|l} 2a^2 - 5b & a - 12b^2 \\ + 9c & + 8bc \\ & + 4c^2 \end{array} \left\{ \begin{array}{r|l} 2a^2 + 3b + c & \\ & a - 4b \\ & + 4c \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r|l} -8b & a - 12b^2 \\ + 8c & + 8bc \\ & + 4c^2 \end{array}$$

0

Donc  $2a + 3b + c$  est le plus grand commun diviseur.

Après avoir ordonné les deux polynômes, on peut, sans aucune préparation, effectuer leur division, ce qui donne pour premier reste,

$$\begin{array}{r|l} 6b & a + 9b^2 \\ -10c & -12bc \\ & -5c^2 \end{array}$$

Pour continuer l'opération, il faudrait, en prenant le second polynôme pour dividende et ce reste pour diviseur, multiplier le nouveau dividende par  $6b - 10c$ , ou simplement, par  $3b - 5c$ ,

4..

parce que le facteur 2 entre déjà dans le 1<sup>er</sup> terme du dividende; mais avant d'effectuer cette multiplication, voyons si ce facteur  $3b - 5c$ , ne diviserait pas le second terme du reste, savoir:  $9b^2 - 12bc - 5c^2$ . Or, cette division réussit et donne pour quotient exact,  $3b + c$ ; d'où il suit que le reste peut se mettre sous la forme....  $(3b - 5c)(2a + 3b + c)$ .

Comme le facteur  $3b - 5c$  se trouve dans ce reste, et n'entre pas dans le nouveau dividende [puisque ce facteur étant indépendant de la lettre  $a$ , devrait (n° 30) se trouver entre les coefficients des diverses puissances de cette lettre, ce qui n'est pas], on peut, sans aucun inconvénient, supprimer ce facteur.

Cette suppression est d'ailleurs indispensable, parce qu'autrement, on devrait introduire ce facteur dans le dividende; et alors, les deux polynomes contenant un facteur commun qu'ils n'avaient pas auparavant, le plus grand commun diviseur serait changé; il se compliquerait du facteur  $3b - 5c$ , qui ne devait pas en faire partie.

La suppression faite, on effectue la nouvelle division, ce qui donne un quotient exact; donc  $2a + 3b + c$ , est le plus grand commun diviseur.

40. Nous proposerons, pour dernier exemple; de trouver le plus grand commun diviseur entre les deux polynomes

$$a^4 + 3a^3b + 4a^2b^2 - 6ab^3 + 2b^4$$

et  $4a^3b + 2ab^3 - 2b^3,$

ou simplement,  $2a^3 + ab - b^3$ , puisque le facteur  $2b$  peut être supprimé dans le second polynome.

*Première Opération.*

$$\begin{array}{r} 8a^4 + 24a^3b + 32a^2b^2 - 48ab^3 + 16b^4 \\ + 20a^3b + 36a^2b^2 - 48ab^3 + 16b^4 \\ \hline + 26a^2b^2 - 38ab^3 + 16b^4 \\ \hline - 51ab^3 + 29b^4 \\ \hline - b^3(51 - 29b) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 2a^3 + ab - b^3 \\ 4a^3 + 10ab + 13b^3 \end{array} \right\}$$

ou bien

$$-b^3(51 - 29b).$$

*Deuxième Opération.*

Multiplication par 2601, carré de 51.

$$\begin{array}{r}
 5202a^3 + 2601ab - 2601b^3 \\
 - 5202a^3 + 2958ab \\
 \hline
 + 5559ab - 2601b^3 \\
 - 5559ab + 3161b^3 \\
 \hline
 2^\circ \text{ reste...} \quad + 560b^3
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 5202a^3 + 2601ab - 2601b^3 \\ - 5202a^3 + 2958ab \\ + 5559ab - 2601b^3 \\ - 5559ab + 3161b^3 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 51a - 29b \\ 102a + 109b \end{array}$$

L'exposant de la lettre  $a$  dans le dividende, surpassant de deux unités celui de la même lettre dans le diviseur, on multiplie tout le dividende par le cube de 2, c'est-à-dire par 8. Cette préparation faite, on effectue trois divisions consécutives, et l'on obtient pour premier reste principal,  $-51ab^3 + 29b^4$ . Supprimant le facteur  $b^3$  dans ce reste, on a pour nouveau diviseur,  $-51a + 29b$ , ou changeant les signes, ce qui est permis,  $51a - 29b$ ; le nouveau dividende est d'ailleurs  $2a^3 + ab - b^3$ .

Multipliant ce dividende par le carré de 51, ou par 2601, puis effectuant la division, on obtient pour 2<sup>e</sup> reste principal,  $+560b^3$ ; ce qui démontre que les deux polynômes proposés sont premiers entre eux, c'est-à-dire n'ont aucun facteur commun. En effet, il résulte du second principe (n° 35), que le plus grand commun diviseur doit se trouver comme facteur dans le reste de chaque opération; ainsi, il devrait diviser le reste  $560b^3$ ; mais ce reste est indépendant de la lettre principale  $a$ ; donc, si les deux polynômes pouvaient avoir un commun diviseur, il devrait être indépendant de  $a$ , et par conséquent (n° 30), se trouver comme facteur dans les coefficients des diverses puissances de cette lettre; que renferme chacun des deux polynômes proposés, ce qui n'a évidemment pas lieu.

Ces exemples suffisent pour mettre les commençans au fait de la marche qu'il faut suivre pour trouver le plus grand commun diviseur de deux polynômes.

41. RÈGLE GÉNÉRALE. On commence par supprimer dans les deux polynômes les facteurs monomes communs à tous les termes de chacun d'eux. (Il peut arriver que le facteur monome qui se trouve dans le dividende, et celui que renferme le diviseur,

aient eux-mêmes un diviseur commun; dans ce cas, on le met à part comme devant faire partie du commun diviseur cherché.) Cette suppression faite, on prépare le dividende de manière à rendre possible la division de son premier terme par celui du diviseur (Voyez n° 35 et 36); puis on effectue la division, ce qui donne un certain reste de degré moindre que le diviseur, dans lequel on supprime les facteurs monomes ou polynomes que peuvent renfermer les coefficients des diverses puissances de la lettre principale. On prend ensuite ce reste pour diviseur, le second polynome pour dividende, et l'on opère sur ces deux polynomes comme sur les précédents. On continue cette série d'opérations jusqu'à ce qu'on obtienne un reste qui divise exactement le reste précédent; auquel cas le reste diviseur est le plus grand commun diviseur, ou bien, jusqu'à ce qu'on obtienne un reste INDEPENDANT de la lettre principale, ce qui indique (n° 40) que les deux polynomes proposés sont PREMIERS ENTRE EUX, à moins qu'ils n'aient un facteur commun indépendant de la lettre, lequel facteur n'aurait pas été découvert dès le commencement de l'opération.

N. B. Il existe des cas où ce procédé n'est pas suffisant; mais nous y reviendrons par la suite.

Voici de nouveaux exemples auxquels on peut appliquer le procédé tel que nous venons de l'indiquer,

$$\begin{array}{l} 1^{\circ}. \quad qnp^3 + 3np^2q^2 - 2npq^3 - 2nq^4, \\ \text{et} \quad 2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^2q + 3mpq^2. \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1^{\circ}. \\ \text{et} \end{array}} \right\}$$

Le p. g. c. d. est  $p - q$ ;

$$\begin{array}{l} 2^{\circ}. \quad 36a^6 - 18a^5 - 27a^4 + 9a^3, \\ \text{et} \quad 27a^5b^4 - 18a^4b^5 - 9a^3b^6. \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2^{\circ}. \\ \text{et} \end{array}} \right\}$$

Le p. g. c. d. est  $9a^3(a - 1)$ .

La théorie des quatre premières opérations de l'Algèbre et celle du plus grand commun diviseur suffisent pour la résolution d'un très grand nombre de questions. Nous nous réservons d'établir plus loin de nouvelles règles, à mesure que nous en sentirons la nécessité, et nous allons passer de suite à la résolution des problèmes du premier degré.

---

CHAPITRE II.*Des Problèmes du premier degré.*

---

*Notions préliminaires sur les équations.*

42. On ne considère ordinairement en Algèbre que les problèmes dont les énoncés, traduits algébriquement, donnent lieu à des *équations*. En réfléchissant sur la résolution du problème (n° 3), on peut voir que cette résolution se compose de deux parties distinctes. Dans la première, on écrit algébriquement les relations que l'énoncé de la question établit entre les quantités connues et les quantités inconnues. On parvient ainsi à l'expression de deux quantités égales, que l'on appelle *équation*. Telle est (n° 3) l'expression  $2x + b = a$ . Dans la seconde partie, on déduit de l'équation du problème une suite d'autres équations, dont la dernière donne enfin la valeur de l'inconnue au moyen des quantités connues. Tel est le résultat  $x = \frac{a-b}{2}$ , auquel on est parvenu; c'est ce qu'on appelle *résoudre l'équation*.

Comme les règles à suivre pour mettre un problème en équation sont un peu vagues, nous commencerons par nous occuper de la seconde partie, qui est soumise à des règles fixes et invariables.

D'après la définition d'une *équation*, toute équation se compose de deux parties séparées l'une de l'autre par le signe  $=$ . La partie à gauche se nomme le *premier membre*, et la partie à droite, le *second membre*.

On considère plusieurs espèces d'égalités :

1°. L'égalité qui existe entre des nombres connus et donnés *a priori*, mais représentés par des lettres ; telles sont les égalités  $a - b = c - d$ ,  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , qui se vérifient immédiatement, si l'on mettrait à la place de  $a, b, c, d$ , les nombres particuliers pour lesquels on suppose que ces égalités existent. Elles conservent le nom d'égalités.

2°. L'égalité évidente d'elle-même, celle qui se vérifie dans son état actuel ; telles sont les égalités :

$$25 = 12 + 13, \quad 3a - 5b = a - b + 2a - 4b.$$

On les appelle *identités* ou *égalités vérifiées*.

3°. Enfin, l'égalité qui ne se vérifie qu'après qu'on y a substitué à la place d'une ou de quelques-unes des lettres désignant des inconnues, certains nombres dont les valeurs dépendent des nombres connus et donnés qui entrent déjà dans l'égalité.

Pour la distinguer des autres égalités, on la nomme *équation*, et c'est celle dont nous avons à nous occuper.

Il est encore une autre espèce d'égalité dont nous parlerons plus loin, c'est l'*équation identique*.

On partage les équations en différentes classes : celles où l'inconnue n'entre qu'à la première puissance, sont dites du *premier degré* ; telles sont les équations  $3x + 5 = 17 - 5x$ ,  $ax + b = cx + d$ .

L'équation  $2x^2 - 3x = 5 - 2x^2$ , est dite du 2<sup>e</sup> degré.

L'équation  $4x^3 - 5x^2 + x = 2x^3 + 11$ , est dite du 3<sup>e</sup> degré. En général, le *degré* d'une équation est le plus grand des exposants dont l'inconnue est affectée dans l'équation.

On distingue aussi les équations en *équations numériques* et en *équations littérales*. Les premières sont celles qui ne renferment que des nombres particuliers, à l'exception de l'inconnue, qui est toujours désignée par une lettre. Ainsi, . . . . .  
 $4x - 3 = 2x + 5$ ,  $3x^2 - x = 8$ , sont des équations numé-

riques. Elles sont la traduction algébrique de problèmes dont les données sont des nombres particuliers.

Les équations  $ax + b = cx + d$ ,  $ax^2 + bx = c$ , sont des équations littérales. Les données du problème sont représentées par des lettres. Il est d'usage, pour distinguer dans une équation les quantités connues des inconnues, de désigner celles-ci par les dernières lettres de l'alphabet,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , etc.

Ces notions établies, voyons comment une équation du premier degré à une seule inconnue étant donnée, on peut parvenir à la résoudre; c'est-à-dire à trouver pour l'inconnue un nombre qui, substitué à la place de cette inconnue dans l'équation, y satisfasse, ou bien rende le premier membre identiquement égal au second.

## § I. Équations du premier degré à une seule inconnue.

43. On doit regarder comme un principe commun à toutes les équations, qu'on peut, sans troubler une équation, 1°. ajouter à ses deux membres, ou en retrancher un même nombre; 2°. multiplier ou diviser ses deux membres par un même nombre; ce qui veut dire que, s'il y a d'abord égalité entre les deux membres, il y aura encore égalité, après les opérations dont on vient de parler.

Cela posé, voici deux transformations d'un usage continuel dans la résolution des équations.

*Première transformation.* Lorsque les deux membres d'une équation sont des polynomes entiers, il est souvent nécessaire de transposer certains termes d'un membre dans un autre.

Soit l'équation  $5x - 6 = 8 + 2x$ . Pour dégager  $x$  de cette équation, il faut tâcher de l'avoir seule dans le premier membre. Or, si l'on retranche, en premier lieu,  $2x$  des deux membres, l'égalité n'est pas troublée (d'après le principe précédent), et l'on a  $5x - 6 - 2x = 8$ . D'où l'on voit que le terme  $2x$ , qui était additif dans le second membre, devient soustractif dans le premier.

En second lieu, si l'on ajoute 6 aux deux membres, l'égalité n'est pas troublée, et l'on a

$$5x - 6 - 2x + 6 = 8 + 6,$$

ou, comme les deux termes  $-6$ ,  $+6$  se détruisent,

$$5x - 2x = 8 + 6.$$

Donc le terme qui était soustractif dans le premier membre, passe dans le second membre avec le signe de l'addition.

Soit encore l'équation  $ax + b = d - cx$ . Si l'on ajoute aux deux membres  $cx$ , et qu'on en retranche  $b$ , il vient

$$ax + b + cx - b = d - cx + cx - b,$$

ou réduisant,  $ax + cx = d - b$ .

Donc en général, lorsqu'on fait passer un terme d'un membre dans un autre, il faut changer son signe.

44. *Deuxième transformation.* Souvent encore, les termes d'une équation sont fractionnaires, et il faut la ramener à une autre qui n'ait que des termes entiers. Soit l'équation

$$\frac{2x}{3} - \frac{3}{4} = 11 + \frac{x}{5}.$$

Réduisons d'abord toutes les fractions à un même dénominateur, d'après le procédé connu; il vient  $\frac{40x}{60} - \frac{45}{60} = 11 + \frac{12x}{60}$ ; et, puisqu'on peut (n° 43) multiplier les deux membres par un même nombre, multiplions-les par 60, ce qui revient évidemment à supprimer le dénominateur 60 dans les termes fractionnaires, et à multiplier chaque terme entier par 60; on obtient

$$40x - 45 = 660 + 12x.$$

Remarquons, pour la pratique de cette opération, qu'on peut passer immédiatement de l'équation proposée à celle qu'on



vient d'obtenir, en se dispensant d'écrire le dénominateur commun, et ayant soin toutefois de multiplier chacun des termes entiers par ce dénominateur.

Soit, pour second exemple, l'équation

$$\frac{5x}{12} - \frac{4x}{3} - 13 = \frac{7}{8} - \frac{13x}{6}.$$

Les dénominateurs ont évidemment des facteurs communs, et le plus petit nombre, *multiple de ces dénominateurs*, est 24. (Voy. Arith., 4<sup>e</sup> édition, n° 152.) C'est donc à ce dénominateur qu'il faut réduire toutes les fractions.

Effectuant cette opération, et omettant le dénominateur commun 24, on trouve  $10x - 32x - 312 = 3 - 52x$ . (On a eu soin de multiplier le terme entier,  $-13$ , par 24.)

Cette équation est exacte, puisqu'après avoir réduit les fractions au même dénominateur, on a multiplié les deux membres par le même nombre 24.

Nous pouvons déduire de là cette règle générale: *Pour faire disparaître les dénominateurs d'une équation, commencez par former le multiple le plus simple possible de tous les dénominateurs. (Ce nombre est le produit de tous les dénominateurs, s'ils n'ont pas de facteurs communs.) Multipliez ensuite chaque terme, s'il est entier, par ce multiple, et, s'il est fractionnaire, par le quotient de ce multiple divisé par le dénominateur du terme sur lequel vous opérez, et omettez le dénominateur de ce terme.*

Nous engageons les commençans à se bien pénétrer de la règle que nous venons d'établir, parce qu'elle donne l'équation la plus simple possible, sans dénominateurs.

Soit, pour nouvelle application, l'équation littérale

$$\frac{ax}{b} - \frac{2c^2x}{ab} + 4a = \frac{4bc^2x}{a^2} - \frac{5a^3}{b^2} + \frac{2c^2}{a} - 3b.$$

Le multiple le plus simple de tous les dénominateurs est évidemment  $a^3b^2$ . Ainsi, multiplions chaque terme entier par

$a^3b^3$ , et chaque terme fractionnaire par le quotient de  $a^3b^3$ , divisé par le dénominateur de ce terme. Il vient, après ces opérations,

$$a^3bx - 2a^2bc^2x + 4a^3b^3 = 4b^3c^3x - 5a^5 + 2a^3b^3c^3 - 3a^3b^3.$$

45. Appliquons les principes précédents à la résolution de l'équation  $4x - 3 = 2x + 5$ .

Elle devient d'abord, par la transposition des termes,  $-3$  et  $2x$ ,

$$4x - 2x = 5 + 3, \text{ ou réduisant, } 2x = 8.$$

Divisant les deux membres par 2, on trouve enfin  $x = \frac{8}{2} = 4$ .

Et en effet, si l'on substitue 4 à la place de  $x$  dans l'équation, il vient  $4 \times 4 - 3 = 2 \times 4 + 5$ , ou  $13 = 13$ .

Soit, pour second exemple, l'équation traitée (n° 44),

$$\frac{5x}{12} - \frac{4x}{3} - 13 = \frac{7}{8} - \frac{13x}{6}.$$

On obtient d'abord, en chassant les dénominateurs,

$$10x - 32x - 312 = 21 - 52x.$$

Transposons les termes en  $x$  dans le premier membre, et les termes connus dans le second, l'équation devient

$$10x - 32x + 52x = 21 + 312, \text{ ou réduisant, } 30x = 333.$$

Divisant les deux membres par 30, on obtient  $x = \frac{333}{30} = \frac{111}{10}$ ; résultat qu'on vérifierait en remplaçant  $x$  par cette valeur dans l'équation proposée.

Soit encore l'équation  $(3a - x)(a - b) + 2ax = 4b(x + a)$ ; il faut d'abord effectuer les multiplications indiquées, afin de réduire les deux membres à deux polynômes et de pouvoir ainsi dégager l'inconnue  $x$ . Or, si l'on applique la règle établie (n° 17) pour la multiplication des polynômes, il vient

$3a^2 - ax - 3ab + bx + 2ax = 4bx + 4ab$ ; transposant et réduisant,  $ax - 3bx = 7ab - 3a^2$ . Observons maintenant que  $ax - 3bx$  est la même chose que  $(a - 3b)x$ , ce qui donne  $(a - 3b)x = 7ab - 3a^2$ . Divisant enfin les deux membres par  $a - 3b$ , on trouve

$$x = \frac{7ab - 3a^2}{a - 3b}.$$

En général, pour résoudre une équation du premier degré, quelque compliquée qu'elle soit, il faut, 1°. commencer par chasser les dénominateurs, s'il y en a, et effectuer, dans les deux membres de l'équation, toutes les opérations algébriques qui se présentent; on parvient ainsi à une équation dont les deux membres sont des polynômes entiers; 2°. transposer dans un même membre (c'est ordinairement le premier) tous les termes affectés de l'inconnue, et dans l'autre membre, les termes connus; 3°. réduire à un seul terme tous les termes affectés de  $x$ , si l'équation est numérique; et si l'équation est algébrique, former de tous ces termes un seul produit composé de deux facteurs, dont l'un soit  $x$ , et l'autre l'ensemble des quantités qui multiplient  $x$ , réunis avec leurs signes respectifs; 4°. enfin, diviser les deux membres de l'équation par le nombre ou le polynôme qui multiplie l'inconnue, et effectuer la division, s'il est possible.

Voici un exemple assez compliqué, où la règle précédente doit être appliquée dans toutes ses parties: Résoudre l'équation

$$\frac{(a+b)(x-b)}{a-b} - 3a = \frac{4ab-b^2}{a+b} - 2x + \frac{a^2-bx}{b}.$$

En faisant d'abord disparaître les dénominateurs, on a

$$b(a+b)^2(x-b) - 3ab(a^2-b^2) = b(a+b)(4ab-b^2) - 2b(a^2-b^2)x + (a^2-b^2)(a^2-bx);$$

effectuant les multiplications indiquées,

$$a^2bx + 2ab^2x + b^3x - a^3b^2 - 2ab^3 - b^4 - 3a^3b + 3ab^3 = 4a^2b^2 - ab^3 - 4ab^3 + b^4 - 2a^2b^2x + 2b^3x + a^4 - a^2b^2 - a^2bx + b^3x;$$

transposant et réduisant,

$$4a^2bx + 2ab^2x - 2b^3x = 4a^2b^2 - 6ab^3 + 2b^4 + 3a^3b + a^4;$$

réunissant en un seul tous les termes affectés de  $x$ ,

$$b(4a^2 + 2ab - 2b^2)x = 4a^2b^2 - 6ab^3 + 2b^4 + 3a^3b + a^4;$$

donc enfin, 
$$x = \frac{a^4 + 3a^3b + 4a^2b^2 - 6ab^3 + 2b^4}{b(4a^2 + 2ab - 2b^2)},$$

expression qui ne peut se réduire à un polynôme entier (n° 32).

46. Si l'on avait une équation telle que  $3x - 2 = 4x - 7$ , à résoudre, en transposant les termes affectés de  $x$  dans le premier membre, et les termes connus dans le second, on trouverait  $3x - 4x = 2 - 7$ , ou réduisant,  $-x = -5$ . Pour interpréter ce résultat, il suffit d'observer qu'on peut intervertir l'ordre de la transposition, c'est-à-dire faire passer au contraire les termes affectés de  $x$  dans le second membre; ce qui donne  $7 - 2 = 4x - 3x$ , d'où  $5 = x$ , ou bien enfin,  $x = 5$ ; c'est-à-dire que, toutes les fois qu'on parvient à un résultat tel que  $-x = -5$ , il n'y a qu'à changer les signes des deux membres.

Cela revient évidemment à transposer les termes affectés de l'inconnue dans le second membre, et les termes connus dans le premier membre, puis à écrire le second membre le premier, et réciproquement.

Nous pouvons maintenant passer à la résolution des problèmes.

47. Nous avons déjà dit que la première partie de la résolution algébrique d'un problème n'est soumise à aucune règle bien fixe. Tantôt l'énoncé du problème fournit sur-le-champ l'équation, tantôt on est obligé de démêler dans l'énoncé les conditions qui sont de nature à former l'équation; tantôt enfin, ce ne sont pas les conditions elles-mêmes de l'énoncé qu'il faut traduire algébriquement, mais bien des conditions que l'on peut regarder comme conséquences des premières. On ap-

pelle alors celles-ci, *conditions explicites*, et celles qu'on en déduit, *conditions implicites*. Cependant nous donnerons, avec M. Lacroix, un précepte dont l'application bien entendue conduit toujours à l'équation. En voici l'énoncé : *Regarder le problème comme résolu, et indiquer, à l'aide des signes algébriques, sur les quantités connues, représentées, soit par des nombres, soit par des lettres, et sur l'inconnue toujours représentée par une lettre, les mêmes raisonnemens et les mêmes opérations qu'il faudrait effectuer pour vérifier la valeur de l'inconnue, si cette valeur était donnée.*

On obtient, par ce moyen, deux expressions algébriques différentes d'une même quantité, qui renferment le caractère de l'inconnue; on les égale entre elles, et l'on a l'équation du problème.

Appliquons ce précepte aux problèmes suivans :

Premier problème. *Trouver un nombre dont la moitié, le tiers, le quart, augmentés de 45, donnent pour somme 448?*

Soit  $x$  le nombre cherché;  $\frac{x}{2}$ ,  $\frac{x}{3}$ ,  $\frac{x}{4}$  désigneront la moitié, le tiers et le quart de ce nombre. Or, il faut, d'après l'énoncé, que ces trois parties, augmentées de 45, donnent en somme 448; on a donc, pour l'équation du problème,

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 45 = 448;$$

ou, retranchant 45 des deux membres,

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 403;$$

chassant les dénominateurs,  $6x + 4x + 3x = 4836$ ,

ou réduisant,  $13x = 4836$ ; donc  $x = \frac{4836}{13} = 372$ .

En effet,

$$\frac{372}{2} + \frac{372}{3} + \frac{372}{4} + 45 = 186 + 124 + 93 + 45 = 448.$$

Cette question est du genre de celles qui, en Arithmétique, se résolvent par la règle de fausse position; et l'on voit avec quelle facilité l'Algèbre fait connaître la réponse à la question.

Second problème. *Quelqu'un engage un ouvrier pour 48 jours. Chaque jour qu'il travaille, il reçoit 24 sols, et à chaque jour d'oisiveté, on lui retient 12 sols (pour sa nourriture); au bout de 48 jours il reçoit, pour solde de son compte, 25<sup>fr</sup> 4<sup>s</sup>, ou 504 sols. On demande le nombre de jours de travail et le nombre de jours d'oisiveté.*

Si nous connaissons ces deux nombres, en les multipliant respectivement par 24 et 12, puis retranchant ce dernier produit du premier, on devrait trouver 504 pour résultat; indiquons ces opérations à l'aide des signes algébriques.

Soit  $x$  le nombre de jours de travail;  $48 - x$  représente alors le nombre de jours d'oisiveté;  $24 \times x$  ou  $24x$  désigne la somme que l'ouvrier gagne, et  $12(48 - x)$  la somme qu'on doit lui retenir; on a donc pour l'équation du problème,

$$24x - 12(48 - x) = 504;$$

effectuant les calculs,  $24x - 576 + 12x = 504$ ;

donc  $36x = 504 + 576 = 1080$ ;

et  $x = \frac{1080}{36} = 30$ ,

d'où  $48 - x = 48 - 30 = 18$ .

Ainsi l'ouvrier a travaillé pendant 30 jours, et s'est reposé pendant 18 jours. En effet, pour 30 jours de travail, il aurait dû recevoir  $24 \times 30$ , ou 720 sols; mais il s'est reposé 18 jours, pour lesquels on a dû lui retenir  $12 \times 18$ , ou 216 sols; or on a

$$720 - 216 = 504.$$

On peut généraliser ce problème, en désignant par  $n$  le nombre total des jours de travail et d'oisiveté, par  $a$  la somme que l'ouvrier doit recevoir pour chaque jour de travail, par  $b$  la

somme qu'on doit lui retenir pour chaque jour d'oisiveté, enfin par  $c$  le résultat du décompte. Soit toujours  $x$  le nombre de jours de travail,  $n - x$  exprime alors le nombre de jours d'oisiveté. Donc  $ax$  et  $b(n - x)$  désignent la somme que l'ouvrier doit recevoir et celle qu'on doit lui retenir. Ainsi, on a pour l'équation du problème,

$$ax - b(n - x) = c,$$

d'où 
$$ax - bn + bx = c,$$

$$(a + b)x = c + bn;$$

donc 
$$x = \frac{c + bn}{a + b},$$

et par conséquent, 
$$n - x = n - \frac{(c + bn)}{a + b} = \frac{an + bn - c - bn}{a + b},$$

ou bien, 
$$n - x = \frac{an - c}{a + b}.$$

Troisième problème. *Un renard poursuivi par un levrier a 60 sauts d'avance. Il en fait 9 pendant que le levrier n'en fait que 6; mais 3 sauts du levrier en valent 7 du renard. Combien le levrier fera-t-il de sauts pour atteindre le renard?*

Il est clair, d'après l'énoncé, que le chemin à parcourir par le levrier se compose des 60 sauts d'avance du renard, plus du chemin que celui-ci parcourt, à partir du moment où le levrier se met à sa poursuite. Donc, si l'on pouvait trouver les expressions de ces deux chemins au moyen d'une même inconnue, il serait facile de former l'équation du problème.

Soit  $x$  le nombre de sauts faits par le levrier. Puisque le renard fait 9 sauts pendant que le levrier en fait 6, il s'ensuit que le renard fait  $\frac{9}{6}$ , ou  $\frac{3}{2}$  sauts, pendant que le levrier en fait 1; et par conséquent, qu'il en fait un nombre exprimé par  $\frac{3x}{2}$ , pendant que le levrier en fait un nombre marqué

par  $x$ . On pourrait croire que, pour obtenir l'équation, il suffirait d'égaliser  $x$  à  $60 + \frac{3}{2}x$ ; mais en agissant ainsi, on commettrait une erreur manifeste; car les sauts du levrier sont plus grands que ceux du renard, et l'on égalerait alors des nombres hétérogènes, c'est-à-dire des nombres rapportés à une unité différente. Il faut donc, pour lever la difficulté, exprimer les sauts du renard en sauts du levrier, ou réciproquement. Or, suivant l'énoncé, 3 sauts du levrier valent 7 sauts du renard; donc 1 saut du levrier vaut  $\frac{7}{3}$  sauts du renard, et par conséquent,  $x$  sauts du levrier en valent  $\frac{7x}{3}$  du renard.

Donc enfin, on a l'équation 
$$\frac{7x}{3} = 60 + \frac{3}{2}x;$$

ou chassant les dénominateurs,  $\dots 14x = 360 + 9x,$

d'où  $5x = 360$  et  $x = 72$ .

Ainsi, le levrier fera 72 sauts pour atteindre le renard; pendant ce temps, le renard en fera  $72 \times \frac{3}{2}$  ou 108.

*Vérification.*

Les 72 sauts du levrier valent  $\frac{72 \times 7}{3}$ , ou 168 sauts du renard, et l'on a évidemment  $168 = 60 + 108$ .

Les deux problèmes suivans méritent toute l'attention des élèves, en ce qu'ils offrent d'excellens exercices de calcul.

48. Quatrième problème. *Un père qui a trois enfans, ordonne par son testament que son bien soit partagé de la manière suivante : le premier doit avoir une somme  $a$ , plus la  $n^{\text{ième}}$  partie de ce qui reste; le second une somme  $2a$ , plus la  $n^{\text{ième}}$  partie de ce qui reste, après qu'on a soustrait la  $1^{\text{re}}$  part et  $2a$ ; le troisième enfin doit avoir une somme  $3a$ , plus la  $n^{\text{ième}}$*



partie de ce qui reste, après qu'on a soustrait les deux premières parts et  $3a$ . Le bien est entièrement partagé; on demande la valeur du bien?

Désignons par  $x$  le bien du père. Si, à l'aide de cette quantité, nous pouvons former les expressions algébriques des trois parts, nous retrancherions leur somme du bien total  $x$ , et le reste égalé à zéro, donnerait l'équation du problème. Tâchons donc de déterminer successivement ces trois parts.

Puisque  $x$  désigne le bien du père,  $x - a$  est ce qui reste après qu'on a retranché  $a$ ; ainsi l'on a pour la part du premier enfant,

$$a + \frac{x-a}{n}, \text{ ou réduisant en fraction, } \frac{an+x-a}{n} \dots 1^{\text{re}} \text{ part.}$$

Pour former la seconde part, il faut retrancher de  $x$ , cette première part et  $2a$ , ce qui donne  $x - 2a - \frac{(an+x-a)}{n}$ , ou, réduisant les entiers en fraction et effectuant la soustraction,

$$\frac{nx - 3an - x + a}{n} \dots \dots 1^{\text{er}} \text{ reste.}$$

Or, la seconde part se compose de  $2a$ , plus la  $n^{\text{ième}}$  partie de ce reste; on a donc pour cette seconde part,  $2a + \frac{nx - 3an - x + a}{n^2}$ , ou, réduisant l'entier en fraction,

$$\frac{2an^2 + nx - 3an - x + a}{n^2} \dots \dots 2^{\text{e}} \text{ part.}$$

Si l'on retranche de  $x$ , les deux premières parts et  $3a$ , il vient

$$x - 3a - \frac{(an+x-a)}{n} - \frac{(2an^2 + nx - 3an - x + a)}{n^2},$$

ou, réduisant au même dénominateur et simplifiant,

$$\frac{n^2x - 6an^2 - 2nx + 4an + x - a}{n^2} \dots \dots 2^{\text{e}} \text{ reste.}$$

La 3<sup>e</sup> part est donc  $3a + \frac{n^2x - 6an^2 - 2nx + 4an + x - a}{n^3}$ ,

ou, réduisant l'entier en fraction,

$$\frac{3an^3 + n^2x - 6an^2 - 2nx + 4an + x - a}{n^3} \dots\dots 3^e \text{ part.}$$

Mais, d'après l'énoncé, le bien du père se trouve entièrement partagé. Donc, la différence entre  $x$  et la somme des trois parts, doit être égale à zéro; ce qui donne l'équation

$$x - \left\{ \frac{(an + x - a)}{n} + \frac{(2an^2 + nx - 3an - x + a)}{n^2} + \frac{(3an^3 + n^2x - 6an^2 - 2nx + 4an + x - a)}{n^3} \right\} = 0.$$

Chassant les dénominateurs, effectuant les soustractions et réduisant,

$$n^3x - 6an^3 - 3n^2x + 10an^2 + 3nx - 5an - x + a = 0;$$

$$\text{d'où } x = \frac{6an^3 - 10an^2 + 5an - a}{n^3 - 3n^2 + 3n - 1} = \frac{a(6n^3 - 10n^2 + 5n - 1)}{n^3 - 3n^2 + 3n - 1}.$$

On peut obtenir une équation et un résultat plus simples, d'après la remarque suivante: Dire que la part du troisième enfant se compose de  $3a$ , plus la  $n^{\text{ième}}$  partie de ce qui reste, et que le bien est alors entièrement partagé, c'est dire que le troisième enfant n'a que la somme  $3a$ , et que le reste dont on vient de parler est nul.

Or, on a obtenu pour l'expression de ce reste,

$$\frac{n^2x - 6an^2 - 2nx + 4an + x - a}{n^3}.$$

En l'égalant à zéro et chassant le dénominateur, on trouve

$$n^2x - 6an^2 - 2nx + 4an + x - a = 0;$$

$$\text{d'où } x = \frac{6an^2 - 4an + a}{n^2 - 2n + 1} = \frac{a(6n^2 - 4n + 1)}{n^2 - 2n + 1}.$$

Pour prouver l'identité numérique de cette expression avec la précédente, il suffirait de faire voir que la seconde provient de la première, dans les deux termes de laquelle on aurait supprimé un facteur commun. Or, si l'on applique aux deux polynômes...  $a(6n^3 - 10n^2 + 5n - 1)$  et  $n^3 - 3n^2 + 3n - 1$ , le procédé du plus grand commun diviseur (n° 41), on reconnaît que  $n - 1$  est facteur commun, et en divisant les deux termes de la première expression par ce facteur commun, on retrouve la seconde.

Ce problème est propre à faire voir aux commençans l'importance qu'ils doivent attacher à saisir dans l'énoncé d'une question, toutes les circonstances qui peuvent faciliter la formation de l'équation; autrement, ils courent le risque de parvenir à des résultats plus compliqués que ne le comporte la question.

Les conditions qui ont servi à former successivement les expressions des trois parts, sont les *conditions explicites* du problème proposé; et la condition qui a servi à déterminer l'équation la plus simple du problème, est une *condition implicite*, qu'un peu d'attention a suffi pour faire reconnaître comme comprise dans l'énoncé.

Pour obtenir les valeurs des trois parts, il suffirait de mettre pour  $x$  sa valeur dans les expressions que l'on a obtenues ci-dessus.

Appliquons la formule  $x = \frac{a(6n^3 - 4n^2 + 1)}{n^3 - 2n + 1}$  à un exemple.

Soit  $a = 10000$ ,  $n = 5$ ;

il vient

$$x = \frac{10000(6 \times 25 - 4 \times 5 + 1)}{25 - 10 + 1} = \frac{10000 \times 131}{16} = \frac{1310000}{16} = 81875.$$

Vérifions l'énoncé sur cet exemple.

Le premier enfant doit avoir  $10000 + \frac{81875 - 10000}{5}$ , ou 24375.

Il reste donc  $81875 - 24375$ , ou  $57500$  à partager entre les deux autres enfans.

Le second doit avoir  $20000 + \frac{57500 - 20000}{5}$ , ou  $27500$ .

Il reste donc  $57500 - 27500$ , ou  $30000$  pour le troisième enfant. Or  $30000$  est le triple de  $10000$ ; donc le problème est vérifié.

On peut donner de ce même problème une solution moins directe, mais plus simple et plus élégante. Elle est encore fondée sur cette remarque, qu'après avoir soustrait  $3a$  des deux premières parts, il ne doit rien rester.

Désignons par  $r, r', r''$ , les trois restes dont il est question dans l'énoncé; les expressions algébriques des trois parts sont

$$a + \frac{r}{n}, \quad 2a + \frac{r'}{n}, \quad 3a + \frac{r''}{n}.$$

Or, 1°. d'après l'énoncé, on a évidemment  $r'' = 0$ .

Ainsi la troisième part est  $3a$ .

2°. Ce qui reste, lorsqu'on a donné au second enfant,  $2a + \frac{r'}{n}$ , peut être représenté par  $r' - \frac{r'}{n}$ , ou  $\frac{(n-1)r'}{n}$ .

D'ailleurs, ce reste forme aussi la troisième part; ainsi l'on a

$$\frac{(n-1)r'}{n} = 3a; \quad \text{d'où} \quad r' = \frac{3an}{n-1}.$$

Donc, la part du second est  $2a + \frac{3an}{n-1} : n = 2a + \frac{3a}{n-1}$  (\*),

ou, réduisant l'entier en fraction et simplifiant,  $\frac{2an+a}{n-1}$ .

3°. Ce qui reste, lorsqu'on a donné au premier,  $a + \frac{r}{n}$ , peut être

(\*) Les deux points : employés ici, marquent la division de  $\frac{3an}{n-1}$  par  $n$  (voyez n° 2).

exprimé par  $r - \frac{r}{n}$  ou  $\frac{(n-1)r}{n}$ . D'ailleurs, ce reste doit former

les deux autres parts, ou  $3a + \frac{2an+a}{n-1}$ .

$$\text{Ainsi l'on a } \frac{(n-1)r}{n} = 3a + \frac{2an+a}{n-1} = \frac{5an-2a}{n-1}.$$

$$\text{Donc } r = \frac{5an-2a}{n-1} \times \frac{n}{n-1} = \frac{5an^2-2an}{(n-1)^2},$$

et par conséquent, on obtient pour la première part,

$$\begin{aligned} a + \frac{5an^2-2an}{(n-1)^2} : n &= a + \frac{5an-2a}{(n-1)^2} \\ &= a + \frac{5an-2a}{n^2-2n+1} = \frac{an^2+3an-a}{n^2-2n+1}. \end{aligned}$$

Le bien total est donc enfin

$$3a + \frac{2an+a}{n-1} + \frac{an^2+3an-a}{n^2-2n+1},$$

ou, réduisant l'entier et les fractions au même dénominateur,

$$\frac{3a(n^2-2n+1) + (2an+a)(n-1) + an^2+3an-a}{n^2-2n+1},$$

ou, effectuant les calculs et réduisant,

$$\frac{6an^2-4an+a}{n^2-2n+1} = \frac{a(6n^2-4n+1)}{(n-1)^2},$$

résultat obtenu ci-dessus.

Cette solution est d'ailleurs plus complète que la précédente, puisque l'on a obtenu en même temps et le bien du père et les expressions des trois parts.

49. Cinquième problème. *Un père ordonne par son testament, que l'aîné de ses enfans aura une somme a sur son bien, plus la n<sup>ième</sup> partie du reste ; que le second aura une somme 2a, plus la n<sup>ième</sup> partie de ce qui restera, après qu'on aura retranché*

la première part et  $2a$ ; que le troisième aura une somme  $3a$ , plus la  $n^{\text{ième}}$  partie du nouveau reste; et ainsi de suite. On suppose d'ailleurs que tous les enfans soient également partagés. On demande le bien du père, la part de chacun des enfans, et le nombre des enfans?

Ce problème a cela de remarquable, que son énoncé renferme plus de conditions qu'il n'en faut pour trouver les valeurs des inconnues.

Soit  $x$  le bien du père;  $x - a$  exprime ce qui reste après qu'on a prélevé la somme  $a$ . Ainsi la part de l'ainé est

$$a + \frac{x-a}{n} \text{ ou } \frac{an+x-a}{n} \dots 1^{\text{re}} \text{ part.}$$

Retranchant cette première part et  $2a$  de  $x$ , on obtient

$$x - 2a - \frac{(an+x-a)}{n}, \text{ ou } \frac{nx-3an-x+a}{n},$$

dont la  $n^{\text{ième}}$  partie est  $\frac{nx-3an-x+a}{n^2}$ .

Donc, la part du second enfant est

$$2a + \frac{nx-3an-x+a}{n^2}, \text{ ou bien, } \frac{2an^2+nx-3an-x+a}{n^2} \dots 2^{\text{e}} \text{ part.}$$

On pourrait former de la même manière les autres parts; mais, puisque toutes les parts doivent être égales, il suffit, pour former l'équation du problème, d'égaliser les deux premières parts, ce qui donne l'équation

$$\frac{an+x-a}{n} = \frac{2an^2+nx-3an-x+a}{n^2},$$

d'où l'on tire  $x = an^2 - 2an + a$ .

Substituant cette valeur de  $x$  dans l'expression de la première

part, on trouve  $\frac{an+an^2-2an+a-a}{n}$ ;

ou réduisant,  $\frac{an^2-an}{n} = an - a = a(n-1)$ ;

et comme toutes les parts doivent être égales, en divisant le bien total par la première, on doit obtenir pour quotient le nombre des enfans; ainsi,  $\frac{an^2 - 2an + a}{an - a}$ , ou  $n-1$ , désigne le nombre des enfans.

Bien du père...  $an^2 - 2an + a$  ou  $a(n-1)^2$ ;

Part de l'aîné et de chaque enfant...  $a(n-1)$ ;

Nombre total des enfans.....  $n-1$ .

Il reste maintenant à savoir si les autres conditions du problème sont satisfaites; c'est-à-dire, si, lorsqu'on donne au second  $2a$ , plus la  $n^{i\text{ème}}$  partie de ce qui reste, au troisième  $3a$ , plus la  $n^{i\text{ème}}$  partie de ce qui reste,...., la part de chaque enfant est en effet  $a(n-1)$ .

Or, la différence entre le bien du père et la première part étant  $a(n-1)^2 - a(n-1)$ , la part du second doit être

$$2a + \frac{a(n-1)^2 - a(n-1) - 2a}{n} \text{ ou } \frac{2a(n-1) + a(n-1)^2 - a(n-1)}{n},$$

$$\text{ou réduisant, } \frac{a(n-1) + a(n-1)^2}{n}, \text{ ou bien, } \frac{a(n-1)(1+n-1)}{n},$$

ou bien enfin,  $a(n-1)$ .

De même, la différence entre  $a(n-1)^2$  et les deux premières parts, étant  $a(n-1)^2 - 2a(n-1)$ , la part du troisième doit être

$$3a + \frac{a(n-1)^2 - 2a(n-1) + 3a}{n}, \text{ expression qui, étant ré-}$$

$$\text{duite, devient encore évidemment } \frac{a(n-1) + a(n-1)^2}{n}, \text{ et par}$$

conséquent,  $a(n-1)$ .

On obtiendrait de même pour la quatrième part,

$$4a + \frac{a(n-1)^2 - 3a(n-1) - 4a}{n} \text{ ou } \frac{a(n-1) + a(n-1)^2}{n};$$

et ainsi de suite. Donc enfin, toutes les conditions de l'énoncé sont satisfaites.

## § II. Des équations et problèmes du premier degré à deux ou plusieurs inconnues.

50. Quoique plusieurs questions résolues précédemment renfermassent dans leur énoncé plus d'une inconnue, nous sommes parvenus à leur résolution en employant un seul caractère. Cela tient à ce que, d'après les conditions de l'énoncé, nous pouvions facilement exprimer les autres inconnues au moyen de ce caractère ; mais il n'en est pas de même dans tous les problèmes où il y a plus d'une inconnue.

Pour savoir comment on doit s'y prendre pour résoudre ces sortes de problèmes, reprenons d'abord quelques-uns de ceux déjà résolus à l'aide d'un seul caractère.

*Trouver deux nombres dont on connaît la somme a et la différence b ? (C'est le problème n° 4.)*

Désignons les deux nombres cherchés par  $x$  et  $y$  ; on a, d'après

l'énoncé, les deux équations 
$$\begin{cases} x + y = a, \\ x - y = b. \end{cases}$$

Or, *en principe*, si, à deux nombres égaux  $A$  et  $B$ , on ajoute respectivement deux autres nombres égaux  $C$  et  $D$ , les résultats  $A + C$  et  $B + D$  sont égaux ; c'est-à-dire que, si l'on a les équations  $A = B$  et  $C = D$ , il en résulte  $A + C = B + D$ .

De même, si de deux nombres égaux on retranche deux autres nombres égaux, les restes sont encore égaux ; c'est-à-dire que des deux équations  $A = B$  et  $C = D$ , on déduit encore  $A - C = B - D$ .

Appliquons ce principe aux deux équations du problème proposé.

On trouve, en les ajoutant,  $2x = a + b$ ,

et en les retranchant,  $2y = a - b$ .

Chacune de ces équations ne renfermant plus qu'une seule inconnue, on tire de la première,  $x = \frac{a+b}{2}$ ,



et de la seconde,

$$y = \frac{a-b}{2}.$$

En effet, on a  $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{2a}{2} = a$ , et  $\frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)}{2} = \frac{2b}{2} = b$ .

Soit encore repris le problème de l'ouvrier (n° 39), en ne considérant que l'énoncé général.

Soient  $x$  le nombre de jours de travail, et  $y$  le nombre de jours d'oisiveté;  $ax$  et  $by$  expriment la somme que l'ouvrier doit recevoir pour les jours de travail, et celle qu'on doit lui retenir pour les jours d'oisiveté.

On a donc les deux équations  $\begin{cases} x + y = n, \\ ax - by = c. \end{cases}$

Or, nous avons déjà vu qu'on peut multiplier les deux membres d'une même équation par un même nombre, sans troubler l'égalité; ainsi, l'on peut multiplier les deux membres de la première équation par  $b$ , coefficient de  $y$  dans la seconde; et il vient.....  $bx + by = bn$ ,

équation qui, combinée avec la seconde  $ax - by = c$ ,

donne par addition,  $bx + ax = bn + c$ ; d'où  $x = \frac{bn + c}{a + b}$ .

Multipliant de même la première par  $a$ , coefficient de  $x$  dans la seconde, on a.....  $ax + ay = an$ ,

équation qui, combinée avec la seconde  $ax - by = c$ ,

donne par soustraction,  $(a + b)y = an - c$ ; d'où  $y = \frac{an - c}{a + b}$ .

L'introduction d'un caractère pour représenter chacune des inconnues dans les deux problèmes précédents, offre sur la solution qui a été donnée précédemment, l'avantage de faire connaître les deux nombres cherchés, indépendamment l'un de l'autre.

#### ÉLIMINATION.

51. Soient maintenant les deux équations  $\begin{cases} 5x + 7y = 43, \\ 11x + 9y = 69, \end{cases}$

qu'on peut regarder comme la traduction algébrique de l'énoncé d'un problème à deux inconnues.

Si, dans ces deux équations, l'une des inconnues était affectée d'un même coefficient, on pourrait, par une simple soustraction, former une nouvelle équation qui ne contiendrait plus que l'autre inconnue, et de laquelle on tirerait la valeur de cette inconnue.

Or, si l'on multiplie les deux membres de la première équation par 9, coefficient de  $y$  dans la seconde, et les deux membres de la seconde par 7, coefficient de  $y$  dans la première, on

obtient par cette double multiplication,  $\begin{cases} 45x + 63y = 387, \\ 77x + 63y = 483, \end{cases}$

équations qui peuvent être substituées aux deux premières, et dans lesquelles  $y$  est affecté du même coefficient.

Retranchons donc la première de ces deux équations de la seconde; il vient  $32x = 96$ , d'où  $x = 3$ .

Pareillement, si l'on multiplie les deux membres de la première par 11, coefficient de  $x$  dans la seconde, et les deux membres de la seconde par 5, coefficient de  $x$  dans la première,

on forme les deux nouvelles équations  $\begin{cases} 55x + 77y = 473, \\ 55x + 45y = 345, \end{cases}$

qui peuvent être substituées aux deux équations proposées, et dans lesquelles le coefficient de  $x$  est le même.

Retranchant donc la seconde de ces deux équations de la première, on trouve  $32y = 128$ , d'où  $y = 4$ .

Ainsi,  $x = 3$  et  $y = 4$  sont les deux valeurs de  $x$  et de  $y$  propres à vérifier l'énoncé de la question. En effet, l'on a

1°.  $5 \times 3 + 7 \times 4 = 15 + 28 = 43$ ; 2°.  $11 \times 3 + 9 \times 4 = 33 + 36 = 69$ .

L'opération qui vient d'être exécutée, et au moyen de laquelle on obtient les valeurs des inconnues propres à satisfaire à des équations données, est connue sous le nom d'*élimination*, parce qu'en effet elle consiste à *chasser* l'une des inconnues

par des transformations permises et exécutées sur les équations proposées.

La méthode précédente a beaucoup d'analogie avec la réduction des fractions au même dénominateur; aussi est-elle, comme cette dernière opération, susceptible de quelques simplifications.

Soient, pour nouvel exemple, les deux équations

$$\begin{aligned} 8x - 21y &= 33 \\ 6x + 35y &= 177. \end{aligned}$$

Pour rendre les deux coefficients de  $y$  égaux, remarquons que 21 et 35 ont le facteur commun 7; il suffit donc de multiplier la première équation par 5 et la seconde par 3; ce qui donne les

$$\text{deux nouvelles équations } \begin{cases} 40x - 105y = 165, \\ 18x + 105y = 531; \end{cases}$$

équations qui, ajoutées entre elles, donnent

$$58x = 696, \text{ d'où } x = 12.$$

Parcillemeut, les deux coefficients de  $x$  renferment le facteur commun 2; ainsi, il suffit, pour rendre ces deux coefficients égaux, de multiplier la première par 3 et la seconde par 4; ce

$$\text{qui donne } \begin{cases} 24x - 63y = 99, \\ 24x + 140y = 708. \end{cases}$$

Retranchant la première de la deuxième; on trouve

$$203y = 609, \text{ d'où } y = 3.$$

N. B. Il est très important de reconnaître si les coefficients ont des facteurs communs, puisqu'alors on a des calculs plus simples à effectuer.

Soient pour troisième exemple, les équations

$$\begin{aligned} \frac{2x}{3} - 4 + \frac{y}{2} + x &= 8 - \frac{3y}{4} + \frac{1}{12}, \\ \frac{y}{6} - \frac{x}{2} + 2 &= \frac{1}{6} - 2x + 6. \end{aligned}$$

Il faut d'abord faire disparaître les dénominateurs, d'après la règle (n° 44), et l'on obtient ainsi les deux équations

$$\begin{aligned} 8x - 48 + 6y + 12x &= 96 - 9y + 1, \\ y - 3x + 12 &= 1 - 12x + 36, \end{aligned}$$

ou réduisant,  $\begin{cases} 20x + 15y = 145, \\ 9x + y = 25, \end{cases}$  ou bien  $\begin{cases} 4x + 3y = 29, \\ 9x + y = 25. \end{cases}$

Multipliant la seconde équation par 3, et retranchant la première de la seconde, on trouve  $23x = 46$ , d'où  $x = 2$ ; mais on a d'ailleurs  $y = 25 - 9x$ ; donc  $y = 25 - 9 \times 2 = 7$ .

52. Considérons actuellement le cas de trois équations à trois inconnues.

Soient les équations  $\begin{cases} 5x - 6y + 4z = 15, \\ 7x + 4y - 3z = 19, \\ 2x + y + 6z = 46. \end{cases}$

Pour éliminer  $z$  entre les deux premières équations, il faut multiplier la première par 3 et la seconde par 4, puis ajouter les deux résultats (puisque les coefficients de  $z$  sont de signes contraires), ce qui donne pour nouvelle

équation, .....  $43x - 2y = 121$  }  
 Multipliant la seconde équation par 2,  
 l'un des facteurs du coefficient de  $z$  dans  
 la troisième, et ajoutant, on a .....  $16x + 9y = 84$  }

La question est donc ramenée à trouver les valeurs de  $x$  et de  $y$ , propres à satisfaire à ces nouvelles équations.

Or, si l'on multiplie la première par 9, la seconde par 2, et qu'on ajoute les deux résultats, on trouve

$$419x = 1257, \text{ d'où l'on tire } x = 3.$$

On pourrait, à l'aide des deux équations en  $x$  et  $y$ , déterminer  $y$  comme on a déterminé  $x$ ; mais on parvient plus simplement à la valeur de  $y$ , en observant que la dernière de ces deux équations devient, lorsqu'on y met pour  $x$  sa valeur,

$$48 + 9y = 84, \text{ d'où l'on tire } y = \frac{84 - 48}{9} = 4.$$

De même, la première des trois équations proposées devient, lorsqu'on y remplace  $x$  et  $y$  par leurs valeurs,

$$15 - 24 + 4z = 15, \text{ d'où } z = \frac{24}{4} = 6.$$

En général, soit un nombre  $m$  d'équations à pareil nombre d'inconnues. Pour trouver les valeurs des inconnues, combinez successivement l'une quelconque des équations avec chacune des  $m - 1$  autres, afin d'éliminer la même inconnue; vous obtenez ainsi  $m - 1$  nouvelles équations renfermant  $m - 1$  inconnues, sur lesquelles vous opérez comme sur les équations proposées; c'est-à-dire que vous éliminez une nouvelle inconnue, en combinant l'une de ces nouvelles équations avec les  $m - 2$  autres, ce qui donne  $m - 2$  équations renfermant  $m - 2$  inconnues. Continuez cette suite d'opérations jusqu'à ce qu'enfin vous parveniez à une seule équation qui ne renferme plus qu'une inconnue, et de laquelle vous tirez facilement la valeur de cette inconnue. Après quoi, remontant de proche en proche jusqu'à l'une des équations proposées, vous déterminerez successivement les valeurs des autres inconnues.

53. La méthode d'élimination que nous venons d'exposer est connue sous le nom de *méthode par addition et soustraction*, parce qu'en effet on parvient à chasser les inconnues par des additions et soustractions, après les avoir toutefois préparées de manière qu'une inconnue soit affectée du même coefficient dans deux équations.

Il existe encore deux autres méthodes principales d'élimination. La première, appelée *méthode par substitution*, consiste à tirer la valeur de l'inconnue de l'une des équations, comme si les autres inconnues étaient déjà déterminées, et à substituer cette valeur dans les autres équations, ce qui donne lieu à de nouvelles équations, qui renferment une inconnue

de moins, et sur lesquelles on opère comme sur les équations proposées.

La seconde, appelée *méthode par comparaison*, consiste à tirer la valeur d'une même inconnue, de toutes les équations, et à égaler ces valeurs deux à deux; ce qui donne nécessairement lieu à de nouvelles équations renfermant une inconnue de moins, sur lesquelles on opère comme sur les équations proposées.

Mais ces deux méthodes ont un inconvénient que n'offre pas la *méthode par addition et soustraction*, c'est de donner lieu à de nouvelles équations renfermant des dénominateurs qu'il faut ensuite faire disparaître. On emploie toutefois avec avantage la *méthode par substitution*, toutes les fois que l'une des inconnues a un coefficient égal à l'unité dans l'une des équations, parce qu'alors l'inconvénient dont nous venons de parler n'a plus lieu. Nous aurons quelquefois occasion de l'employer. Mais, en général, la *méthode par addition et soustraction* est préférable; elle présente d'ailleurs cet autre avantage, c'est que, si les coefficients ne sont pas trop grands, on peut faire l'addition ou la soustraction en même temps que la multiplication qui tend à rendre les coefficients égaux.

54. Il arrive souvent que les équations proposées ne renferment pas toutes les inconnues à la fois. Dans ce cas, avec un peu d'adresse, l'élimination se fait très promptement.

Soient les quatre équations à quatre inconnues,

$$2x - 3y + 2z = 13 \dots\dots(1),$$

$$4u - 2x = 30 \dots\dots(2),$$

$$4y + 2z = 14 \dots\dots(3),$$

$$5y + 3u = 32 \dots\dots(4).$$

En jetant les yeux sur ces équations, on voit que l'élimination de  $z$  entre les équations (1) et (3) donnera une équation en  $x$  et  $y$ ; et si l'on élimine  $u$  entre les équations (2) et (4), on obtiendra une seconde équation en  $x$  et  $y$ ; ces deux dernières inconnues peuvent donc être déterminées aisément.

D'abord, l'élimination de  $z$  entre (1) et (3) donne. ....

$$7y - 2x = 1;$$

celle de  $u$ , entre (2) et (4), donne. ....  $20y + 6x = 38.$

Multiplions la première de ces deux équations par 3, et ajoutons; il vient. ....  $41y = 41$

d'où .....  $y = 1$

Substituant cette valeur dans  $7y - 2x = 1$ , on trouve. ....  $x = 3$

Reportons la valeur de  $x$  dans l'équation (2); il en résulte  $4u - 6 = 30$ , d'où .....  $u = 9$

Enfin, la substitution de la valeur de  $y$  dans l'équation (3) donne. ....  $z = 5$

Nous proposerons, pour exercice, les cinq équations suivantes

$$7x - 2z + 3u = 17$$

$$4y - 2z + t = 11$$

$$5y - 3x - 2u = 8$$

$$4y - 3u + 2t = 9$$

$$3z + 8u = 33$$

qui donnent pour valeurs des  
inconnues,

$$x=2, y=4, z=3, u=3, t=1.$$

55. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé le nombre des équations égal au nombre des caractères employés pour désigner les inconnues. Il doit en être ainsi de tout problème à plusieurs inconnues, pour qu'il soit *déterminé*, c'est-à-dire pour qu'il n'admette pas une infinité de solutions.

En effet, supposons, par exemple, qu'un problème à deux inconnues  $x$  et  $y$ , conduise à l'équation unique  $5x - 3y = 12$ ; on en déduit  $x = \frac{12 + 3y}{5}$ . Or, si l'on fait successivement

$$y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots,$$

$$\text{il en résulte } x = 3, \frac{18}{5}, \frac{21}{5}, \frac{24}{5}, \frac{27}{5}, 6, \dots;$$

et tous les systèmes de valeurs

$$(x=3, y=1), \left(x=\frac{18}{5}, y=2\right), \left(x=\frac{21}{5}, y=3\right) \dots$$

mis pour  $x$  et  $y$  dans l'équation,  $y$  satisfait également.

Si l'on avait deux équations à trois inconnues, on pourrait d'abord éliminer l'une des inconnues, à l'aide des équations proposées, et l'on parviendrait ainsi à une équation qui, renfermant deux inconnues, pourrait être satisfaite par une infinité de systèmes de valeurs prises pour ces inconnues; d'où l'on conclurait également une infinité de valeurs pour la troisième inconnue. Donc, en général, pour qu'un problème soit *déterminé*, il faut que son énoncé renferme au moins autant de conditions différentes qu'il y a d'inconnues, et que ces conditions puissent être exprimées chacune par une équation. Nous reviendrons au reste plus loin sur les questions qui donnent lieu à un nombre d'équations *essentiellement différentes*, moindre que celui des inconnues.

56. Passons à la résolution de nouveaux problèmes à deux ou un plus grand nombre d'inconnues.

Sixième problème. *Une personne possède un capital de 30,000 fr. qu'elle fait valoir à un certain intérêt; mais elle doit une somme de 20,000 fr. dont elle paie un certain intérêt. L'intérêt qu'elle retire surpasse celui qu'elle paie, de 800 fr. Une seconde personne possède 35,000 fr. qu'elle fait valoir au second taux d'intérêt, mais elle doit une somme de 24,000 fr. dont elle paie un intérêt au premier taux. L'intérêt qu'elle retire surpasse celui qu'elle paie, de 310 fr. On demande les deux taux d'intérêt?*

*Solution.* Soient  $x$  et  $y$  les deux taux d'intérêt pour 100 fr. Pour obtenir l'intérêt de 30,000 fr. au taux désigné par  $x$ , il faut établir la proportion  $100 : x :: 30,000 : \frac{30,000x}{100}$  ou  $300x$ .

On obtiendra de même, pour l'intérêt de 20,000 f. au taux désigné par  $y$ ,  $\frac{20,000y}{100}$  ou  $200y$ . Mais, d'après l'énoncé, la différence de ces deux intérêts est égale à 800 fr.



On a donc pour première équation du problème,

$$300x - 200y = 800.$$

En traduisant algébriquement la seconde condition du problème, on parviendrait à la nouvelle équation

$$350y - 240x = 3100$$

Les deux membres de la première équation étant divisibles par 100, et ceux de la seconde par 10, on peut les remplacer par les deux suivantes:  $3x - 2y = 8$ ,

$$35y - 24x = 31.$$

Pour éliminer  $x$ , multiplions la première équation par 8, et ajoutons les deux équations; il vient  $19y = 95$ , d'où  $y = 5$ . Remplaçant  $y$  par sa valeur dans la première équation, l'on trouve  $3x - 10 = 8$ , d'où  $x = 6$ .

Ainsi le premier taux est à 6 pour  $\frac{100}{1}$  et le second à 5.

En effet,

30,000 fr. placés à 6 %, donnent  $300 \times 6$  ou 1800 fr.

20,000..... à 5.... donnent  $200 \times 5$  ou 1000,

et l'on a  $1800 - 1000 = 800$ .

On vérifierait de même la seconde condition.

*Septième problème. On a trois lingots composés de différents métaux fondus ensemble. La livre du premier contient 7 onces d'argent, 3 onces de cuivre et 6 d'étain. La livre du second contient 12 onces d'argent, 3 onces de cuivre et 1 once d'étain. Celle du troisième, 4 onces d'argent, 7 onces de cuivre et 5 d'étain. On demande ce qu'il faut prendre de chacun des trois lingots pour en former un quatrième qui, sur une livre, contienne 8 onces d'argent,  $3\frac{1}{2}$  de cuivre, et  $4\frac{1}{2}$  d'étain.*

*Solution.* Soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  les nombres d'onces qu'il faut prendre respectivement sur les trois lingots, pour former une livre du lingot demandé. Puisque dans le premier lingot;

6.

il y a 7 onces d'argent sur une livre ou 16 onces, il s'en suit que, sur 1 once, il y a  $\frac{7}{16}$  d'once d'argent, et par conséquent, sur un nombre d'onces marqué par  $x$ , il doit y avoir  $\frac{7x}{16}$  d'onces d'argent. On trouverait de même que  $\frac{12y}{16}$ ,  $\frac{4z}{16}$ , expriment les nombres d'onces d'argent pris sur le second et le troisième, lorsque le quatrième est formé; mais, d'après l'énoncé, ce quatrième lingot doit contenir 8 onces d'argent; on a donc pour première équation,  $\frac{7x}{16} + \frac{12y}{16} + \frac{4z}{16} = 8$ ,

ou, chassant les dénominateurs.....  $7x + 12y + 4z = 128$   
 On trouverait par rapport au cuivre,  $3x + 3y + 7z = 60$   
 et par rapport à l'étain;.....  $6x + y + 5z = 68$  }

Comme dans ces trois équations, les coefficients de  $y$  sont les plus simples, il convient d'éliminer d'abord cette inconnue.

Multiplions la deuxième équation par 4 et retranchons la première équation, du produit; il vient  $5x + 24z = 112$

Multipliant la troisième équation par 3,  
 et retranchant la deuxième, du produit,  
 on trouve.....  $15x + 8z = 144$  }

Multipliant cette dernière équation par 3 et retranchant la précédente, du produit, on obtient  $40x = 320$ , d'où  $x = 8$ .  
 Reportons cette valeur de  $x$  dans l'équation  $15x + 8z = 144$ ;  
 elle devient  $120 + 8z = 144$ , d'où  $z = 3$ .

Enfin, les deux valeurs  $x = 8$ ,  $z = 3$ , étant substituées dans l'équation  $6x + y + 5z = 68$ , donnent  $48 + y + 15 = 68$ , d'où  $y = 5$ .

Ainsi, pour former une livre du quatrième lingot, on doit prendre 8 onces du premier, 5 onces du second et 3 onces du troisième. En effet, si sur 16 onces du premier lingot, il y a 7 onces d'argent, sur 8 onces, il doit y en avoir un nombre exprimé par  $\frac{7 \times 8}{16}$ . Pareillement,  $\frac{12 \times 5}{16}$  et  $\frac{4 \times 3}{16}$  représentent les quan-

tités d'argent contenues dans 5 onces du second lingot et 3 onces du troisième. Or on a  $\frac{7 \times 8}{16} + \frac{12 \times 5}{16} + \frac{4 \times 3}{16} = \frac{128}{16} = 8$ ; ainsi le quatrième lingot contient 8 onces d'argent, comme l'exige l'énoncé. On vérifierait de même les conditions relatives au cuivre et à l'étain.

57. Voici les énoncés de nouveaux problèmes à une et à plusieurs inconnues, sur lesquels nous engageons les commençans à s'exercer.

Huitième problème. *Un ouvrier peut faire un certain ouvrage exprimé par a, dans un temps exprimé par b; un second ouvrier, l'ouvrage c dans un temps d; un troisième, l'ouvrage e dans un temps f. On demande quel temps il faut aux trois ouvriers, travaillant ensemble, pour faire l'ouvrage g?*

(On peut prendre, pour fixer les idées, la toise pour unité d'ouvrage, et le jour pour unité de temps.)

$$\text{Réponse.} \quad x = \frac{bdfg}{adf + bcf + bde}.$$

Application.

$$a = 27^{\text{toises}}; b = 4^{\text{jours}}; c = 35'; d = 6'; e = 40'; f = 12'; g = 191';$$

on doit trouver  $x = 12$ .

Neuvième problème. *On a de l'eau de mer qui, sur 32 livres poids, contient 1 livre de sel. Combien faut-il ajouter d'eau douce à ces 32 livres, pour que, sur 32 livres du nouveau mélange, la quantité de sel soit réduite à 2 onces, ou  $\frac{1}{3}$  de livre? (Rép. 224'.)*

Dixième problème. *Une montre marque midi. On demande combien de fois les aiguilles se rencontreront depuis midi jusqu'à minuit, et à quelle heure se fera chaque rencontre? (Rép. Nombre des rencontres, 11; 1<sup>re</sup> rencontre, à 1<sup>h</sup> 5'  $\frac{1}{11}$ ; 2<sup>e</sup> rencontre, à 2<sup>h</sup> 10'  $\frac{2}{11}$ ; 3<sup>e</sup>, à 3<sup>h</sup> 16'  $\frac{3}{11}$ . . . .)*

Onzième problème. *Un nombre est composé de trois chiffres; la somme des chiffres est 11; le chiffre des unités est double de celui des centaines; et quand on ajoute 297 à ce nombre,*

on obtient une somme qui est le nombre renversé. Quel est le nombre qui jouit de cette propriété? (Rép. 326.)

Douzième problème. Une personne qui possède 100,000 fr. les fait valoir, une partie à 5 pour  $\frac{\%}{100}$  et l'autre partie à 4 pour  $\frac{\%}{100}$ ; elle retire pour le tout 4640 fr. d'intérêt. On demande les deux parties? (Rép. 64,000 et 36,000.)

Treizième problème. Une personne possède un certain capital qu'elle fait valoir à un certain intérêt. Une autre personne qui possède 10,000 fr. de plus que la première, et qui fait valoir son bien de 1 pour  $\frac{\%}{100}$  plus avantageusement qu'elle, a un revenu plus grand de 800 fr. Une troisième personne qui possède 15,000 fr. de plus que la première, et qui fait valoir son bien de 2 pour  $\frac{\%}{100}$  plus avantageusement qu'elle, a un revenu plus grand de 1500 fr. On demande les biens des trois personnes et les trois taux d'intérêt?

(Sommets placées 30,000, 40,000, 45,000.

Taux d'intérêt. 4, 5, 6.)

### § III. Problèmes qui donnent lieu à des résultats négatifs. Théorie des quantités négatives.

58. L'emploi des signes algébriques, pour résoudre les problèmes, donne souvent lieu à des circonstances singulières qui embarrassent au premier abord; mais en y réfléchissant, on parvient à les expliquer, et même à en tirer parti, pour généraliser encore davantage la langue algébrique.

Proposons-nous cette première question : Trouver un nombre qui, ajouté au nombre  $b$ , donne pour somme le nombre  $a$ .

*Solution.* Soit  $x$  le nombre cherché, on a évidemment pour équation,

$$b + x = a, \text{ d'où } x = a - b.$$

Cette expression ou formule donnera la valeur de  $x$ , dans tous les cas particuliers du problème proposé.

Soit, par exemple,  $a=47$ ,  $b=29$ ; il vient  $x=47-29=18$ .

Soit encore  $a = 24$ ,  $b = 31$ ; il vient  $x = 24 - 31$ .

Comme 31 est égal à  $24 + 7$ , cette expression de  $x$  peut se mettre sous la forme  $x = 24 - 24 - 7$ , ou réduisant  $x = -7$ . Cette valeur obtenue pour  $x$ , est ce qu'on appelle une *solution négative*. Mais comment l'interpréter?

Si l'on remonte à l'énoncé du problème, on voit qu'il est impossible que 31 augmenté d'un nombre, donne pour somme, 24, nombre plus petit que 31. Ainsi, aucun nombre ne peut vérifier l'énoncé, dans ce cas particulier. Cependant, si, dans l'équation du problème,  $31 + x = 24$ , on met à la place du terme  $+x$ , la valeur négative  $-7$ , il vient  $31 - 7 = 24$ , équation exacte qui veut dire que le nombre 31 diminué de 7, donne pour différence 24.

La *solution négative*,  $x = -7$ , indique donc l'impossibilité de satisfaire à l'énoncé du problème dans le sens où il a été établi; mais en considérant cette solution indépendamment de son signe, c'est-à-dire,  $x = 7$ , on voit qu'elle satisfait à l'énoncé modifié ainsi : *Trouver un nombre qui, retranché de 31, donne pour différence 24*, énoncé qui ne diffère du premier : *Trouver un nombre qui, ajouté à 31, donne pour somme 24*, qu'en ce que le mot *ajouter* se trouve remplacé par le mot *retrancher*, et le mot *somme* par le mot *différence*.

Si l'on veut résoudre la nouvelle question directement, il n'y a qu'à poser l'équation

$$31 - x = 24; \text{ d'où } 31 - 24 = x, \text{ ou } x = 7.$$

Soit encore proposé ce problème : *Un père a un nombre a d'années; son fils en a un nombre b. On demande dans combien d'années l'âge du fils sera le quart de celui du père?*

#### Solution.

Désignons par  $x$  le nombre d'années cherché;  $a + x$  et  $b + x$  représentent les âges du père et du fils, au bout de ce nombre d'années; ainsi, l'on a l'équation  $b + x = \frac{a+x}{4}$ ; d'où  $x = \frac{a-4b}{3}$ .

Supposons  $a = 54$ ,  $b = 9$ ; il vient  $x = \frac{54-36}{3} = \frac{18}{3} = 6$ .

En effet, le père ayant actuellement 54 ans et le fils 9, dans 6 ans le père aura 60 ans et son fils 15; or 15 est égal au quart de 60; donc  $x = 6$  satisfait à l'énoncé.

Actuellement, supposons  $a = 45$ ,  $b = 15$ ; il vient  $x = \frac{54-60}{3}$ .

Cette expression peut être réduite à  $x = -5$ , en effectuant, autant que possible, la soustraction indiquée par  $45 - 60$ , ce qui donne  $-15$ , et divisant  $-15$  par 3, d'après la règle établie (n° 25) dans la division algébrique. Mais comment interpréter la solution négative  $x = -5$ ?

Remontons à l'équation du problème, qui, dans le cas particulier que nous considérons, est  $15 + x = \frac{45+x}{4}$ . Elle ren-

ferme une contradiction manifeste; car le second membre revient à  $\frac{45}{4} + \frac{x}{4}$ ; et chacune de ces deux parties est plus petite

que chacune des deux parties du premier membre. Mais si l'on remplace dans l'équation,  $+x$  par  $-5$ , il vient  $15 - 5 = \frac{45-5}{4}$ ,

ou  $10 = \frac{40}{4}$ , équation exacte, qui veut dire que si, au lieu d'a-

jouter un certain nombre d'années aux deux âges, on en retranche 5 ans, l'âge du fils sera le quart de celui du père. Ainsi, la solution que l'on vient de trouver, étant considérée indépendamment de son signe, satisfait à ce nouvel énoncé. *Un père a 45 ans, son fils en a 15; on demande à quelle époque l'âge du fils a été le quart de celui du père?*

L'équation de ce nouvel énoncé serait  $15 - x = \frac{45-x}{4}$ , d'où l'on tirerait  $60 - 4x = 45 - x$  et  $x = 5$ .

On voit, en effet, pour peu qu'on réfléchisse sur l'énoncé du problème, que le rapport de l'âge du fils à celui du père

étant actuellement  $\frac{15}{45}$ , ou  $\frac{1}{3}$ , l'âge du fils ne peut plus devenir le quart de celui du père, mais il l'a été précédemment, parce que, comme on l'a prouvé (n° 6) d'une manière générale, en ajoutant aux deux termes d'une fraction un même nombre, la fraction augmente toujours de valeur. Au contraire, elle diminue de valeur, lorsqu'on retranche un même nombre de ses deux termes.

59. En nous laissant conduire par l'analogie, nous pouvons établir ce principe général:

1°. Toute valeur négative trouvée pour l'inconnue d'un problème du premier degré, indique un vice dans le sens des conditions de l'énoncé, ou du moins, dans l'équation qui en est la traduction algébrique. (Voyez la remarque qui est à la suite de ce numéro.) 2°. Cette valeur, abstraction faite de son signe, peut être regardée comme la réponse à un problème dont l'énoncé ne diffère de celui du problème proposé, qu'en ce que certaines quantités, d'additives qu'elles étaient, sont devenues soustractives, et réciproquement.

*Démonstration.* La première partie de ce principe est facile à démontrer. En effet, si l'on trouve pour  $x$  une valeur négative, cela provient nécessairement de ce que, par la nature même de l'équation établie, on a été conduit à soustraire un nombre plus grand d'un nombre plus petit, opération inexecutable. C'est ainsi que les valeurs  $x = -7$ ,  $x = -5$ , sont provenues (n° 58) des équations  $x = 24 - 31$ ,  $x = \frac{45 - 60}{3}$ .

Or, si aucun nombre absolu (\*) mis pour  $x$ , ne peut vérifier l'équation à laquelle on est parvenu, en exécutant sur celle du problème les transformations indiquées (nos 43...45), il faut que cette première équation ne puisse elle-même être vérifiée dans le sens où elle a été formée; car l'exactitude

---

(\*) On appelle nombre absolu un nombre tel qu'on le considère en Arithmétique.

de ces transformations est bien constatée pour toute équation susceptible d'être vérifiée par un nombre *absolu* qu'on y mettrait pour l'inconnue.

Souvent, l'impossibilité de résoudre la question ou l'équation, dans le sens où elle a été établie, est évidente à la seule inspection, soit de l'énoncé, soit de l'équation; les deux problèmes précédens en sont des exemples. D'autres fois, cette impossibilité est difficile à découvrir; mais la suite des calculs finit toujours par la mettre dans tout son jour.

Passons à la seconde partie du principe.

Observons d'abord que, si dans l'équation, on remplace  $x$  par  $-x$ , tous les termes renfermant  $x$ , s'ils sont additifs, deviendront soustractifs, et réciproquement; car si l'on a, par exemple, le terme  $+ax$ , en mettant  $-x$  à la place de  $x$ , il deviendra  $+a \times -x$ , ou  $-ax$ . De même, si l'on a le terme  $-bx$ , il deviendra  $-b \times -x$ , ou  $+bx$ . Ainsi, en traduisant en langage ordinaire la nouvelle équation, on aura nécessairement un nouvel énoncé qui ne différera du premier qu'en ce que certaines quantités, d'additives qu'elles étaient, seront devenues soustractives, et réciproquement.

Il reste à faire voir maintenant que la substitution de  $-x$  à la place de  $x$  dans l'équation, donne lieu au résultat  $x = p$ , si l'on avait d'abord obtenu  $x = -p$  ( $p$  est ici regardé comme un nombre absolu).

Or, quelle que soit l'équation primitive du problème, on peut toujours, *par des transformations connues*, la supposer ramenée à la forme  $ax = -b$  ( $a$  et  $b$  étant des nombres absolus).

De cette équation, l'on tire  $x = \frac{-b}{a}$ , ou  $x = -\frac{b}{a}$ , ou bien enfin,  $x = -p$ ,  $p$  exprimant le nombre absolu  $\frac{b}{a}$ . Mais si l'on

met  $-x$  à la place de  $x$  dans l'équation primitive, on parviendra, en opérant sur la nouvelle équation comme sur la première, à l'équation  $-ax = -b$ .



d'où  $x = \frac{-b}{-a}$ , ou enfin,  $x = p$ .

*Ce qu'il fallait démontrer (\*)*.

On voit, par ce qui précède, de quelle manière on doit interpréter les solutions négatives. Elles peuvent être regardées, abstraction faite de leur signe, comme des réponses, non aux questions telles qu'elles ont été établies, mais à des questions de même nature, dont certaines conditions ont été modifiées; et, pour obtenir le nouvel énoncé, le moyen le plus sûr est de remonter à l'équation du problème, d'y changer  $x$  en  $-x$ , puis de traduire en langage ordinaire la nouvelle équation. (Voyez le n° 70 pour la démonstration du même principe, dans les équations du premier degré à plusieurs inconnues.)

60. *Remarque.* Le principe qu'on vient d'établir n'est rigoureusement vrai que pour les équations, et il ne l'est pas toujours pour les énoncés des problèmes; c'est-à-dire quel tel problème peut avoir un énoncé exact, lors même qu'en résolvant l'équation établie, on parvient à une valeur négative. Cela tient à ce que l'algébriste, dans l'application de sa méthode à la résolution d'un problème, prend souvent certaines conditions dans un sens opposé à celui où elles devraient être prises; et dans ce cas, la solution négative qu'il obtient redresse le point de vue sous lequel il a envisagé ces conditions. Ainsi, l'équation est vicieuse; quoique le problème soit susceptible d'être résolu; et ce n'est que lorsque l'équation est la traduction fidèle de l'énoncé et du sens de toutes ses conditions, que le principe est applicable aux énoncés. Nous en verrons des exemples par la suite; mais c'est principalement dans les applications de l'Algèbre aux questions de Géométrie, que le principe est applicable, moins aux énoncés qu'aux équations.

---

(\*) L'énoncé du principe précédent et une partie de la démonstration, sont extraits de l'ouvrage intitulé: *Réflexions sur la métaphysique du Calcul différentiel*, seconde édition, par M. Carnot.

Au reste, pour peu qu'on réfléchisse sur la démonstration qui en a été donnée, on verra que les raisonnemens portent plutôt sur les équations que sur les énoncés dont ces équations sont regardées comme la traduction algébrique.

61. Dans la démonstration précédente, on a été conduit à multiplier  $+a$  par  $-x$ , à diviser  $-b$  par  $+a$ ,  $-b$  par  $-a$ ; et l'on est parvenu aux résultats, en appliquant aux monomes les règles des signes établies pour la multiplication et la division des polynomes. Il peut paraître, au premier abord, nécessaire de démontrer ces règles par rapport aux monomes isolés, et c'est en effet ce que font presque tous les auteurs. Mais les démonstrations qu'ils en donnent n'ont que l'apparence de l'exactitude, ou laissent beaucoup de vague dans l'esprit. Nous dirons donc que l'on a étendu aux quantités inonomes les règles des signes établies et démontrées pour les polynomes, afin de donner une interprétation aux résultats singuliers que fournit l'Algèbre. En n'admettant point cette extension, on se priverait d'un des principaux avantages de la langue algébrique, lequel consiste à embrasser, dans une seule et même formule, les solutions de plusieurs questions de même nature, mais dont les énoncés diffèrent par le sens de certaines conditions, c'est-à-dire, en ce que certaines quantités sont additives dans les uns et soustractives dans les autres, et réciproquement.

L'extension aux quantités monomes, des règles établies pour les polynomes, peut encore être motivée par les considérations suivantes :

La démonstration exposée n° 17, pour la multiplication d'un binome  $a - b$  par un binome  $c - d$ , suppose évidemment  $a > b$  et  $c > d$ . Si le contraire a lieu, ces raisonnemens n'offrent plus à l'esprit aucun sens rigoureux; et cependant, la règle des signes une fois établie, on ne songe pas à la révoquer en doute, quels que soient les rapports de grandeur de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ .

Cela posé, le produit de  $a - b$  par  $c$  étant  $ac - bc$ , il

s'ensuit que le produit d'une expression négative  $a - b$ , ( $a$  étant  $< b$ ), par une quantité positive  $c$ , est négatif.

De même, le produit de  $b$  par  $c - d$  étant  $bc - bd$ , il en résulte que le produit d'une quantité positive  $b$  par une expression négative  $c - d$  ( $c$  étant  $< d$ ), est négatif.

Enfin, le produit de  $a - b$  par  $c - d$  étant, comme on l'a vu,  $ac - bc - ad + bd$ , expression qui peut se mettre sous la forme  $bd - ad - bc + ac$ , ou  $d(b - a) - c(b - a)$ , si l'on suppose  $d > c$  et  $b > a$  ou  $b - a$  positif, il en résulte nécessairement  $d(b - a) > c(b - a)$ , et par conséquent, ...  $d(b - a) - c(b - a)$ , positif. Donc le produit d'une expression négative  $a - b$  par une expression négative  $c - d$ , ( $a$  étant  $< b$  et  $c < d$ ), est positif.

C'est d'ailleurs là ce qui constitue l'un des caractères distinctifs de l'Algèbre. En Arithmétique comme en Géométrie, les raisonnemens portent toujours sur des êtres réels que l'esprit peut saisir, tandis qu'en Algèbre, on raisonne et l'on opère le plus souvent sur des êtres imaginaires, ou sur des symboles présentant des opérations inexécutables; mais l'exactitude des résultats qu'on obtient par ce moyen, et auxquels on parviendrait également par des procédés plus rigoureux, mais beaucoup plus longs, justifie suffisamment la marche qu'on a suivie.

62. Comme les règles des signes, relatives aux monomes, sont d'un usage continuel en Algèbre, il est à propos d'en présenter ici l'ensemble. D'ailleurs, nous en verrons dériver de nouvelles expressions, propres au langage algébrique.

Commençons par l'addition et la soustraction.

Pour ajouter  $+b$  ou  $-b$  avec une quantité exprimée par  $a$ , il faut écrire  $a + b$  ou  $a - b$ , c'est-à-dire écrire les deux monomes l'un à la suite de l'autre, avec leurs signes respectifs. (Voyez n° 13.)

Pour soustraire  $+b$  ou  $-b$  de  $a$ , il faut écrire  $a - b$  ou  $a + b$ , c'est-à-dire changer le signe du monome à soustraire, et l'écrire avec son nouveau signe, à la suite de celui dont il faut soustraire. (Voyez n° 14.)

Quant à la multiplication et à la division,

$+a \times +b$  ou  $-a \times -b$  donne pour produit  $+ab$   
 $-a \times +b$  ou  $+a \times -b$  donne pour produit  $-ab$  } (n° 17).

$+a : +b$  ou  $-a : -b$  donne pour quotient  $+\frac{a}{b}$   
 $-a : +b$  ou  $+a : -b$  donne pour quotient  $-\frac{a}{b}$  } (n° 25).

Ces règles donnent lieu à quelques remarques importantes.  
 1°. En Algèbre, le mot *ajouter* et le mot *somme* ne doivent pas toujours, comme en Arithmétique, entraîner avec eux l'idée d'augmentation; car le résultat,  $a - b$ , de l'addition de  $-b$  avec  $a$ , est, à proprement parler, une différence entre le nombre d'unités exprimé par  $a$  et le nombre d'unités exprimé par  $b$ ; par conséquent, ce résultat est moindre que  $a$ . Pour distinguer cette espèce de somme, d'une somme arithmétique, on lui donne le nom de *somme algébrique*. Ainsi, un polynôme tel que  $2a^3 - 3a^2b + 3b^2c - 2a^2c$ , est une *somme algébrique*, en tant qu'on le regarde comme le résultat de la réunion des monômes  $2a^3$ ,  $-3a^2b$ ,  $+3b^2c$ ,  $-2a^2c$  avec leurs signes respectifs; et son *acception propre* est la différence arithmétique entre la somme des unités contenues dans les termes additifs et la somme des unités contenues dans les termes soustractifs.

Il résulte de là qu'une somme algébrique peut, dans les applications numériques, se réduire à un nombre *négatif* ou affecté du signe  $-$ .

2°. Le mot *soustraire* et le mot *différence* n'offrent pas toujours l'idée de diminution; car la différence entre  $+a$  et  $-b$ , étant  $a + b$ , surpasse le nombre  $a$ ; c'est une *différence algébrique*, parce que le résultat peut être mis sous la forme  $a - (-b)$ .

Au moyen de ces dénominations, les valeurs négatives peuvent être regardées comme des réponses aux questions. Par exemple, dans l'équation  $31 + x = 24$ , le résultat  $x = -7$  indique qu'il faut ajouter  $-7$  à  $31$  pour obtenir  $24$ ; et en effet,  $31 + (-7)$ ; ou  $31 - 7$ , est égal à  $24$ .

Pareillement, dans l'équation  $15 + x = \frac{45 + x}{4}$ , le résultat  $x = -5$ , indique qu'il faut ajouter  $-5$  aux deux âges, pour que l'âge du fils soit le quart de celui du père. En effet, on a

$$15 + (-5) \text{ ou } 15 - 5 = 10, \\ 45 + (-5) \text{ ou } 45 - 5 = 40.$$

63. La nécessité d'employer les expressions négatives dans les calculs algébriques, et d'opérer sur elles comme sur les quantités absolues, a conduit les algébristes à deux autres propositions qui seront par la suite d'un usage très fréquent. En voici l'énoncé : *Toute quantité négative,  $-a$ , est plus petite que 0 ; et de deux quantités négatives, la plus petite est celle dont la valeur numérique ou absolue est la plus grande.*

Ainsi l'on a  $-a < 0$  et  $-a < -b$ , si  $a$  est numériquement plus grand que  $b$ .

*Démonstration.* Pour nous rendre compte de ces deux propositions, observons qu'en général, si d'un même nombre on retranche une suite de nombres de plus en plus grands, les restes doivent être de plus en plus petits. Cela posé, prenons au hasard un nombre entier, 6 par exemple, et de ce nombre retranchons successivement, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ... ; on trouve, en écrivant les différences sur une même ligne,

6—1, 6—2, 6—3, 6—4, 6—5, 6—6, 6—7, 6—8, 6—9,  
ou réduisant,

$$5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3.$$

D'où l'on voit que  $-1$  doit être regardé comme plus petit que 0, puisque celui-ci exprime la différence entre 6 et lui-même, tandis que  $-1$  exprime la différence entre 6 et un nombre plus grand.

Par la même raison,  $-1$  est plus grand que  $-2$ ,  $-3$  est plus grand que  $-4$ , quoique les valeurs numériques des premières expressions soient moindres que celles des dernières.

*Autre démonstration.* Dès que, pour interpréter tous les résultats singuliers que fournit la résolution algébrique d'une question, l'on est convenu de considérer les *expressions négatives* comme des quantités, il faut qu'en les soumettant aux mêmes opérations que les nombres absolus, on puisse parvenir à des résultats exacts. Or, on peut regarder comme un *axiome*, que, si un nombre  $a$  est plus grand qu'un autre  $b$ , en leur ajoutant un même nombre  $d$ , le premier résultat,  $a + d$ , est encore plus grand que le second,  $b + d$ .

Cela posé, en admettant les inégalités  $0 > -a$ , et.....  $-a > -(a + m)$ , ( $a$  et  $m$  sont ici des nombres absolus), si l'on ajoute aux deux membres de chacune d'elles,  $a + m$ , on trouve  $a + m > m$  et  $m > 0$ , ce qui est exact. Au contraire, si l'on posait  $0 < -a$  et  $-a < -(a + m)$ , il en résulterait  $a + m < m$  et  $m < 0$ , ce qui serait absurde.

En général, on doit admettre les deux propositions précédentes, si l'on veut opérer sur les *expressions négatives* comme sur les quantités absolues. Ces propositions sont, au reste, une espèce de *locution algébrique* analogue à celles dont nous nous servons souvent dans notre langue. Nous disons tous les jours d'une personne, qu'elle a *moins que rien*, pour exprimer qu'elle doit plus qu'elle ne possède; et de deux personnes, qui, ayant la même fortune, doivent plus qu'elles ne possèdent, que *la plus riche est celle qui doit le moins*.

*Discussion des problèmes du premier degré à deux ou plusieurs inconnues.*

64. Lorsque l'on a résolu un problème généralement, c'est-à-dire en représentant les données par des lettres, on peut se proposer de déterminer ce que deviennent les valeurs des inconnues, pour des hypothèses particulières faites sur les données. La détermination de ces différentes valeurs, et l'interprétation des résultats singuliers auxquels on parvient, forment ce qu'on appelle la *discussion du problème*.

Voici une question dont la discussion offre à peu près toutes

les circonstances qui se rencontrent dans les problèmes du premier degré.



Quatorzième problème. Deux courriers partent en même temps de deux points différens A et B d'une même ligne AR, et se dirigent dans le même sens AB. Le courrier qui part du point A fait  $m$  lieues par heure, et le courrier qui part du point B en fait un nombre  $n$ . On demande à quelles distances des points A et B, les deux courriers se rencontreront.

Solution. Soit R le point de rencontre; appelons  $x$  et  $y$  les distances inconnues AR et BR, exprimées en lieues, et  $a$  la distance AB qui sépare les deux courriers, au moment de leur départ. On a évidemment pour première équation,

$$x - y = a \dots (1).$$

Mais  $m$  et  $n$  exprimant les nombres de lieues faites par heure (ce sont les vitesses respectives des deux courriers), il s'ensuit que les temps employés pour parcourir les espaces  $x$  et  $y$ , sont

marqués par  $\frac{x}{m}$  et  $\frac{y}{n}$ ; d'ailleurs, ces deux temps sont égaux;

ainsi, l'on a pour seconde équation du problème,  $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$ ,

ou bien,  $nx - my = 0 \dots (2).$

Combinant les deux équations (1) et (2) entre elles, d'après les méthodes connues d'élimination, on obtient

$$x = \frac{am}{m-n}, \quad y = \frac{an}{m-n},$$

valeurs qu'il est aisé de vérifier.

Discussion. Tant que l'on supposera  $m > n$ , d'où  $m - n > 0$  ou positif, ces valeurs seront positives, et le problème sera résolu dans le sens propre de son énoncé. En effet, si le courrier A est supposé aller plus vite que le courrier B, on con-

coût qu'à chaque instant il gagne du chemin sur celui-ci; l'intervalle qui les séparait d'abord, diminue de plus en plus, jusqu'à ce qu'enfin il s'anéantisse tout-à-fait; et alors les deux courriers doivent se trouver au même point de la ligne qu'ils parcourent.

Mais si l'on suppose  $m < n$ , d'où  $m - n < 0$  ou négatif, les valeurs sont à la fois négatives, et deviennent

$$x = -\frac{am}{n-m}, \quad y = -\frac{an}{n-m}.$$

Pour interpréter ces résultats, observons qu'il est impossible que les deux courriers se rencontrent dans le sens AB, car le courrier B allant plus vite, l'intervalle qui les séparait ne fait qu'augmenter à chaque instant. Mais si, au lieu de supposer qu'ils se dirigent dans le sens AB, on suppose, au contraire, qu'ils se dirigent dans le sens BA, les circonstances devenant alors les mêmes que dans le cas  $m > n$ , il est clair que les deux courriers se rencontreront en un point R' du prolongement de BA. C'est ce qu'indique d'ailleurs le principe établi (n° 59). En effet, changeons les signes de  $x$  et de  $y$  dans les deux équations; il vient

$$\left. \begin{aligned} -x + y &= a \\ -\frac{x}{m} &= -\frac{y}{n} \end{aligned} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{aligned} y - x &= a, \\ \frac{x}{m} &= \frac{y}{n}, \end{aligned} \right.$$

équations qui, résolues, donnent

$$x = \frac{am}{n-m}, \quad y = \frac{an}{n-m}.$$

Ces valeurs vérifient le nouvel énoncé, dans lequel on suppose que les courriers se dirigent dans le sens BA.

Soit maintenant  $m = n$ , d'où  $m - n = 0$ ; les valeurs générales se réduisent à  $x = \frac{am}{0}$ ,  $y = \frac{an}{0}$ .

Comment interpréter ces nouveaux résultats?



En remontant d'abord à l'enquête, on voit qu'il y a impossibilité absolue d'y satisfaire; c'est-à-dire que, dans quelque sens de la ligne AB, que les deux courriers se dirigent, ils ne peuvent jamais se rencontrer, puisque les deux courriers étant d'abord à un intervalle  $a$  l'un de l'autre, et allant également vite, doivent conserver entre eux la même distance. On peut donc regarder le résultat,  $\frac{am}{0}$ , comme un nouveau signe d'impossibilité. En effet, si l'on reprend les équations du problème, elles deviennent, dans le cas de  $m = n$ ,

$$\left. \begin{array}{l} x - y = a, \\ \frac{x}{m} = \frac{y}{m} \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x - y = a, \\ x - y = 0, \end{array} \right.$$

équations évidemment incompatibles.

Cependant, les algébristes regardent les résultats  $x = \frac{am}{0}$ ,  $y = \frac{an}{0}$ , comme formant une espèce de valeur à laquelle ils donnent le nom de *valeur infinie*. En voici la raison :

Lorsque la différence  $m - n$ , sans être tout-à-fait nulle, est supposée très petite, les deux résultats,  $\frac{am}{m-n}$ ,  $\frac{an}{m-n}$ , sont très grands.

Soit, par exemple,  $m - n = 0,01$ ,  $m = 3$ ; d'où.....  
 $n = 3 - 0,01 = 2,99$ . Il vient

$$\frac{am}{m-n} = \frac{3a}{0,01} = 300a, \quad \frac{an}{m-n} = 299a.$$

Soit encore  $m - n = 0,0001$ ,  $m = 3$ , d'où  $n = 2,9999$ , il en résulte  $\frac{am}{m-n} = 30000a$ ,  $\frac{an}{m-n} = 29999a$ .

En un mot, tant que la différence des deux vitesses n'est pas nulle, les deux courriers se rencontrent; mais les distances du point de rencontre aux deux points de départ, deviennent de plus en plus grandes, à mesure que cette différence diminue.

Donc, si l'on suppose cette différence moindre qu'aucune grandeur donnée, les distances  $\frac{am}{m-n}$ ,  $\frac{an}{m-n}$  sont plus grandes qu'aucune quantité donnée, ou infinies. On dit alors, pour abrégé : soit  $m - n = 0$ , il en résulte  $x = \frac{am}{0}$ ,  $y = \frac{an}{0}$ , valeurs infinies.

Comme 0 est moindre que toute grandeur absolue, il s'ensuit que l'on peut prendre ce caractère pour désigner le dernier état d'une grandeur qui peut décroître autant que l'on veut. De même, comme un nombre fractionnaire est d'autant plus grand que son numérateur est plus grand par rapport à son dénominateur, il s'ensuit qu'une expression telle que  $\frac{A}{0}$  ( $A$  étant un nombre absolu quelconque), est très propre à exprimer une quantité infinie, c'est-à-dire une quantité plus grande qu'aucune quantité assignable.

L'infini s'exprime encore par un huit renversé,  $\infty$ ; et par conséquent, une quantité moindre qu'aucune grandeur donnée, ou 0, peut aussi s'exprimer par  $\frac{A}{\infty}$ ; car une fraction est d'autant plus petite, que son dénominateur est plus grand par rapport à son numérateur. Ainsi, 0 et  $\frac{A}{\infty}$ , sont des symboles synonymes; il en est de même de  $\frac{A}{0}$  et  $\infty$ .

Nous avons insisté sur ces dernières notions, parce qu'il y a des questions d'une nature telle, que l'infini peut être regardé comme une véritable réponse à l'énoncé. On en voit des exemples fréquens dans l'application de l'Algèbre aux questions de Géométrie.

En résumant ce que nous venons de dire, dans le cas de  $m = n$ , on voit qu'il n'y a pas, à proprement parler, de solution du problème, en nombres finis et déterminés; mais l'on trouve des valeurs infinies pour les inconnues.

Si, à l'hypothèse  $m = n$ , on ajoute celle-ci,  $a = 0$ , les deux

valeurs deviennent  $x = \frac{0}{0}$ ,  $y = \frac{0}{0}$ . Quel sens doit-on attacher à ce nouveau résultat ?

Reprenons l'énoncé, et observons que, si les deux courriers vont également vite et partent du même point, ils doivent être toujours ensemble, et par conséquent, se rencontrer en tous les points de la ligne qu'ils parcourent. Et en effet, les équations deviennent, dans la double hypothèse,  $m = n$ ,  $a = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} x - y &= 0 \\ \frac{x}{m} - \frac{y}{m} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{aligned} x - y &= 0, \\ x - y &= 0, \end{aligned} \right.$$

équations qui rentrent l'une dans l'autre. Ainsi la question est tout-à-fait indéterminée (n° 55), puisqu'on n'a réellement qu'une équation entre deux inconnues.

L'expression  $\frac{0}{0}$  est donc, dans ce cas, le *symbole d'une indétermination dans l'énoncé*.

Si les deux courriers ne vont pas également vite, c'est-à-dire que l'on ait  $m >$  ou  $< n$ , mais qu'on suppose  $a = 0$ , on trouve pour valeurs  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

En effet, les deux courriers partant du même point, et ayant des vitesses différentes, ne peuvent évidemment se trouver ensemble qu'au point de leur départ.

Les hypothèses précédentes sont les seules qui conduisent à des résultats remarquables. Elles suffisent d'ailleurs pour faire voir aux commençans de quelle manière l'Algèbre répond à toutes les circonstances de l'énoncé d'un problème.

Nous généraliserons bientôt la discussion précédente; mais auparavant, nous ferons une remarque de la plus grande importance dans les applications algébriques.

65. Lorsqu'un problème a été résolu généralement, on peut, au moyen des formules ou valeurs trouvées pour les inconnues, obtenir par de simples changemens de signe, celles qui conviennent à de nouveaux problèmes généraux dont les énoncés

ne diffèrent de celui du problème proposé, que par le sens de certaines quantités qui, d'additives qu'elles étaient, sont devenues soustractives, et réciproquement.

Prenons pour exemple le problème de l'ouvrier, résolu (n° 47). En supposant que l'ouvrier reçoive pour son décompte une somme  $c$ , on a les équations

$$\left. \begin{array}{l} x + y = n \\ ax - by = c \end{array} \right\}, \text{ d'où } x = \frac{bn + c}{a + b}, \quad y = \frac{an - c}{a + b}.$$

Mais, si l'on suppose au contraire que, tout décompte fait, l'ouvrier, au lieu de recevoir, doive une somme  $c$ , les équations

$$\text{seront alors } \left. \begin{array}{l} x + y = n \\ by - ax = c \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x + y = n, \\ ax - by = -c, \end{array} \right.$$

(on a changé les signes de la seconde équation.)

Or il est visible que, sans résoudre de nouveau ces équations, on peut obtenir sur-le-champ les valeurs de  $x$  et de  $y$  qui leur correspondent, en changeant simplement le signe de  $c$  dans les valeurs précédentes, ce qui donne

$$x = \frac{bn - c}{a + b}; \quad y = \frac{an + c}{a + b}.$$

Afin de le prouver rigoureusement, désignons pour le moment  $-c$  par  $d$ ; les équations deviennent alors  $\left\{ \begin{array}{l} x + y = n, \\ ax - by = d, \end{array} \right.$  équations qui ne diffèrent de celle du premier énoncé, qu'en ce que  $c$  est changé en  $d$ . Ainsi, l'on trouvera nécessairement

$$x = \frac{bn + d}{a + b}; \quad y = \frac{an - d}{a + b}.$$

Actuellement, si l'on remplace  $d$  par sa valeur  $-c$ , il vient

$$x = \frac{bn + (-c)}{a + b}; \quad y = \frac{an - (-c)}{a + b};$$

ou bien, en appliquant les règles établies (n° 62)

$$x = \frac{bn - c}{a + b}; \quad y = \frac{an + c}{a + b}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

On peut comprendre sous les mêmes formules, les résultats qui conviennent aux deux énoncés, en écrivant

$$x = \frac{bn \pm c}{a + b}, \quad y = \frac{an \mp c}{a + b}.$$

(Le double signe  $\pm$  s'énonce *plus ou moins*; les signes supérieurs correspondent au cas où l'ouvrier reçoit, et les signes inférieurs à celui où l'ouvrier doit une somme  $c$ .)

Ces formules comprennent encore le cas où, tout décompte fait, l'ouvrier et la personne qui l'emploie, sont quittes l'un envers l'autre. Il suffit de supposer  $c = 0$ , ce qui donne

$$x = \frac{bn}{a + b}, \quad y = \frac{an}{a + b}.$$

Soient encore les deux équations générales  $\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + fy = g, \end{cases}$

provenant de la traduction algébrique d'un problème quelconque. En multipliant la première équation par  $f$ , la seconde par  $b$ , et soustrayant la seconde de la première, on a

$$(af - bd)x = cf - bg, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{cf - bg}{af - bd}.$$

On trouverait de même

$$y = \frac{ag - cd}{af - bd}.$$

Cela posé, pour passer de ces formules,

1°. à celles qui conviennent aux équations  $\begin{cases} ax - by = c, \\ dx + fy = g, \end{cases}$

il suffit de changer  $b$  en  $-b$ , ce qui donne

$$x = \frac{cf + bg}{af + bd}, \quad y = \frac{ag - cd}{af + bd};$$

2°. aux formules relatives aux équations  $\begin{cases} ax - by = c, \\ dx - fy = g, \end{cases}$

il suffit de changer  $b$  en  $-b$  et  $f$  en  $-f$ , ce qui donne les formules

$$x = \frac{-cf + bg}{-af + bd} = \frac{bg - cf}{bd - af}, \quad y = \frac{ag - cd}{bd - af}$$

La démonstration en est absolument la même que dans l'exemple précédent; ainsi nous ne la répéterons pas.

#### § IV. *Discussion générale des problèmes et des équations du premier degré.*

66. Afin de pouvoir généraliser la discussion des problèmes du premier degré à une ou plusieurs inconnues, nous allons nous proposer d'établir des formules qui puissent représenter les valeurs des inconnues, pour un système quelconque d'équations renfermant un pareil nombre d'inconnues.

D'abord, toute équation du premier degré à une seule inconnue peut, au moyen des transformations usitées, être ramenée à la forme  $ax = b$ ;  $a$  désignant la somme algébrique des quantités qui multiplient l'inconnue, et  $b$  la somme algébrique des termes tout connus.

On déduit évidemment de cette équation,  $x = \frac{b}{a}$ .

Observons en second lieu, que toute équation du premier degré à deux inconnues peut être représentée par.....  $ax + by = c$ . En effet, si l'équation proposée renferme des dénominateurs, on les fait d'abord disparaître (n° 44); réunissant ensuite tous les termes affectés de  $x$  et tous les termes affectés de  $y$  dans le premier membre, puis faisant passer tous les termes connus dans le second membre, on peut désigner la somme algébrique des premiers par  $ax$ , la somme algébrique des seconds par  $by$ , et la somme algébrique des derniers par  $c$ ;  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , sont alors des quantités entières de signes quelconques.

Soient donc proposées les deux équations  $\begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$

On obtient, en multipliant la première équation par  $b'$ , la seconde par  $b$ , et les retranchant l'une de l'autre,

$$(ab' - ba')x = cb' - bc', \text{ d'où } x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'};$$

on trouverait de même  $y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$

Soient maintenant les trois équations

$$ax + by + cz = d \dots \dots \dots (1),$$

$$a'x + b'y + c'z = d' \dots \dots \dots (2),$$

$$a''x + b''y + c''z = d'' \dots \dots \dots (3).$$

Pour éliminer  $z$ , multiplions la première équation par  $c'$ , la seconde par  $c$ , et retranchons la seconde de la première.

$$\text{Il vient } (ac' - ca')x + (bc' - cb')y = dc' - cd' \dots (4).$$

Combinant de même la seconde équation avec la troisième, on trouve  $(a'c'' - c'a'')x + (b'c'' - c'b'')y = d'c'' - c'd'' \dots (5).$

Actuellement, pour éliminer  $y$ , il faut multiplier l'équation (4) par  $b'c'' - c'b''$ , et l'équation (5) par  $bc' - cb'$ , puis retrancher, ce qui donne

$$[(ac' - ca')(b'c'' - c'b'') - (a'c'' - c'a'')(bc' - cb')]x = (dc' - cd')(b'c'' - c'b'') - (c'd'' - d'c'')(bc' - cb');$$

ou, effectuant les calculs, réduisant et divisant les deux membres par  $c'$ ,

$$(ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'')x = db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'a'' - cb'a''.$$

Donc enfin,

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'a'' - cb'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

En effectuant des calculs analogues, pour éliminer  $x$  et  $z$ , ensuite  $x$  et  $y$ , on trouverait, pour  $y$  et  $z$ ,

$$y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''};$$

$$z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

Comme les commençans ne sauraient trop s'exercer à abréger les calculs le plus possible, nous indiquerons ici un moyen de passer de la valeur de  $x$  aux valeurs de  $y$  et de  $z$ , sans qu'on soit obligé de recommencer tous les calculs précédens.

Observons que le système des équations (1), (2) et (3), resterait le même, si l'on y mettait pour  $x, a, a', a''$ , les quantités  $y, b, b'$  et  $b''$ , et *réciroquement*; donc, si dans l'expression qui donne la valeur de  $x$ , on change  $x$  en  $y$ , puis  $a, a', a''$  qui sont les coefficients de  $x$ , en  $b, b', b''$  qui sont les coefficients de  $y$ , et *réciroquement*, on obtiendra un résultat qui ne sera autre chose que la valeur de  $y$ .

Effectuant cet échange, on a

$$y = \frac{da'c'' - dc'a'' + cd'a'' - ad'c'' + ac'd'' - ca'd''}{ba'c'' - bc'a'' + cb'a'' - ab'c'' + ac'b'' - ca'b''},$$

ou, changeant les signes du numérateur et du dénominateur, et écrivant dans l'un et l'autre, les trois derniers termes les premiers, et les trois premiers termes les derniers,

$$y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

Parcillemt, on obtiendrait la valeur de  $z$  en changeant  $x, a, a', a''$ , en  $z, c, c', c''$ , et *réciroquement*.

On voit assez la marche qu'il faudrait suivre, si l'on avait quatre équations et quatre inconnues, etc.

*N. B.* Pour peu qu'on réfléchisse sur la manière dont ces formules ont été obtenues, on sent aisément que, pour un nombre quelconque d'équations renfermant un pareil nombre d'incon-



nues,  $x, y, z, \dots$ , il ne peut exister, en général, qu'un seul système de valeurs de  $x, y, z, \dots$ , propre à vérifier les équations.

D'abord la proposition est évidente pour une équation à une seule inconnue,  $ax=b$ . Il n'y a que la valeur  $\frac{b}{a}$  qui puisse y satisfaire.

Considérons deux équations à deux inconnues.

Après qu'on a multiplié la première équation par le coefficient de  $y$  dans la seconde, et réciproquement, le résultat qu'on obtient, en les soustrayant l'une de l'autre, peut être substitué à l'une des deux équations proposées. Or, ce résultat ne renfermant qu'une inconnue, n'admet pour cette inconnue qu'une seule valeur qui, reportée dans l'une des équations proposées, ne donnera également qu'une valeur pour  $y$ . Même raisonnement pour trois équations à trois inconnues.

67. L'emploi des accens, dans les notations des coefficients, a donné lieu à l'observation d'une loi d'après laquelle on peut facilement retrouver les formules précédentes, sans être obligé d'effectuer l'élimination.

Considérons d'abord le cas de deux équations à deux inconnues. On a trouvé, pour les valeurs,

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

1°. Pour obtenir le dénominateur commun à ces deux valeurs, formez avec les lettres  $a$  et  $b$ , qui désignent les coefficients de  $x$  et de  $y$  dans la première équation, les deux arrangements  $ab$  et  $ba$ , puis interposez le signe  $-$ , ce qui donne  $ab - ba$ ; enfin, accentuez dans chaque terme la dernière lettre; il vient

$$ab' - ba'.$$

2°. Pour obtenir le numérateur relatif à chaque inconnue, remplacez, dans ce dénominateur, la lettre qui désigne le coefficient de cette inconnue, par la lettre qui désigne la quantité

toute connue, en laissant toutefois les accens à la même place. D'après cela,  $ab' - ba'$  se change en  $cb' - bc'$ , pour la valeur de  $x$ , et en  $ac' - ca'$ , pour la valeur de  $y$ .

Considérons actuellement le cas de 3 équations à 3 inconnues,  $a, b, c$  désignant les coefficients de  $x, y, z$ , et  $d$  la quantité toute connue. 1°. Pour avoir le dénominateur commun, prenez le dénominateur  $ab - ba$ , qui convient au cas de deux inconnues (abstraction faite des accens); introduisez la lettre  $c$  dans chacun des deux termes  $ab$  et  $ba$  à toutes les places, savoir, à droite, au milieu et à gauche; puis interposez des signes alternativement positifs et négatifs; il en résulte...  $abc - acb + cab - bac + bca - cba$ . Mettez ensuite, dans chaque terme, l'accent' sur la deuxième lettre, et l'accent" sur la troisième lettre; il vient, pour le dénominateur,

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''.$$

2°. Pour former le numérateur de chaque inconnue, remplacez dans le dénominateur, la lettre qui désigne le coefficient de cette inconnue, par la lettre qui désigne la quantité toute connue, en laissant les accens à la même place. Ainsi pour  $x$ , changez  $a$  en  $d$ ; pour  $y$ ,  $b$  en  $d$ , et pour  $z$ ,  $c$  en  $d$ .

Cette loi, qui peut être regardée comme un résultat d'observation pour deux ou trois équations, est susceptible de s'étendre à un nombre quelconque d'équations; mais la démonstration en est très compliquée, et sort tout-à-fait des élémens. Nous renvoyons, pour cet objet, à la seconde partie de l'Algèbre de Garnier, qui en rapporte une de Laplace. Cette démonstration est extraite des Mémoires de l'Académie des Sciences, 1772.

68. Voyons l'usage qu'on peut faire de ces formules, dans les applications particulières.

Soient les deux équations  $5x - 7y = 34$ ,  $3x - 13y = -6$ .

En les comparant aux équations générales,  $ax + by = c$ ,  $a'x + b'y = c'$ , on a  $a = 5$ ,  $b = -7$ ,  $c = 34$ ,  $a' = 3$ ,  $b' = -13$ ,  $c' = -6$ .

Substituons dans les formules  $x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$ ,  $y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$ ,

à la place de  $a, b, c, a', b', c'$ , ces valeurs; il vient

$$\begin{aligned} 1^{\circ}. x &= \frac{34 \times -13 - (-7) \times -6}{5 \times -13 - (-7) \times 3} = \frac{-34 \times 13 - 7 \times 6}{-5 \times 13 + 7 \times 3} \\ &= \frac{-442 - 42}{-65 + 21} = \frac{-484}{-44} = 11; \end{aligned}$$

$$2^{\circ}. y = \frac{5 \times -6 - 34 \times 3}{5 \times -13 - (-7) \times 3} = \frac{-30 - 102}{-65 + 21} = \frac{-132}{-44} = 3;$$

et je dis que  $x=11$ ,  $y=3$ , sont les valeurs propres à satisfaire aux deux équations proposées.

Nous pourrions d'abord nous en assurer, en les substituant dans ces équations. Mais, afin que la démonstration soit indépendante de tout exemple particulier, remarquons que, pour passer des formules relatives aux équations  $ax + by = c$  et  $a'x + b'y = c'$ , à celles qui conviennent aux équations  $ax - by = c$  et  $a'x - b'y = -c'$ , il suffit (n° 65) de changer  $b$  en  $-b$ ,  $b'$  en  $-b'$ , et  $c$  en  $-c'$ , ce qui donne  $x = \frac{c \times -b' - (-b) \times -c'}{a \times -b' - (-b) \times a'}$ ,

$y = \frac{a \times -c' - c \times a'}{a \times -b' - (-b) \times a'}$ ; et, pour déduire de ces nouvelles formules générales, les valeurs qui conviennent aux équations particulières, il faut faire  $a=5$ ,  $b=7$ ,  $c=34$ ,  $a'=3$ ,  $b'=-13$ ,  $c'=-6$ .

Donc enfin, pour obtenir les valeurs relatives aux équations proposées, il suffit de faire, dans les formules générales obtenues précédemment,  $a=5$ ,  $b=-7$ ,  $c=34$ ,  $a'=3$ ,  $b'=-13$ ,  $c'=-6$ , puis d'effectuer les calculs, d'après les règles établies pour les quantités monomes.

*La règle consiste en général, à substituer à la place des coefficients  $a, b, a', b' \dots$ , leurs valeurs particulières considérées avec les signes dont elles sont affectées dans les équations*

particulières, et à effectuer toutes les opérations indiquées, d'après les préceptes établis.

Ces applications justifient de nouveau la nécessité d'étendre aux quantités monomes les règles des signes établies pour les polynomes, puisque c'est le moyen de rendre les formules générales du premier degré, applicables à tout exemple particulier.

Passons à la discussion de ces formules.

6<sup>e</sup>. Il résulte de leur inspection que, dans les applications particulières, on peut obtenir quatre espèces de valeurs pour réponses à des problèmes du premier degré, savoir : des valeurs positives, des valeurs négatives, des valeurs de la forme  $\frac{A}{0}$ , enfin, des valeurs de la forme  $\frac{0}{0}$ . Le problème des courriers a donné lieu à ces quatre résultats que nous nous proposons maintenant d'interpréter d'une manière générale.

D'abord, les valeurs positives sont ordinairement des réponses aux questions, dans le sens de leur énoncé. Cependant nous observerons que, pour certains problèmes, toutes les valeurs positives ne satisfont pas à l'énoncé. Si, par exemple, la nature du problème exige que les nombres cherchés soient entiers, et qu'on trouve des nombres fractionnaires, le problème ne peut être résolu. Quelquefois encore la nature du problème ne permet pas que les nombres inconnus surpassent des nombres connus et donnés *a priori*, ou soient au-dessous d'autres nombres. Si les valeurs obtenues, quoique positives, ne satisfont pas à cette condition que comporte l'énoncé, mais qui ne peut s'exprimer par une équation, le problème ne peut encore être résolu. Ainsi, les valeurs positives des inconnues sont, à proprement parler, des réponses directes aux équations; et elles ne sont des solutions de la question, qu'autant que leur nature se concilie avec celle qu'exige l'énoncé. Pour concevoir comment un nombre peut vérifier une équation, sans vérifier le problème dont elle est la traduction algébrique, il suffit de remarquer qu'une même équation est la traduction algébrique d'une infinité de problèmes, dont les uns admettent tous les nombres absolus possibles pour solu-

tion, et les autres n'admettent que des nombres d'une certaine nature.

70. Nous savons déjà à quoi nous en tenir sur les *valeurs négatives*, pour les problèmes à une seule inconnue. Afin de ne rien laisser à désirer, nous allons *démontrer le principe* du n° 59 pour un problème à plusieurs inconnues.

Il est évident d'abord que, si l'on obtient des valeurs négatives pour quelques-unes des inconnues, les équations du problème ne peuvent être satisfaites dans le sens où elles ont été établies; car si un système de nombres absolus, mis pour  $x, y, z, \dots$ , pouvait les vérifier, les équations qui en ont été déduites par la méthode d'élimination, devraient elles-mêmes exister pour ce système. Ainsi l'équation qui ne renferme plus qu'une des inconnues, pour lesquelles on a obtenu un résultat négatif, devrait être vérifiée par un nombre absolu, ce qui serait contre l'hypothèse. *Il faut donc rectifier l'énoncé du problème, ou du moins, les équations qui en sont la traduction algébrique.*

Actuellement, si, dans les équations, on change les signes des inconnues pour lesquelles on a obtenu des résultats négatifs, les termes affectés de ces inconnues changeront nécessairement de signe, et l'énoncé du problème sera généralement modifié en ce que *certaines quantités d'additives qu'elles étaient, deviendront soustractives, et réciproquement.*

Je dis enfin que ces modifications une fois faites, le *nouvel énoncé est vérifié par les valeurs obtenues d'abord pour les inconnues, abstraction faite de leurs signes.* Prenons, pour fixer les idées, trois équations à trois inconnues,

$$ax + by + cz = d, \quad a'x + b'y + c'z = d', \quad a''x + b''y + c''z = d'',$$

et supposons que ces équations aient donné  $x = p, y = -q, z = -r$ ; changeons dans ces équations,  $y$  et  $z$  en  $-y$  et  $-z$ , ou bien en  $y'$  et  $z'$  (en désignant pour le moment,  $-y$  et  $-z$  par  $y'$  et  $z'$ ). Il vient

$$ax + by' + cz' = d, \quad a'x + b'y' + c'z' = d', \quad a''x + b''y' + c''z' = d''.$$

Or, ces équations ne différant des précédentes, qu'en ce que  $y$  et  $z$  sont remplacés par  $y'$  et  $z'$ , donneront nécessairement pour résultats:  $x=p$ ,  $y'=-q$ ,  $z'=-r$ ; d'où, remettant  $-y$  et  $-z$  à la place de  $y'$  et  $z'$ ... ,  $x=p$ ,  $-y=-q$ ,  $-z=-r$ , ou bien enfin,  $x=p$ ,  $y=q$ ,  $z=r$ ; ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi le principe du n° 59 est vrai pour les problèmes du premier degré à plusieurs inconnues.

Nous terminerons par cette observation, que quelquefois l'énoncé d'un problème n'est, par sa nature, susceptible d'aucune modification; dans ce cas, les valeurs négatives ne sont que des solutions des équations modifiées, qui peuvent d'ailleurs être regardées comme la traduction algébrique d'autres problèmes susceptibles de modification.

71. Il nous reste maintenant à interpréter les expressions telles que  $\frac{A}{0}$ ,  $\frac{0}{0}$ .

Soit d'abord l'équation à une inconnue,  $ax=b$ , d'où  $x=\frac{b}{a}$ .

1°. Si, pour une hypothèse particulière faite sur les données de la question, on a  $a=0$ , il en résulte  $x=\frac{b}{0}$ .

Or l'équation devient, dans ce même cas,  $0 \times x=b$ , et ne peut évidemment être satisfaite par aucun nombre déterminé. Remarquons cependant que, l'équation pouvant aussi se mettre

sous la forme  $\frac{b}{x}=0$ , si l'on met à la place de  $x$ , des nombres

de plus en plus grands,  $\frac{b}{x}$  différera de moins en moins de 0, et

l'équation approchera de plus en plus d'être exacte; en sorte qu'on peut prendre pour  $x$  une valeur assez grande pour que  $\frac{b}{x}$  soit moindre qu'aucune quantité assignable.

C'est pour cette raison que les Algébristes ont coutume de dire que l'infini satisfait, dans ce cas, à l'équation; et il y a des

questions pour lesquelles ces sortes de résultats forment une véritable solution; mais du moins, il est certain que l'équation ne peut admettre de solution en nombre *fini*, et c'est tout ce qu'on veut prouver.

2°. Si l'on a en même temps,  $a = 0$ ,  $b = 0$ , la valeur de  $x$  prend la forme  $x = \frac{0}{0}$ .

Or, l'équation devient, dans ce cas,  $0 \times x = 0$ , et tout nombre *fini*, positif ou négatif, peut satisfaire à cette équation.

Ainsi l'équation (ou le problème dont elle est la traduction algébrique) est indéterminée.

72. C'est ici le lieu de faire une remarque importante sur l'expression  $\frac{0}{0}$ , qui n'annonce pas toujours une indétermination, mais bien l'existence d'un facteur commun aux deux termes de la fraction, lequel facteur devient nul, par l'effet d'une hypothèse particulière.

Supposons, par exemple, qu'on ait trouvé pour le résultat de la solution d'un problème,  $\dots x = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$ .

Si l'on fait dans cette formule,  $a = b$ , il en résulte  $x = \frac{0}{0}$ .

Mais remarquons que  $a^3 - b^3$  peut (n° 31) se mettre sous la forme  $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ , et que  $a^2 - b^2$  est égal à  $(a - b)(a + b)$ ; ainsi, la valeur de  $x$  revient à

$$x = \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{(a - b)(a + b)}.$$

Or, si, avant de faire l'hypothèse  $a = b$ , on commence par supprimer le facteur commun  $a - b$ , la valeur de  $x$  devient

$$x = \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}, \text{ expression qui se réduit à } x = \frac{3a^2}{2a} \text{ ou}$$

$$x = \frac{3a}{2}, \text{ dans l'hypothèse de } a = b.$$

Soit, pour second exemple, l'expression

$$\frac{a^2 - b^2}{(a-b)^2} = \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)(a-b)}.$$

En faisant  $a=b$ , on trouve pour la valeur de  $x$ ,  $x = \frac{0}{0}$ , à cause de l'existence du facteur commun  $a-b$ ; mais si l'on supprime d'abord ce facteur, il vient  $x = \frac{a+b}{a-b}$ , expression qui se réduit à  $x = \frac{2a}{0}$ , lorsque l'on fait  $a=b$ .

Concluons de là que le symbole  $\frac{0}{0}$  est quelquefois en Algèbre l'indice de l'existence d'un facteur commun entre les deux termes de la fraction qui se réduit à cette forme. Ainsi, avant de rien prononcer sur la vraie valeur de la fraction, il faut s'assurer si ses deux termes ne renferment pas un facteur commun. Dèsqu'il n'en existe pas, on conclut que l'équation est réellement *indéterminée*. S'il en existe un, on le supprime, puis on fait de nouveau l'hypothèse particulière, ce qui donne la vraie valeur de la fraction, qui peut encore se présenter sous trois formes,  $\frac{A}{B}$ ,  $\frac{A}{0}$ ,  $\frac{0}{0}$ ; auquel cas, l'équation est *déterminée*, *impossible* en nombre fini, ou *indéterminée*.

Cette observation est très utile dans la discussion des problèmes.

73. Revenons à notre objet, et considérons maintenant les deux équations à deux inconnues,  $\begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$

On a trouvé (n° 66) pour les valeurs de  $x$  et de  $y$ ,

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Supposons que l'on ait  $ab' - ba' = 0$ , les numérateurs  $cb' - bc'$ ,  $ac' - ca'$ , étant d'ailleurs différens de 0; les valeurs se réduisent à  $x = \frac{A}{0}$ ,  $y = \frac{B}{0}$ .



Pour interpréter ces résultats, remarquons que, de l'équation  $ab' - ba' = 0$ , on tire  $a' = \frac{ab'}{b}$ , d'où, substituant cette valeur dans

$$\text{l'équation } a'x + b'y = c', \quad \frac{ab'}{b}x + b'y = c';$$

ou, chassant le dénominateur et divisant par  $b'$ ,

$$ax + by = \frac{bc'}{b'},$$

équation dont le premier membre est identique avec celui de la première

$$ax + by = c,$$

tandis que le second membre est essentiellement différent; car de l'inégalité  $cb' > bc'$ , on déduit  $c > \frac{bc'}{b'}$ .

On voit donc que les deux équations proposées ne peuvent être satisfaites simultanément par aucun système de valeurs finies de  $x$  et de  $y$ .

Si l'on a en même temps,  $ab' - ba' = 0$ ,  $cb' - bc' = 0$ , la valeur de  $x$  se réduit à  $x = \frac{0}{0}$ , valeur qu'il faut interpréter.

Les deux équations proposées peuvent, en vertu de la relation

$$ab' - ba' = 0, \text{ se mettre sous la forme } \begin{cases} ax + by = c, \\ ax + by = \frac{bc'}{b'}, \end{cases}$$

équations qui rentrent nécessairement l'une dans l'autre; car de la relation  $cb' - bc' = 0$ , on déduit  $c = \frac{bc'}{b'}$ .

Ainsi, pour résoudre le problème, on n'a réellement qu'une seule équation entre deux inconnues. Donc, la question est indéterminée.

Comme la relation,  $ab' - ba' = 0$ , donne  $b' = \frac{ba'}{a}$ , d'où, substituant dans la relation  $cb' - bc' = 0$ ,  $\frac{cba'}{a} - bc' = 0$ , ou rédui-

sant,  $ca' - ac' = 0$ , on peut conclure que, si la valeur de  $x$  est de la forme  $\frac{0}{0}$ , la valeur de  $y$  est GÉNÉRALEMENT de même forme, et réciproquement.

Je dis généralement, car, si l'on avait en même temps  $b = 0$ ,  $b' = 0$ , les deux expressions  $ab' - ba'$ ,  $cb' - bc'$ , seraient nécessairement nulles, sans qu'il en résultât aucune valeur déterminée pour  $ac' - ca'$ .

Dans ce cas particulier, les deux valeurs de  $x$  et de  $y$  se réduisent à

$$x = \frac{0}{0}, \text{ et } y = \frac{ac' - ca'}{0} \text{ ou } \frac{\Lambda}{0}.$$

Réciproquement, si l'on avait à la fois  $a = 0$ ,  $a' = 0$ , il en résulterait

$$x = \frac{cb' - bc'}{0} \text{ ou } \frac{\Lambda}{0}, \text{ et } y = \frac{0}{0}.$$

Mais ce cas particulier n'est guère admissible, puisqu'alors, les équations proposées se réduiraient à deux équations à une seule inconnue,

$$\text{savoir, } \left. \begin{array}{l} ax = c \\ a'x = c' \end{array} \right\} \text{ en supposant } b = 0, b' = 0;$$

$$\text{et } \left. \begin{array}{l} by = c \\ b'y = c' \end{array} \right\} \text{ en supposant } a = 0, a' = 0;$$

tandis que nous traitons ici le cas de deux équations à deux inconnues.

74. La marche précédente serait difficilement applicable au cas où l'on aurait plus de deux équations; mais on peut y suppléer par les raisonnemens suivans.

Pour fixer les idées, considérons quatre équations (1), (2), (3), (4), renfermant les quatre inconnues  $x, y, z, u$ .

Désignons par  $\frac{\Lambda}{D}$ , la valeur de  $x$  à laquelle on est parvenu par le secours de l'élimination, et supposons que, pour une certaine

hypothèse faite sur les données, on ait  $D = 0$ ,  $A$  étant quelconque ou égal à 0; je dis que, dans le premier cas, les équations proposées ne peuvent être satisfaites par des valeurs finies; et que, dans le second, elles sont indéterminées, ou susceptibles d'être vérifiées par une infinité de systèmes de valeurs de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $u$ .

En effet, il résulte de la méthode d'élimination, que le système des équations (1), (2), (3) et (4) peut être remplacé par quatre autres équations, dont l'une est  $Dx = A$ ; la seconde est une équation en  $x$  et  $y$ ; la troisième, une équation en  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , et la quatrième, l'une des équations proposées, l'équation (1), par exemple.

Cela posé, 1°. si la valeur de  $x$  se réduit à la forme  $\frac{A}{0}$ , comme l'équation en  $x$  devient alors...  $0 \times x = A$ , et qu'elle est d'ailleurs une conséquence de l'existence simultanée des équations proposées, il faut que ces équations soient impossibles en nombres finis, puisque l'équation  $0 \times x = A$  ne peut être satisfaite par aucun nombre fini.

2°. Si la valeur de  $x$  se réduit à la forme  $\frac{0}{0}$  (sans qu'il existe aucun facteur commun entre les deux termes de son expression), l'équation  $Dx = A$  devient  $0 \times x = 0$ , et peut être satisfaite par une infinité de valeurs de  $x$ . En substituant chacune de ces valeurs dans l'équation en  $x$  et  $y$ , dont nous avons parlé plus haut, on obtiendra une infinité de valeurs correspondantes pour  $y$ ; substituant tous ces systèmes de valeurs de  $x$  et de  $y$ , dans l'équation en  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , on trouvera une infinité de valeurs pour  $z$ ; enfin, substituons tous ces systèmes de valeurs de  $x$ ,  $y$  et  $z$ , dans l'équation (1), il en résultera une infinité de valeurs pour  $u$ ; et tous ces systèmes, ainsi obtenus, satisferont nécessairement aux quatre équations proposées.

75. La première partie de cette proposition n'est sujette à aucune restriction; toutes les fois qu'on trouve pour la valeur de l'une des inconnues, un résultat de la forme  $\frac{A}{0}$ , c'est un signe cer-

tain que les équations sont *impossibles* en nombres *finis*, du moins pour cette inconnue.

Quant à la seconde partie, elle souffre de nombreuses modifications; c'est-à-dire qu'on peut obtenir pour une ou plusieurs des inconnues, des résultats de la forme  $\frac{0}{0}$ , sans, pour cela, qu'on puisse en conclure que les équations sont *indéterminées*. Quelquefois même, l'une des inconnues ayant une valeur de la forme  $\frac{0}{0}$ , on obtient les autres sous la forme  $\frac{\Lambda}{0}$ .

Les systèmes suivans en fournissent la preuve :

$$\begin{array}{l} 1^{\text{er}} \text{ système d'équations. } \left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz = d, \\ ax + by + cz = d', \\ ax + by + cz = d'', \end{array} \right. \\ 2^{\text{e}} \text{ système. } \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz = d, \\ d'x + by + cz = d', \\ a''x + by + cz = d'', \end{array} \right. \\ 3^{\text{e}} \text{ système. } \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} x + y + mz = p, \\ x + y + mz = q, \\ x + y + nz = r. \end{array} \right. \end{array}$$

Si l'on applique les formules générales du n° 66 au premier système, on trouve

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}, \quad z = \frac{0}{0};$$

et cependant, en considérant ce système, on reconnaît facilement qu'il ne peut exister en nombres *finis* (les premiers membres restant les mêmes), à moins que l'on n'ait  $d=d'=d''$ . Il est vrai que, du moment où cette relation existe, le système devient *indéterminé*, puisqu'il se réduit alors à *une seule équation à trois inconnues*; mais il n'en est pas moins certain que, dans son état actuel, il y a incompatibilité entre les équations.

La première des formules du n° 66, appliquée au second système, donne  $x = \frac{0}{0}$ , résultat qu'il faut interpréter. Pour que ce deuxième système puisse exister (les premiers

membres restant les mêmes), il faut nécessairement que l'on ait

$$d - ax = d' - a'x,$$

et 
$$d - ax = d'' - a''x.$$

Or, la première de ces deux relations donne

$$x = \frac{d' - d}{a' - a}; \text{ et la seconde, } x = \frac{d'' - d}{a'' - a}.$$

Comme ces deux valeurs de  $x$  doivent s'accorder entre elles, il en résulte l'égalité de condition.....  $\frac{d' - d}{a' - a} = \frac{d'' - d}{a'' - a}.$

Tant que cette relation entre les quantités  $a, d, a', d', a'', d''$ , ne sera pas satisfaite, le second système sera impossible, quoiqu'on ait obtenu des valeurs de la forme  $\frac{0}{0}$ , pour chacune des inconnues.

Si cette relation est satisfaite, la valeur de  $x$  deviendra déterminée, et sera égale à  $\frac{d' - d}{a' - a}$  ou  $\frac{d'' - d}{a'' - a}$ ; mais les valeurs de  $y$  et de  $z$  seront indéterminées, puisqu'on n'aura plus qu'une seule équation entre ces deux inconnues.

Appliquons les formules du n° 66 au troisième système;....

on trouve 
$$x = \frac{(m - n)(p - q)}{0},$$

$$y = \frac{(n - m)(p - q)}{0},$$

$$z = \frac{0}{0};$$

c'est-à-dire que deux valeurs sont de la forme  $\frac{A}{0}$ , et l'autre de la forme  $\frac{0}{0}$ .

Dans cet exemple, pour que les deux premières équations soient possibles simultanément (les premiers membres restant

les mêmes), il faut qu'on ait  $p=q$ ; auquel cas, les deux valeurs de  $x$  et de  $y$  se réduisent aussi à la forme  $\frac{0}{0}$ .

Cette condition admise, je dis que la valeur de  $z$ , pour laquelle on a trouvé  $\frac{0}{0}$ , devient *déterminée*, et que les deux autres sont *indéterminées*.

En effet, le système se réduit alors aux deux équations

$$x + y + mz = p,$$

$$x + y + nz = r,$$

qui, retranchées l'une de l'autre, donnent

$$(m - n)z = p - r; \text{ d'où } z = \frac{p - r}{m - n}.$$

Reportant cette valeur dans les deux équations, il en résulte l'équation unique

$$x + y = \frac{mr - pn}{m - n}.$$

Les cas que nous venons d'examiner suffisent pour convaincre, 1°. que, dans les applications des formules générales à des systèmes particuliers, les valeurs des inconnues peuvent se présenter, les unes sous la forme  $\frac{A}{0}$ , les autres sous la forme  $\frac{0}{0}$ ; 2°. que le symbole  $\frac{0}{0}$ , obtenu pour chacune d'elles, ne caractérise pas nécessairement l'*indétermination* des équations.

Le symbole  $\frac{A}{0}$  est toujours un caractère d'*impossibilité*; mais le symbole  $\frac{0}{0}$  est tantôt un caractère d'*indétermination*, tantôt un caractère d'*impossibilité*; il annonce quelquefois aussi (n° 72) la présence d'un facteur commun.

Pour savoir à quoi s'en tenir sur sa vraie signification, on n'a rien de mieux à faire qu'à remonter, pour chaque système

particulier, aux équations de ce système, et à rechercher directement les valeurs des inconnues, à l'aide de ces équations.

76. Soit, pour premier exemple, le système des équations

$$x + 9y + 6z = 16,$$

$$2x + 3y + 2z = 7,$$

$$3x + 6y + 4z = 13.$$

En appliquant les formules générales, on trouve pour les trois inconnues

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}, \quad z = \frac{0}{0};$$

mais si l'on opère directement sur les équations, on trouve, en multipliant la seconde par 3, et retranchant la première de la seconde,

$$5x = 21 - 16 = 5;$$

d'où

$$x = 1.$$

Substituant cette valeur dans les trois équations, on obtient

pour la 1<sup>re</sup>,  $9y + 6z = 15$ , ou  $3y + 2z = 5$ ;

pour la 2<sup>e</sup>, .....  $3y + 2z = 5$ ;

et pour la 3<sup>e</sup>,  $6y + 4z = 10$ , ou  $3y + 2z = 5$ .

La valeur de  $x$  est donc *déterminée* et égale à 1; quant aux valeurs de  $y$  et de  $z$ , elles sont *indéterminées*, puisqu'on n'a qu'une seule équation entre ces deux inconnues.

Le système proposé rentre dans le second du n° précédent, puisque, si l'on divise la première équation par 3 et la troisième par 2, les coefficients de  $y$  et de  $z$  deviennent les mêmes.

Voici d'ailleurs comment on l'a formé : Après avoir posé arbitrairement les premiers membres de ces trois équations, de manière toutefois que les coefficients de  $y$  et de  $z$ , multipliés en croix, dans les équations considérées deux à deux, forment des produits égaux, on a pris aussi arbitrairement les seconds membres de la première et de la seconde équation, ce qui a

donné

$$\left. \begin{aligned} x + 9y + 6z &= 16 \\ 2x + 3y + 2z &= 7 \\ 3x + 6y + 4z &= h \end{aligned} \right\} \text{d'où} \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{3}x + 3y + 2z &= \frac{16}{3}, \\ 2x + 3y + 2z &= 7, \\ \frac{3}{2}x + 3y + 2z &= \frac{k}{2}. \end{aligned} \right.$$

Puis, on a déterminé  $\frac{k}{2}$  ou  $d''$ , d'après la relation. ...

$\frac{d'' - d}{a'' - a} = \frac{d' - d}{a' - a}$  du n° 75, en posant

$$a = \frac{1}{3}, \quad d = \frac{16}{3}, \quad a' = 2, \quad d' = 7, \quad a'' = \frac{3}{2},$$

ce qui a donné  $d'' = \frac{13}{2}$ ; d'où  $2d''$  ou  $k = 13$ .

Soit le nouveau système

$$\left. \begin{aligned} 11x - 8y + 6z &= 49, \\ 5x - 12y + 9z &= 16, \\ 4x - 20y + 15z &= 15, \end{aligned} \right\}$$

qui rentre encore dans le second du n° 75, mais ne satisfait pas

à la relation  $\frac{d'' - d}{a'' - a} = \frac{d' - d}{a' - a}$ .

En appliquant les formules, on trouverait

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{A}{0}, \quad z = \frac{B}{0}.$$

Mais opérons directement sur les équations.

Multipliant la première par 3 et la seconde par 2, puis soustrayant, on obtient  $23x = 115$ ; d'où  $x = 5$ . Substituant cette valeur dans les trois équations, on trouve

$$\left. \begin{aligned} 8y - 6z &= 6 \\ 12y - 9z &= 9 \\ 20y - 15z &= 5 \end{aligned} \right\} \text{ou bien} \left\{ \begin{aligned} 4y - 3z &= 3, \\ 4y - 3z &= 3, \\ 4y - 3z &= 1. \end{aligned} \right.$$



Les deux dernières équations sont évidemment *impossibles* simultanément; et, si on leur appliquait les formules relatives à deux inconnues, on obtiendrait  $y = \frac{A}{0}$ ,  $z = \frac{B}{0}$ .

Ainsi, des trois valeurs  $\frac{0}{0}$ , obtenues ci-dessus, pour  $x, y, z$ , la première a une signification déterminée,  $x=5$ , et les deux autres sont *infinies*.

77. Au reste, toutes les fois qu'on agit directement sur des exemples particuliers, on a d'autres caractères d'*impossibilité* ou d'*indétermination*.

Dans le premier système, traité n° 76, si l'on considère les deux équations  $\begin{cases} 3y + 2z = 5, \\ 3y + 2z = 5, \end{cases}$

auxquelles on est parvenu par l'élimination de  $x$ , et que, pour obtenir  $y$  ou  $z$ , on retranche ces deux équations l'une de l'autre, il vient  $0 = 0$ .

De même, dans le second système, si l'on retranche l'une de l'autre les deux équations  $\begin{cases} 4y - 3z = 3, \\ 4y - 3z = 1, \end{cases}$  il vient  $0 = 2$ , égalité absurde.

Les résultats  $0 = 0$  et  $0 = A$ , sont les véritables caractères de l'*indétermination*, ou de l'*impossibilité simultanée* des équations.

78. Nous terminerons la discussion des équations du premier degré par l'examen d'un cas particulier. C'est celui où, dans les équations générales, on suppose nulles à la fois toutes les quantités connues qui sont dans le second membre. Dans ce cas, il suit évidemment de la loi de formation des numérateurs, pour les valeurs générales des inconnues (n° 67), que ces numérateurs s'anéantissent tous en même temps, c'est-à-dire que l'on a  $A = 0$ ,  $B = 0$ . . . . Comme d'ailleurs il n'existe aucune relation particulière entre les coefficients  $a, b, c, a', b', c', \dots$  des inconnues,  $D$ , qui résulte d'une certaine combinaison de

ces coefficients, est généralement différent de 0. Ainsi l'on a, pour valeurs des inconnues,  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ ... Ces valeurs vérifient évidemment les équations proposées.

Si cependant, outre l'hypothèse que les quantités connues du second membre soient nulles à la fois, on a encore entre les coefficients des inconnues, la relation  $D=0$ , les valeurs générales se réduisent à la forme  $x=\frac{0}{0}$ ,  $y=\frac{0}{0}$ , etc...

Or je dis que, dans ce cas, les équations sont indéterminées, mais que les rapports des inconnues sont des nombres *constans*, qu'on peut obtenir à l'aide des équations proposées.

Soient en effet les trois équations

$$ax+by+cz=0, \quad a'x+b'y+c'z=0, \quad a''x+b''y+c''z=0,$$

dans lesquelles on suppose (n° 67) que l'on ait  $D$  ou

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'' = 0.$$

Elles peuvent être mises sous la forme

$$a \frac{x}{z} + b \frac{y}{z} + c = 0, \quad a' \frac{x}{z} + b' \frac{y}{z} + c' = 0, \quad a'' \frac{x}{z} + b'' \frac{y}{z} + c'' = 0.$$

Or, on tire des deux premières, en traitant  $\frac{x}{z}$  et  $\frac{y}{z}$  comme deux in-

$$\text{connues, } \dots \frac{x}{z} = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}, \quad \frac{y}{z} = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

D'où l'on voit qu'en donnant à  $z$  des valeurs entièrement arbitraires, les valeurs de  $x$  et de  $y$  s'obtiendront à l'aide de ces deux proportions, dont les seconds rapports sont constans et égaux à des quantités connues.

Mais il reste à savoir si ces valeurs satisfont à la troisième équation. On trouve, en les substituant dans cette équation,

$$a'' \times \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} + b'' \times \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} + c'' = 0,$$

ou, réduisant et écrivant les termes dans un ordre convenable,

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'' = 0,$$

condition qui, par hypothèse, est satisfaite.

79. Ceci nous conduit naturellement à l'examen d'une circonstance dont le second problème du testament, résolu (n° 49), nous a offert un exemple, c'est celle où l'énoncé de la question conduit à un nombre d'équations réellement différentes, plus grand que celui des inconnues à déterminer.

Supposons, pour plus de généralité, que la question renferme  $n$  inconnues, et donne lieu à  $m$  équations différentes,  $m$  étant  $> n$ . Il faut d'abord combiner entre elles un nombre  $n$  des équations proposées, pour en tirer les valeurs des  $n$  inconnues; substituer ensuite ces valeurs dans les  $m - n$  équations restantes, ce qui donne lieu à autant de relations entre les données; et ces dernières relations doivent être vérifiées, pour que le problème soit possible, tel qu'il a été énoncé. Les  $m - n$  relations ainsi obtenues, se nomment équations de condition.

80. *Récapitulation de la discussion précédente.* Il résulte de cette discussion, 1°. qu'un système d'équations du premier degré à pareil nombre d'inconnues, ne peut être en général satisfait que d'une seule manière (n° 66);

2°. Que toute valeur positive, trouvée pour une inconnue, répond directement aux équations du problème, sans répondre toujours à l'énoncé (n° 69);

3°. Que toute valeur négative ne répond qu'indirectement à l'énoncé ou aux équations qui en sont la traduction algébrique, mais répond toujours aux équations considérées dans un sens purement algébrique (n°s 59 et 70);

4°. Que toute expression de la forme  $\frac{A}{0}$ , trouvée pour une ou plusieurs des inconnues, indique une incompatibilité dans le système d'équations proposé, du moins, en nombres finis, pour toutes les inconnues (n°s 71, 73 et 74);

5°. Que toute expression de la forme  $\frac{0}{0}$  indique, soit une indétermination, soit une incompatibilité (n°s 71, 73, 74 et 75),

mais que la valeur d'une inconnue peut se réduire à  $\frac{0}{0}$ , par l'effet de la présence d'un facteur commun dans les deux termes de la fraction; ce qu'il faut examiner attentivement (n° 72);

6°. Que si tous les seconds membres du système d'équations proposé sont nuls, les valeurs deviennent aussi 0; que si, à cette hypothèse, on ajoute celle que le dénominateur commun des valeurs des inconnues soit 0, le nombre des systèmes de valeurs est infini; mais que ces valeurs sont assujetties à avoir entre elles un rapport constant (n° 78);

7°. Que, lorsque le nombre des équations est plus grand que celui des inconnues, le problème n'est possible qu'autant que les valeurs des inconnues déterminées par un nombre d'équations égal à celui des inconnues, satisfait aux autres équations (n° 79).

81. Voici les énoncés de nouveaux problèmes susceptible de discussion, ou dont la résolution présente quelque intérêt.

Quinzième problème. *Un banquier a deux espèces de monnaie; il faut a pièces de la première pour faire un écu; il faut b pièces de la seconde pour faire la même somme. Quelqu'un vient et demande c pièces pour un écu. Combien le banquier lui donnera-t-il de pièces de chaque espèce, pour le satisfaire?*

$$\left( \text{Rér. .... 1}^{\text{re}} \text{ espèce, } \frac{a(c-b)}{a-b}; \quad 2^{\text{e}} \text{ espèce, } \frac{b(a-c)}{a-b}. \right)$$

Seizième problème. *Trouver les deux côtés contigus d'un rectangle, en supposant, 1°. que ces deux côtés soient entre eux dans un rapport donné m : n; 2°. que, si l'on altère les côtés de ce rectangle (par addition ou par soustraction) des quantités données a et b, la surface soit altérée de la quantité p.*

$$\left( \text{En supposant les côtés altérés par addition, on trouve} \right. \\ \left. x = \frac{m(p-ab)}{na+mb}, \quad y = \frac{n(p-ab)}{na+mb}. \right)$$

Dix-septième problème. *On demande les biens de trois personnes A, B, C, sachant, 1°. que la somme du bien de A et de 1 fois les biens de B et C est égale à p; 2°. que la somme du bien de B et de m fois les biens de A et C est égale à q; 3°. que la somme du bien de C et de n fois les biens de A et B est égale à r.*

(Cette question est susceptible d'être résolue assez simplement, en introduisant une inconnue auxiliaire dans le cours du calcul; cette inconnue est la somme des trois biens.)

Dix-huitième problème. *Trouver les biens de 6 personnes A, B, C, D, E, F, d'après les conditions suivantes : 1°. la somme des biens de A et de B est a; celle des biens de C et D est b, la somme des biens de E et F est c; 2°. le bien de A vaut m fois le bien de C; le bien de D vaut n fois le bien de E; le bien de F vaut p fois le bien de B?*

(Ce problème peut être résolu par le moyen d'une seule équation à une seule inconnue.)

Ces différens énoncés sont extraits de l'*Algèbre de M. Lhuillier* de Genève, ouvrage recommandable par le choix des questions qu'il propose pour exercices.

## CHAPITRE III.

### *Résolution des Problèmes et Équations du second degré.*

82. INTRODUCTION. Lorsque l'énoncé d'un problème conduit à une équation de la forme  $ax^2 = b$ , dans laquelle l'inconnue est multipliée par elle-même, l'équation est dite du *second degré*, et les principes établis dans les deux chapitres précédens sont insuffisans pour sa résolution; mais comme, par

la division de ses deux membres par  $a$ , elle devient  $x^2 = \frac{b}{a}$ , on voit que la question se réduit à trouver un nombre qui, multiplié par lui-même, peut produire le nombre exprimé par  $\frac{b}{a}$ ; c'est l'objet de l'extraction de la racine carrée.

Nous avons exposé, dans notre Arithmétique, avec tous les détails convenables, les divers procédés de l'extraction de la racine carrée des nombres particuliers, soit entiers, soit fractionnaires; nous n'avons donc à développer ici que les règles relatives à l'extraction de la racine carrée des nombres exprimés algébriquement.

### § I. Formation du carré et extraction de la racine carrée des quantités algébriques.

83. Considérons d'abord le cas d'une quantité monome; et pour découvrir le procédé, voyons comment on forme le carré d'un monome.

On a, d'après les règles de la multiplication des monomes, (n° 16),  $(5a^2b^3c)^2 = 5a^2b^3c \times 5a^2b^3c = 25a^4b^6c^2$ ;

c'est-à-dire que, pour élever un monome au carré, il faut élever son coefficient au carré, et doubler chacun des exposans des différentes lettres. Donc, pour revenir d'un monome carré à sa racine, il faut 1°. extraire la racine carrée du coefficient, d'après les règles exposées en Arithmétique; 2°. prendre la moitié de chacun des exposans.

Ainsi l'on a  $\sqrt{64a^6b^4} = 8a^3b^2$ ; et en effet,  
 $(8a^3b^2)^2 = 8a^3b^2 \times 8a^3b^2 = 64a^6b^4$ . De même  $\sqrt{625a^2b^8c^6} = 25ab^4c^3$ ,  
 car  $(25ab^4c^3)^2 = 625a^2b^8c^6$ .

Il résulte de la règle précédente, que pour qu'un monome

soit le carré d'un autre monome, il faut que son coefficient soit un carré parfait, et que tous ses exposans soient pairs. Ainsi  $98ab^4$  n'est pas un carré parfait, parce que 98 n'est pas un nombre carré parfait, et que  $a$  est affecté d'un exposant impair.

Dans ce cas, on fait entrer la quantité dans les calculs, en l'affectant du signe  $\sqrt{\quad}$ , et on l'écrit ainsi:  $\sqrt{98ab^4}$ . On appelle ces sortes d'expressions, des monomes irrationnels, ou simplement, des radicaux du second degré.

84. On peut, toutefois, faire subir à ces expressions quelques simplifications fondées sur le principe suivant : La racine carrée du produit de deux ou plusieurs facteurs est égale au produit des racines carrées de ces facteurs, ou en langage algébrique,  $\sqrt{abcd\dots} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{d} \dots$

Pour démontrer ce principe, observons que, d'après la définition de la racine carrée d'un nombre, on a

$$(\sqrt{abcd\dots})^2 = abcd\dots$$

D'un autre côté,

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c} \dots)^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 \cdot (\sqrt{c})^2 \dots = abcd\dots$$

Donc, puisque les carrés de  $\sqrt{abcd\dots}$  et de  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{d} \dots$  sont égaux, ces quantités sont elles-mêmes égales.

Cela posé, l'expression ci-dessus,  $\sqrt{98ab^4}$ , peut se mettre sous la forme  $\sqrt{49b^4 \times 2a} = \sqrt{49b^4} \times \sqrt{2a}$ .

Or,  $\sqrt{49b^4}$  se réduit (n° 83), à  $7b^2$ ; donc,

$$\sqrt{98ab^4} = 7b^2 \cdot \sqrt{2a}.$$

On a de même,

$$\sqrt{45a^3b^3c^3d} = \sqrt{9a^3b^3c^3 \times 5bd} = 3abc \cdot \sqrt{5bd},$$

$$\sqrt{864a^3b^5c^{11}} = \sqrt{144a^3b^4c^{10} \times 6bc} = 12ab^2c^5 \cdot \sqrt{6bc}.$$

En général, pour simplifier un monome irrationnel, mettez

en évidence tous les facteurs carrés parfaits, et extrayez-en la racine (n° 83); puis, placez le produit de toutes ces racines en avant du signe radical, sous lequel vous laissez d'ailleurs les facteurs non carrés parfaits.

Dans les expressions  $7b^2\sqrt{2a}$ ,  $3abc\sqrt{5bd}$ ,  $12ab^2c^3\sqrt{6bc}$ , les quantités  $7b^2$ ,  $3abc$ ,  $12ab^2c^3$ , s'appellent les coefficients du radical.

85. Jusqu'à présent, nous n'avons pas eu égard au signe dont le monome peut être affecté. Cependant, puisque, dans la résolution des questions, on est conduit à considérer des quantités monomes précédées du signe + ou du signe —, il faut savoir comment opérer sur ces sortes de quantités. Or, le carré d'un monome étant le produit de ce monome par lui-même, il s'ensuit (n° 62) que, *quel que soit son signe, le carré de ce monome est positif*; ainsi, le carré de  $+5a^2b^3$  ou de  $-5a^2b^3$ , est  $+25a^4b^6$ .

D'où l'on peut déjà conclure que, *si un monome est positif, sa racine carrée peut être indifféremment affectée du signe + ou du signe —*; ainsi,  $\sqrt{9a^4} = \pm 3a^2$ ; car  $+3a^2$  ou  $-3a^2$ , élevé au carré, donne également  $+9a^4$ . Le double signe  $\pm$  dont on affecte la racine, s'énonce *plus ou moins*.

Si le monome proposé est *négligé*, l'extraction de sa racine est impossible, puisqu'on vient de voir que le carré de toute quantité positive ou négative, est essentiellement positif. Ainsi,  $\sqrt{-9}$ ,  $\sqrt{-4a^2}$ ,  $\sqrt{-5}$ , sont des symboles algébriques qui présentent des opérations impossibles. On les désigne sous le nom de *quantités* ou plutôt d'*expressions imaginaires*; ce sont des symboles d'absurdité, qu'on rencontre souvent dans la résolution des problèmes du second degré.

On fait toutefois, par extension, subir à ces symboles les mêmes simplifications qu'aux expressions irrationnelles qui offrent des opérations exécutables. C'est ainsi que  $\sqrt{-9}$  revient (n° 84) à  $\sqrt{9}\sqrt{-1}$ , ou  $3\sqrt{-1}$ ; de même,  $\sqrt{-4a^2} = \sqrt{4a^2}\sqrt{-1} = 2a\sqrt{-1}$ ,  $\sqrt{-8ab} = \sqrt{4a^2 \times -2b} = 2a\sqrt{-2b} = 2a\sqrt{2b}\sqrt{-1}$ .



§ 86. Tâchons maintenant de découvrir une *loi de formation* pour le carré d'un polynôme quelconque, de laquelle nous puissions déduire un procédé pour l'extraction de la racine carrée.

On a déjà vu (n° 19) que le carré d'un binôme  $a + b$ , est égal à  $a^2 + 2ab + b^2$ .

Soit actuellement à former le carré d'un trinôme  $a + b + c$ . Désignons, pour le moment,  $a + b$  par une seule lettre  $s$ ; il vient

$$(a + b + c)^2 = (s + c)^2 = s^2 + 2sc + c^2.$$

Or, on a

$$s^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; 2sc = 2(a + b)c = 2ac + 2bc.$$

Done  $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ ; c'est-à-dire que le carré d'un trinôme se compose de la somme des carrés des trois termes et des doubles produits de ces termes multipliés deux à deux.

Jedis que cette *loi de composition* est vraie pour un polynôme quelconque. En effet, supposons-la vérifiée pour un polynôme d'un nombre quelconque de termes, et voyons si elle est vraie pour un polynôme renfermant un terme de plus.

Afin d'y parvenir, soit  $a + b + c + d + \dots + i + k$ , un polynôme composé de  $m + 1$  termes, et désignons par  $s$  la somme des  $m$  premiers termes,  $a + b + c + d + \dots + i$ ;  $s + k$  représente le polynôme proposé, et l'on a  $(s + k)^2 = s^2 + 2sk + k^2$ , ou, remettant à la place de  $s$  sa valeur,

$$(s + k)^2 = (a + b + c + d + \dots + i)^2 + 2(a + b + c + d + \dots + i)k + k^2.$$

Or, la première partie de cette expression se compose, par hypothèse, des carrés de tous les termes du premier polynôme et des doubles produits de tous ces termes deux à deux; la seconde partie renferme tous les doubles produits des termes du premier polynôme par le nouveau terme introduit  $k$ ; enfin, la troisième partie est le carré de ce terme. Donc, la *loi de composition*, énoncée ci-dessus, est encore vraie pour le nouveau

polynome. Mais elle a été reconnue vraie pour un trinome ; donc, elle a lieu pour un polynome de quatre termes ; étant vraie pour quatre, elle l'est nécessairement pour cinq, et ainsi de suite. Donc elle est générale.

On peut énoncer la loi d'une autre manière ; *Le carré d'un polynome renferme le carré du premier terme, plus le double produit du premier terme par le second, plus le carré du second ; plus les doubles produits de chacun des deux premiers termes par le troisième, plus le carré du troisième ; plus les doubles produits de chacun des trois premiers termes par le quatrième, plus le carré du quatrième ; et ainsi de suite.* Cet énoncé, qui est évidemment compris dans le premier, nous conduira plus aisément au procédé de l'extraction de la racine carrée d'un polynome.

On trouvera, d'après cette loi,

$$\begin{aligned}(5a^3 - 4ab^2)^2 &= 25a^6 - 40a^4b^2 + 16a^2b^4, \\ (3a^2 - 2ab + 4b^2)^2 &= 9a^4 - 12a^3b + 4a^2b^2 + 24a^2b^2 - 16ab^3 + 16b^4, \\ \text{ou réduisant,} &= 9a^4 - 12a^3b + 28a^2b^2 - 16ab^3 + 16b^4, \\ (5a^2b - 4abc + 6bc^2 - 3a^2c)^2 &= 25a^4b^2 - 40a^3b^2c + 76a^2b^2c^2 \\ &- 48ab^2c^3 + 36b^4c^4 - 30a^4bc + 24a^3bc^2 - 36a^2bc^3 + 9a^4c^2.\end{aligned}$$

Passons à l'extraction de la racine carrée.

87. Désignons par N le polynome dont il faut obtenir la racine, et par R cette racine, que nous supposons pour le moment déterminée ; concevons en outre que ces deux polynomes soient ordonnés par rapport à l'une des lettres qu'ils renferment, a par exemple.

Cela posé, j'observe d'abord que les deux premiers termes de N (en le supposant ordonné), peuvent donner sur-le-champ le premier et le second terme de R ; en effet, il résulte évidemment de la loi de formation du carré, (n° 86), 1°. que le carré du premier terme de R renferme un exposant de la lettre a, plus grand que dans aucune des autres parties qui entrent dans la composition du carré de R ; 2°. que le double produit du premier terme de R par le second, renferme aussi un exposant

plus élevé que dans les parties suivantes. Ainsi, les deux parties dont nous venons de parler, n'ayant pu se réduire avec les autres, sont nécessairement les deux termes de  $N$  affectés du plus haut exposant de  $a$ , et de l'exposant immédiatement inférieur. D'où il suit que, si  $N$  est réellement un carré parfait, 1°. son premier terme doit être un carré parfait, et sa racine, extraite d'après le procédé du n° 83, est le premier terme de  $R$ ; 2°. son second terme doit être divisible par le double du premier terme de  $R$ ; et, en effectuant cette division, on a pour quotient le second terme de  $R$ .

Afin de pouvoir obtenir les termes suivans, formons le carré du binôme déjà trouvé, et retranchons-le de  $N$ ; le reste, que nous désignons par  $N'$ , renferme encore les doubles produits du premier terme de  $R$  par le troisième, du second terme de  $R$  par le troisième, plus une suite d'autres parties. Mais le double produit du premier terme par le troisième doit renfermer  $a$  avec un exposant plus grand que dans les parties suivantes, et ne peut, par conséquent, avoir été réduit avec ces parties. Donc, ce double produit est le premier terme de  $N'$ ; ainsi, ce premier terme doit être divisible par le double du premier terme de  $R$ ; et, si l'on effectue cette division, le quotient est le troisième terme de  $R$ .

Pour obtenir de nouveaux termes, il faut former les doubles produits du premier terme et du second par le troisième, plus le carré du troisième, puis retrancher tous ces produits du reste  $N'$ ; ce qui donne un reste  $N''$ , qui renferme encore le double produit du premier terme de  $R$  par le quatrième, plus une suite d'autres parties. Mais on prouvera, comme précédemment, que le premier terme de  $N''$  est nécessairement le double produit du premier terme de  $R$  par le quatrième; ainsi, en divisant le premier terme de  $N''$  par le double du premier terme de  $R$ , on a pour quotient le quatrième terme de  $R$ ; et ainsi de suite.

*N. B.* Il est absolument indispensable, après avoir obtenu les deux premiers termes de la racine, de retrancher le carré du binôme trouvé, du polynome  $N$ ; car ordinairement, le

carré du second terme de R renferme  $a$  avec le même exposant que dans le double produit du premier terme par le troisième; par conséquent, il a dû se réduire avec ce double produit. Ainsi, ce n'est qu'après avoir soustrait ce carré, du polynome N, qu'on peut assurer que le premier terme du reste est égal au double produit du premier terme de R par le troisième. La même remarque s'applique aux trois, quatre... premiers termes trouvés.

Nous laissons aux jeunes gens le soin de déduire des raisonnemens précédens le procédé général de l'extraction de la racine carrée d'un polynome. Il leur suffit, pour cela, de réunir toutes les parties qui sont en *caractère italique*. Nous allons d'ailleurs en faire l'application à un exemple particulier.

Soit proposé d'extraire la racine carrée du polynome

$$\begin{array}{r}
 49a^2b^2 - 24ab^3 + 25a^4 - 30a^3b + 16b^4 \\
 25a^4 - 30a^3b + 49a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 25a^4 - 30a^3b + 49a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4 \\ -25a^4 + 30a^3b - 9a^2b^2 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 5a^2 - 3ab + 4b^2 \\ 10a^2 \end{array} \\
 -25a^4 + 30a^3b - 9a^2b^2 \\
 \hline
 1^{\text{er}} \text{ reste... } 40a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4 \\
 \quad \quad \quad - 40a^2b^2 + 24ab^3 - 16b^4 \\
 \hline
 2^{\text{e}} \text{ reste... } 0
 \end{array}$$

Après avoir ordonné le polynome par rapport à  $a$ , on extrait la racine carrée de  $25a^4$ , ce qui donne  $5a^2$ , que l'on écrit à la droite du polynome; puis on divise le second terme  $-30a^3b$  par  $10a^2$ , double de  $5a^2$  (on écrit  $10a^2$  au-dessous de  $5a^2$ ); le quotient est  $-3ab$ , que l'on place à la droite de  $5a^2$ . Les deux premiers termes de la racine sont donc  $5a^2 - 3ab$ . Carrant ce binôme, on trouve  $25a^4 - 30a^3b + 9a^2b^2$ , qui, retranché du polynome proposé, donne un reste dont le premier terme est  $40a^2b^2$ . Divisant ce premier terme par  $10a^2$ , double de  $5a^2$ , on obtient pour quotient,  $+4b^2$ ; c'est le troisième terme de la racine, que l'on écrit à la droite des deux premiers termes. Formant le double produit de  $5a^2 - 3ab$  par  $4b^2$ , et le carré de  $4b^2$ , on trouve  $40a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4$ , poly-

nome qui, retranché du premier reste, donne 0 pour reste final. Ainsi,  $5a^3 - 3ab + 4b^3$  est la racine demandée.

Les commençans peuvent s'exercer sur les carrés qui ont été développés (n° 86).

88. Si le polynôme proposé renfermait plusieurs termes affectés de la même puissance de la lettre principale, il faudrait disposer le polynôme comme il a été dit dans la division (n° 29), et appliquer le procédé ci-dessus, en regardant comme une seule et même partie, la somme algébrique des termes affectés de la même puissance, et remplaçant, dans l'énoncé de ce procédé, les mots, *premier terme du polynôme, premier terme du reste, premier terme, second terme...* de la racine, par les expressions: *première partie du polynôme, ou partie affectée de la plus haute puissance, première partie du reste, 1<sup>re</sup>, 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>...* partie de la racine. Au surplus, ces sortes d'exemples se présentent fort rarement.

89. Nous terminerons par les remarques suivantes :

1°. Un binôme ne peut jamais être un carré parfait, puisqu'on sait que le carré du polynôme le plus simple, c'est-à-dire d'un binôme, renferme trois parties distinctes qui ne peuvent éprouver aucune réduction entre elles. Ainsi, l'expression  $a^2 + b^2$  n'est pas un carré ; il lui manque le terme  $\pm 2ab$  pour qu'elle soit le carré de  $a \pm b$ .

2°. Pour qu'un trinôme ordonné soit un carré parfait, il faut que les deux termes extrêmes soient des carrés, et que celui du milieu soit le double produit des racines carrées des deux autres. Alors, la racine du trinôme peut s'obtenir immédiatement : *Extrairez les racines des deux termes extrêmes, et affectez les deux racines du même signe ou de signes contraires, suivant que le troisième terme est positif ou négatif. Vérifiez ensuite si le double produit de ces deux racines donne le troisième terme du trinôme.* Ainsi,  $9a^6 - 48a^4b^2 + 64a^2b^4$  a pour racine carrée,  $\sqrt{9a^6} - \sqrt{64a^2b^4}$ , c'est-à-dire,  $3a^3 - 8ab^2$ , car  $3a^3 \times - 8ab^2 = - 48a^4b^2$ .

$4a^3 + 12ab - 9b^2$  ne peut être un carré parfait, quoique  $4a^3$

et  $9b^2$  soient les carrés de  $3a$  et de  $3b$ , et que  $12ab = 2a \times 6b$ ; mais  $-9b^2$  n'est pas un carré.

3°. Lorsque, dans la série d'opérations que comporte le procédé général, le premier terme de l'un des restes n'est pas exactement divisible par le double du premier terme de la racine, on peut conclure que le polynôme proposé n'est pas un carré parfait. C'est une conséquence évidente des raisonnemens que nous avons faits pour parvenir à ce procédé.

4°. Enfin, on peut appliquer aux racines carrées des polynômes *non carrés parfaits*, les simplifications du n° 84.

Soit, par exemple, l'expression  $\sqrt{a^3b + 4a^2b^2 + 4ab^3}$ .

La quantité sous le radical n'est pas un carré parfait; mais elle peut se mettre sous la forme  $ab(a^2 + 4ab + 4b^2)$ . Or, le facteur entre parenthèses est évidemment le carré de  $a + 2b$ ; d'où l'on peut conclure (n° 84),

$$\sqrt{a^3b + 4a^2b^2 + 4ab^3} = (a + 2b)\sqrt{ab}.$$

90. *Calcul des radicaux du second degré.* L'extraction de la racine carrée donnant naissance à de nouvelles expressions algébriques, telles que  $\sqrt{a}$ ,  $3\sqrt{b}$ ,  $7\sqrt{2}$ , connues sous le nom de *quantités irrationnelles* ou *radicaux du second degré*, il faut établir des règles pour effectuer sur ces expressions les quatre opérations fondamentales.

*Définition.* Deux radicaux du second degré sont dits *semblables*, lorsque la quantité qui est sous le radical est la même dans les deux radicaux. Ainsi,  $3a\sqrt{b}$  et  $5c\sqrt{b}$ ,  $9\sqrt{2}$  et  $7\sqrt{2}$  sont dits des *radicaux semblables*.

*Addition et soustraction.* Pour ajouter ou soustraire des radicaux semblables, on ajoute ou l'on soustrait les deux coefficients, puis on affecte la somme ou la différence, du radical commun; ainsi, l'on a

$$3a\sqrt{b} + 5c\sqrt{b} = (3a + 5c)\sqrt{b}; \quad 3a\sqrt{b} - 5c\sqrt{b} = (3a - 5c)\sqrt{b};$$

de même,

$$7\sqrt{2a} + 3\sqrt{2a} = 10\sqrt{2a}; \quad 7\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} = 4\sqrt{2a}.$$

Deux radicaux peuvent, au premier abord, ne pas être semblables, et le devenir par les simplifications du n° 84.

Par exemple,

$$\begin{aligned} \sqrt{48ab^3} + b\sqrt{75a} &= 4b\sqrt{3a} + 5b\sqrt{3a} = 9b\sqrt{3a}, \\ 2\sqrt{45} - 3\sqrt{5} &= 6\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 3\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Si les radicaux ne sont pas semblables, on ne fait qu'indiquer leur addition ou soustraction. Ainsi, pour ajouter  $3\sqrt{b}$  à  $5\sqrt{a}$ , on écrit simplement,  $5\sqrt{a} + 3\sqrt{b}$ .

*Multiplication.* Pour multiplier deux radicaux l'un par l'autre, on multiplie les deux quantités sous le signe radical, l'une par l'autre, et l'on affecte le produit, du signe radical commun. Ainsi  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ ; c'est le principe du n° 84, énoncé dans un ordre inverse.

S'il y a des coefficients, on commence par les multiplier entre eux, et l'on écrit leur produit en avant du radical.

$$\begin{aligned} \text{Par exemple, } 3\sqrt{5ab} \times 4\sqrt{20a} &= 12\sqrt{100a^2b} = 120a\sqrt{b}; \\ 2a\sqrt{bc} \times 3a\sqrt{bc} &= 6a^2\sqrt{b^2c^2} = 6a^2bc; \\ 2a\sqrt{a^2+b^2} \times -3a\sqrt{a^2+b^2} &= -6a^2(a^2+b^2). \end{aligned}$$

*Division.* Pour diviser deux radicaux l'un par l'autre, divisez les deux quantités sous le signe, l'une par l'autre, et affectez le quotient, du signe radical commun; ainsi  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ .

En effet, les carrés de ces deux expressions sont égaux à la même quantité  $\frac{a}{b}$ ; donc, ces deux expressions sont égales. S'il y a des coefficients, on écrit leur quotient comme coefficient du radical.

Par exemple,

$$5a\sqrt{b} : 2b\sqrt{c} = \frac{5a}{2b}\sqrt{\frac{b}{c}},$$

$$12ac\sqrt{6bc} : 4c\sqrt{2b} = 3a\sqrt{\frac{6bc}{2b}} = 3a\sqrt{3c}.$$

91. Il existe deux transformations d'un usage fréquent dans l'évaluation numérique des radicaux.

*La première* consiste à faire passer sous le radical le coefficient de ce radical. Soit, par exemple, l'expression  $3a\sqrt{5b}$ ; on observe qu'elle revient à  $\sqrt{9a^2 \times 5b}$ , ou  $\sqrt{9a^2 \cdot 5b} = \sqrt{45a^2b}$  (en appliquant la règle de la multiplication de deux radicaux); ainsi, pour faire passer sous le signe d'un radical le coefficient de ce radical, il suffit de l'élever au carré.

Voici l'usage principal de cette transformation. Que l'on ait à évaluer, à une unité près, l'expression  $6\sqrt{13}$ ; comme 13 n'est pas un carré parfait, on ne peut obtenir qu'une valeur approchée de sa racine. Cette racine est égale à 3 plus une certaine fraction; mais, en la multipliant par 6, on a 18, plus le produit de la fraction par 6; et ce résultat total peut avoir une partie entière plus grande que 18. Le seul moyen de déterminer exactement cette partie entière, consiste à mettre  $6\sqrt{13}$  sous la forme  $\sqrt{6^2 \cdot 13} = \sqrt{36 \times 13} = \sqrt{468}$ . Or, 468 a 21 pour partie entière de sa racine carrée; donc  $6\sqrt{13}$  est égal à 21 plus une fraction.

On trouvera de même que  $12\sqrt{7} = 31$  plus une fraction.

*La seconde transformation* a pour but de rendre rationnels les dénominateurs d'expressions telles que  $\frac{a}{p + \sqrt{q}}$ ,  $\frac{a}{p - \sqrt{q}}$ ;  $a, p$  étant des nombres entiers quelconques, ainsi que  $q$ , qui est d'ailleurs supposé non carré parfait. On parvient souvent à ces sortes d'expressions dans la résolution des problèmes du second degré.

Or on remplit ce but, en multipliant les deux termes de la fraction par  $p - \sqrt{q}$ , si le dénominateur est  $p + \sqrt{q}$ , et par  $p + \sqrt{q}$ , si le dénominateur est  $p - \sqrt{q}$ . En effet, on



par cette multiplication, et en se rappelant (n° 5) que la somme de deux quantités, multipliée par leurs différence, donne pour produit la différence des carrés, on a, dis-je,

$$\frac{a}{p + \sqrt{q}} = \frac{a(p - \sqrt{q})}{(p + \sqrt{q})(p - \sqrt{q})} = \frac{a(p - \sqrt{q})}{p^2 - q} = \frac{ap - a\sqrt{q}}{p^2 - q}.$$

$$\frac{a}{p - \sqrt{q}} = \frac{a(p + \sqrt{q})}{(p - \sqrt{q})(p + \sqrt{q})} = \frac{a(p + \sqrt{q})}{p^2 - q} = \frac{ap + a\sqrt{q}}{p^2 - q}$$

expressions dont le dénominateur est rationnel.

Pour donner une idée de l'utilité de cette transformation, supposons que l'on ait à évaluer approximativement l'expression  $\frac{7}{3 - \sqrt{5}}$ . Elle revient à  $\frac{7(3 + \sqrt{5})}{9 - 5}$ , ou bien,  $\frac{21 + 7\sqrt{5}}{4}$ .

Or  $7\sqrt{5}$  est la même chose que  $\sqrt{49 \times 5}$ , ou  $\sqrt{245}$ , quantité dont la valeur est 15, à une unité près. Ainsi l'on a . . . . .

$$\frac{7}{3 - \sqrt{5}} = \frac{21 + 15 + \text{une fraction}}{4} = \frac{36}{4} = 9, \text{ à une fraction}$$

près, marquée par  $\frac{1}{4}$ , c'est-à-dire à un quart près.

Si l'on voulait avoir une valeur plus exacte de cette expression, il suffirait de calculer  $\sqrt{245}$  avec un certain degré d'approximation, d'ajouter 21 à la racine obtenue, puis de diviser la somme par 4, ou d'en prendre le quart.

Prenons, pour second exemple, l'expression  $\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11} + \sqrt{3}}$ , et proposons-nous de l'évaluer à 0,01 près.

$$\text{On a } \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11} + \sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{5}(\sqrt{11} - \sqrt{3})}{11 - 3} = \frac{7\sqrt{55} - 7\sqrt{15}}{8};$$

$$\text{or, } 7\sqrt{55} = \sqrt{55 \times 49} = \sqrt{2695} = 51,91 \text{ à } 0,01 \text{ près,}$$

$$7\sqrt{15} = \sqrt{15 \times 49} = \sqrt{735} = 27,11 \dots;$$

$$\text{ainsi, } \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11} + \sqrt{3}} = \frac{51,91 - 27,11}{8} = \frac{24,80}{8} = 3,10;$$

on a donc 3,10 pour le résultat demandé, ce résultat est même exact, à  $\frac{1}{800}$  près, comme il est aisé de le voir.

On trouverait, par un procédé analogue,

$$\frac{3+2\sqrt{7}}{5\sqrt{12}-6\sqrt{6}} = 3,159 \text{ à } 0,001 \text{ près.}$$

*N. B.* On pourrait bien calculer ces sortes d'expressions, en évaluant approximativement chacun des radicaux qui entrent tant au numérateur qu'au dénominateur. Mais comme on n'aurait pas une valeur exacte du dénominateur, on ne se formerait pas une idée bien précise du degré d'approximation qu'on aurait obtenu; tandis que, par le moyen qui vient d'être indiqué, le dénominateur est rendu *rationnel*, et l'on sait toujours à quoi s'en tenir sur le degré d'approximation.

Les principes de l'extraction de la racine carrée des nombres particuliers et des quantités algébriques étant établis, nous pouvons passer à la résolution des problèmes du second degré.

## § II. Résolution des Equations du second degré.

92. On distingue deux espèces d'équations du second degré, les équations à *deux termes* ou *incomplètes*, et les équations à *trois termes* ou *complètes*.

Les premières sont celles qui ne renferment que des termes affectés du carré de l'inconnue, et des termes tout connus; telles sont les équations

$$3x^2=5; 4x^2-7=3x^2+9; \frac{1}{3}x^2-3+\frac{5}{12}x^2=\frac{7}{24}-x^2+\frac{299}{24}.$$

On les appelle à *deux termes*, parce qu'au moyen des deux transformations générales (n<sup>os</sup> 43 et 44), on peut toujours les ramener à la forme  $ax^2=b$ . En effet, considérons la troisième équation, qui est la plus compliquée, on a d'abord, en chassant les dénominateurs,  $8x^2-72+10x^2=7-24x^2+299$ , on, transposant et réduisant,

$$42x^2=378.$$

Les équations à *trois termes* ou *complètes*, sont celles qui,

outre le carré de l'inconnue, renferment la première puissance de cette inconnue. Telles sont les équations

$$5x^2 - 7x = 34, \quad \frac{5}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 8 - \frac{2}{3}x - x^2 + \frac{273}{12};$$

elles peuvent toujours être ramenées à la forme  $ax^2 + bx = c$ , au moyen des deux transformations déjà citées.

*Équation à deux termes.* La résolution de l'équation  $ax^2 = b$  n'offre aucune difficulté. On en déduit d'abord  $x^2 = \frac{b}{a}$ , d'où...

$$x = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Si  $\frac{b}{a}$  est un nombre particulier entier ou fractionnaire, on pourra en obtenir la racine carrée, soit exactement, soit par approximation. Si  $\frac{b}{a}$  est algébrique, on lui appliquera les principes établis pour les quantités algébriques.

Observons néanmoins que, comme le carré de  $+m$  ou de  $-m$  est également  $+m^2$ , de même,  $(\pm \sqrt{\frac{b}{a}})^2$  donne également pour résultat  $\frac{b}{a}$ . Ainsi l'équation est réellement susceptible de

deux solutions, savoir,  $x = +\sqrt{\frac{b}{a}}$ , et  $x = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ . En effet,

substituons chacune de ces valeurs dans l'équation  $ax^2 = b$ ;

il vient  $a \times \left(+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = b$ , ou  $a \times \frac{b}{a} = b$ , ou  $b = b$ ,

et  $a \times \left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = b$ , ou  $a \times \frac{b}{a} = b$ , ou  $b = b$ .

Soit, pour premier exemple, l'équation

$$4x^2 - 7 = 3x^2 + 9;$$

On trouve d'abord par la transposition,

$$x^2 = 16; \text{ d'où } x = \pm \sqrt{16} = \pm 4.$$

Prenons pour second exemple, l'équation

$$\frac{1}{3}x^2 - 3 + \frac{5}{12}x^2 = \frac{7}{24} - x^2 + \frac{209}{24};$$

on a déjà reconnu (n° 92) que cette équation se réduit à  $42x^2 = 378$ , d'où, en divisant par 42,  $x^2 = \frac{378}{42} = 9$ ; donc  $x = \pm 3$ .

Soit enfin l'équation  $3x^2 = 5$ ; on en tire

$$x = \pm \sqrt{\frac{5}{3}} = \pm \frac{1}{3}\sqrt{15}.$$

Comme 15 n'est pas un carré parfait, on ne peut déterminer ces deux valeurs de  $x$  que par approximation.

93. *Equation complète du second degré.* Pour résoudre l'équation générale  $ax^2 + bx = c$ , commençons par diviser ses deux membres par le coefficient de  $x^2$ ; il vient

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}, \text{ ou } \dots x^2 + px = q,$$

en faisant pour plus de simplicité  $\frac{b}{a} = p$ ,  $\frac{c}{a} = q$ .

Cela posé, remarquons que, si l'on pouvait ramener le premier membre  $x^2 + px$  au carré d'un binôme, une simple extraction de racine carrée réduirait l'équation à une équation du premier degré. Or, en comparant ce premier membre au carré du binôme  $x + a$ , c'est-à-dire, à  $x^2 + 2ax + a^2$ , on voit que  $x^2 + px$  se compose du carré d'un premier terme  $x$ , plus du double produit de ce premier terme  $x$  par un second, qui est alors  $\frac{p}{2}$  (car on a  $px = 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x$ ); d'où il suit que, si l'on ajoute à  $x^2 + px$  le carré de  $\frac{p}{2}$ , ou  $\frac{p^2}{4}$ , le premier membre de l'équation deviendra le carré de  $x + \frac{p}{2}$ ; mais pour ne pas troubler l'égalité, il faut aussi ajouter  $\frac{p^2}{4}$  au second membre.

Il vient, par cette transformation,  $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} + q$ ,

d'où extrayant la racine carrée,  $x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$ .

(On met ici le double signe  $\pm$ , par la raison que le carré de  $+\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$  ou de  $-\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$ , est également  $\frac{p^2}{4} + q$ ).

Tirant enfin la valeur de  $x$ , on obtient

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

D'où résulte cette règle générale, pour résoudre une équation complète du second degré: *Après avoir ramené l'équation à la forme  $x^2 + px = q$ , ajoutez aux deux membres le carré de la moitié du coefficient de  $x$  ou du second terme; extrayez la racine carrée des deux membres, en ayant soin d'affecter la racine du second membre, du double signe  $\pm$ ; tirez enfin la valeur de  $x$  de cette nouvelle équation.*

La double valeur de  $x$ , à laquelle on parvient par ce moyen, peut s'énoncer ainsi, en langage ordinaire: *la moitié du coefficient de  $x$ , pris en signe contraire, plus ou moins la racine carrée du terme tout connu, augmenté du carré de la moitié du coefficient de  $x$ .*

94. Soit, pour premier exemple, l'équation

$$\frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 8 - \frac{2}{3}x - x^2 + \frac{273}{12}.$$

On trouve d'abord, en chassant les dénominateurs,

$$10x^2 - 6x + 9 = 96 - 8x - 12x^2 + 273,$$

ou, transposant et réduisant,

$$22x^2 + 2x = 360,$$

ou bien enfin, divisant les deux membres par 22,

$$x^2 + \frac{2}{22}x = \frac{360}{22}.$$

Ajoutons maintenant aux deux membres,  $\left(\frac{1}{22}\right)^2$ ; l'équation devient  $x^2 + \frac{2}{22}x + \left(\frac{1}{22}\right)^2 = \frac{360}{22} + \left(\frac{1}{22}\right)^2$ ; d'où, extrayant la racine carrée,  $x + \frac{1}{22} = \pm \sqrt{\frac{360}{22} + \left(\frac{1}{22}\right)^2}$ .

Donc enfin,  $x = -\frac{1}{22} \pm \sqrt{\frac{360}{22} + \left(\frac{1}{22}\right)^2}$ ,

résultat conforme à l'énoncé donné ci-dessus pour la double valeur de  $x$ .

Il reste maintenant à effectuer les calculs numériques. D'abord, il faut réduire  $\frac{360}{22} + \left(\frac{1}{22}\right)^2$ , à un seul nombre qui ait  $(22)^2$  pour dénominateur commun.

$$\text{Or, on a } \frac{360}{22} + \left(\frac{1}{22}\right)^2 = \frac{360 \times 22 + 1}{(22)^2} = \frac{7921}{(22)^2};$$

extrayant la racine carrée de 7921, on trouve 89 pour racine

exacte; ainsi,  $\sqrt{\frac{360}{22} + \left(\frac{1}{22}\right)^2} = \frac{89}{22}$ .

$$\text{Donc enfin, } x = -\frac{1}{22} \pm \frac{89}{22}.$$

Séparons chacune des valeurs; il vient

$$x = -\frac{1}{22} + \frac{89}{22} = \frac{88}{22} = 4,$$

$$x = -\frac{1}{22} - \frac{89}{22} = -\frac{90}{22} = -\frac{45}{11}.$$

Ainsi, des deux valeurs propres à satisfaire à l'équation proposée, l'une est un nombre entier absolu, et l'autre un nombre fractionnaire négatif.

Soit, pour second exemple, l'équation

$$6x^2 - 37x = -57.$$

qui revient à

$$x^2 - \frac{37}{6}x = -\frac{57}{6}.$$

Si l'on ajoute aux deux membres le carré de  $\frac{37}{12}$ , ou  $\left(\frac{37}{12}\right)^2$ , il vient  $x^2 - \frac{37}{6}x + \left(\frac{37}{12}\right)^2 = -\frac{57}{6} + \left(\frac{37}{12}\right)^2$ ; d'où, extrayant

la racine carrée,  $x - \frac{37}{12} = \pm \sqrt{-\frac{57}{6} + \left(\frac{37}{12}\right)^2}$ .

Donc enfin, 
$$x = \frac{37}{12} \pm \sqrt{-\frac{57}{6} + \left(\frac{37}{12}\right)^2}.$$

Pour réduire  $\left(\frac{37}{12}\right)^2 - \frac{57}{6}$  à un seul nombre, observons que  $(12)^2 = 12 \times 12 = 6 \times 24$ ; ainsi, il suffit de multiplier 57 par 24, puis 37 par lui-même, et de diviser la différence du second produit au premier, par  $(12)^2$ .

Or,  $37 \times 37 = 1369$ ;  $57 \times 24 = 1368$ ;

donc 
$$\left(\frac{37}{12}\right)^2 - \frac{57}{6} = \frac{1}{(12)^2},$$

expression dont la racine carrée est  $\frac{1}{12}$ .

Donc,  $x = \frac{37}{12} \pm \frac{1}{12}$ , ou bien 
$$\begin{cases} x = \frac{37}{12} + \frac{1}{12} = \frac{38}{12} = \frac{19}{6}, \\ x = \frac{37}{12} - \frac{1}{12} = \frac{36}{12} = 3. \end{cases}$$

Cet exemple est remarquable, en ce que chacune des deux valeurs est positive, et répond directement à l'énoncé de la question, dont l'équation proposée peut être considérée comme la traduction algébrique.

Soit maintenant l'équation littérale

$$4a^2 - 2x^2 + 2ax = 18ab - 18b^2;$$

on a d'abord, en transposant, changeant les signes, puis di-

visant par 2,  $x^2 - ax = 2a^2 - 9ab + 9b^2$ ; d'où

complétant le carré,  $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2}{4} - 9ab + 9b^2$ ;

extrayant la racine,  $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{9a^2}{4} - 9ab + 9b^2}$ .

Or,  $\frac{9a^2}{4} - 9ab + 9b^2$ , a évidemment pour racine,  $\frac{3a}{2} - 3b$ ;  
donc,  $x = \frac{a}{2} \pm \left(\frac{3a}{2} - 3b\right)$ , d'où  $\begin{cases} x = 2a - 3b, \\ x = -a + 3b. \end{cases}$

Ces deux valeurs seront positives à la fois, si l'on a  $2a > 3b$ , mais  $3b > a$ , c'est-à-dire si la valeur numérique de  $b$  est plus grande que  $\frac{a}{3}$ , mais plus petite que  $\frac{2a}{3}$ .

Nous proposerons pour exercices les équations

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \dots \text{valeurs } \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases},$$

$$\frac{1}{3}x - 4 - x^2 + 2x - \frac{4}{5}x^2 = 45 - 3x^2 + 4x \begin{cases} x = 7,12 \\ x = -5,73 \end{cases} \text{ à } 0,01 \text{ près.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 - 2bx + x^2 = \frac{m^2 x^2}{n^2} \dots \text{donne} \\ x = \frac{n}{n^2 - m^2} \left( bn \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2 m^2 - a^2 n^2} \right) \end{array} \right\}.$$

95. On peut résoudre l'équation  $ax^2 + bx = c$ , sans faire disparaître le coefficient de  $x^2$ ; mais les transformations sont plus compliquées.

Le terme  $ax^2$  peut être mis sous la forme  $(x\sqrt{a})^2$ , et le terme  $bx$  sous celle-ci :  $2x\sqrt{a} \times \frac{b}{2\sqrt{a}}$ ; d'où il suit que  $ax^2 + bx$

forme les deux premiers termes du carré de  $x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$ ;

ainsi, en ajoutant aux deux membres  $\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$  ou  $\frac{b^2}{4a}$ , on rendra le premier membre un carré parfait.



Effectuons cette transformation ; l'équation devient

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = c + \frac{b^2}{4a} ;$$

extrayant la racine,  $x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} = \pm \sqrt{c + \frac{b^2}{4a}} ;$

transposant,  $x\sqrt{a} = -\frac{b}{2\sqrt{a}} \pm \sqrt{c + \frac{b^2}{4a}} .$

Divisant les deux membres par  $\sqrt{a}$ , et observant

$$1^{\circ} . \text{ que } -\frac{b}{2\sqrt{a}} : \sqrt{a} = -\frac{b}{2(\sqrt{a})^2} = -\frac{b}{2a} ,$$

$$2^{\circ} . \text{ que } \sqrt{c + \frac{b^2}{4a}} : \sqrt{a} = \sqrt{\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}} \text{ (n}^{\circ} 90),$$

on obtient enfin  $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}} ,$

ou bien encore,  $x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac + b^2}}{2a} ,$

résultat auquel on parvient plus aisément, en mettant l'équation sous la forme  $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a} ;$

96. Appliquons les principes précédens à la résolution de quelques problèmes.

Premier problème. *Trouver un nombre tel, que le double de son carré, augmenté du triple de ce nombre, donne pour somme 65.*

Soit  $x$  le nombre inconnu ; on a pour l'équation du problème,

$$2x^2 + 3x = 65 ,$$

d'où  $x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{65}{2} + \frac{9}{16}} = -\frac{3}{4} \pm \frac{23}{4} ;$

donc  $x = -\frac{3}{4} + \frac{23}{4} = 5 ;$  et  $x = -\frac{3}{4} - \frac{23}{4} = -\frac{13}{2} .$

La première valeur satisfait à la question, dans le sens de son énoncé. En effet,

$$2 \times (5)^2 + 3 \times 5 = 2 \times 25 + 15 = 65.$$

Pour interpréter la seconde, observons d'abord que, si l'on remplace  $x$  par  $-x$ , dans l'équation  $2x^2 + 3x = 65$ , il n'y a que le coefficient de  $3x$  qui change de signe, car  $(-x)^2 = x^2$ .

Ainsi, au lieu d'obtenir  $x = -\frac{3}{4} \pm \frac{23}{4}$ , on trouvera.....

$x = \frac{3}{4} \pm \frac{23}{4}$ , ou  $x = \frac{13}{2}$  et  $x = -5$ , valeurs qui ne diffèrent des précédentes que par le signe. Ainsi, l'on peut dire que la solution négative,  $-\frac{13}{2}$ , considérée indépendamment

de son signe, satisfait au nouvel énoncé: *Trouver un nombre tel, que le double de son carré, diminué du triple de ce même nombre, donne pour différence, 65.* En effet, on a

$$2 \times \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{13}{2} = \frac{169}{2} - \frac{39}{2} = 65.$$

Second problème. *Une personne a acheté un certain nombre d'aunes de drap pour 240 fr. Si, avec la même somme, elle avait eu 3 aunes de moins du même drap, l'aune lui aurait coûté 4 fr. de plus. On demande le nombre d'aunes acheté.*

Soit  $x$  le nombre d'aunes acheté;  $\frac{240}{x}$  exprime alors le prix d'une aune. Si, pour 240 fr., elle avait 3 aunes de moins, c'est-à-dire,  $x-3$  aunes, le prix de l'aune serait, dans cette hypothèse, représenté par  $\frac{240}{x-3}$ . Mais, d'après l'énoncé, ce dernier prix surpasse le premier de 4; on a donc l'équation

$$\frac{240}{x-3} - \frac{240}{x} = 4,$$

d'où l'on tire, en réduisant,  $x^2 - 3x = 180$ ,

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 180} = \frac{3 \pm 27}{2};$$

donc  $x = 15$  et  $x = -12$ .

La valeur  $x = 15$  satisfait à l'énoncé; car 15 aunes pour 240 fr., donnent  $\frac{240}{15}$  ou 16 fr., pour le prix de l'aune; et 12 aunes pour 240 fr., donnent pour le prix de l'aune 20 fr., nombre qui surpasse 16 de 4.

Quant à la seconde solution, on peut former un nouvel énoncé auquel elle convienne. En effet, remontons à l'équation, et changeons  $x$  en  $-x$ ; il vient

$$\frac{240}{-x-3} - \frac{240}{-x} = 4, \text{ ou bien, } \frac{240}{x} - \frac{240}{x+3} = 4,$$

équation qui peut être regardée comme la traduction algébrique de ce problème : Une personne a acheté un certain nombre d'aunes de drap pour 240 fr.; si elle avait payé la même somme pour 3 aunes de plus, l'aune lui aurait coûté 4 fr. de moins. On demande le nombre d'aunes acheté? En résolvant l'équation de ce nouveau problème, on trouverait évidemment  $x = 12$ ,  $x = -15$ ; car l'équation réduite deviendrait  $x^2 + 3x = 180$ , au lieu de  $x^2 - 3x = 180$ .

N. B. Les deux problèmes précédens offrent une nouvelle confirmation du principe établi n° 59 pour les problèmes du premier degré; et nous en donnerons (n° 99) une démonstration complète pour toutes les équations du second degré.

Troisième problème. Un négociant escompte deux billets, l'un de 8776 fr., payable dans 9 mois, l'autre de 7488 fr., payable dans 8 mois; il paie pour le premier, de plus que pour le second, 1200 fr. On demande le taux d'intérêt d'après lequel il a dû escompter?

*Solution.* Pour rendre les calculs plus simples, désignons par  $x$  l'intérêt de 100 fr. pour un mois, ou par  $12x$  l'intérêt pour un an;  $9x$  et  $8x$  sont les intérêts pour 9 mois et 8 mois; donc,  $100 + 9x$  et  $100 + 8x$  représentent ce que doit devenir le capital 100 fr. au bout de 9 mois et de 8 mois. Ainsi, pour déterminer les *valeurs actuelles* des deux billets de 8776 fr. et 7488 fr., il faut établir les proportions

$$100 + 9x : 100 :: 8776 : \frac{877600}{100 + 9x},$$

$$100 + 8x : 100 :: 7488 : \frac{748800}{100 + 8x};$$

et les quatrièmes termes de ces proportions expriment ce que le négociant a payé pour chacun des billets. Donc, en vertu de l'énoncé, on a l'équation  $\frac{877600}{100 + 9x} - \frac{748800}{100 + 8x} = 1200$ ; ou, observant que les deux membres sont divisibles par 400,

$$\frac{2194}{100 + 9x} - \frac{1872}{100 + 8x} = 3.$$

Chassant les dénominateurs et réduisant, on trouve

$$216x^2 + 4396x = 2200;$$

$$\text{d'où} \quad x = -\frac{2198}{216} \pm \sqrt{\frac{2200}{216} + \frac{(2198)^2}{(216)^2}}.$$

Réduisant les deux termes sous le radical au même dénominateur,

$$x = \frac{-2198 \pm \sqrt{5306404}}{216},$$

$$\text{ou, multipliant par 12,} \quad 12x = \frac{-2198 \pm \sqrt{5306404}}{18}.$$

Pour obtenir la valeur de  $12x$  à 0,01 près, il suffit d'extraire la racine carrée de 5306404 à 0,1 près, puisqu'elle doit être ensuite divisée par 18.

Cette racine est 2303,5;

$$\text{donc} \quad 12x = \frac{-2198 \pm 2303,5}{18};$$

$$\text{par conséquent, } 12x = \frac{105,5}{18} = 5,86,$$

$$\text{et} \quad 12x = \frac{-4501,5}{18} = -250,08.$$

La valeur positive,  $12x = 5,86$ , représente donc le taux d'intérêt cherché.

Quant à la solution négative, elle ne peut être regardée que comme liée à la première, par une même équation du second degré. En remontant à l'équation, et changeant  $x$  en  $-x$ , on traduirait difficilement la nouvelle équation dans un énoncé analogue à celui du problème proposé.

Quatrième problème. *Un homme achète un cheval qu'il vend au bout de quelque temps pour 24 louis. A cette vente, il perd autant pour 100, du prix de son achat, que le cheval lui avait coûté. On demande le prix de l'achat?*

*Solution.* Soit  $x$  le nombre de louis que le cheval lui a coûté,  $x - 24$  est une première expression de la perte qu'il a faite. Mais puisque, d'après l'énoncé, il perd autant de louis sur 100 qu'il y a d'unités dans  $x$ , sur 1 louis, il perd  $\frac{x}{100}$ , et sur  $x$  louis, il perd  $\frac{x^2}{100}$ . On a donc l'équation

$$\frac{x^2}{100} = x - 24,$$

$$\text{d'où} \quad x^2 - 100x = -2400,$$

$$\text{et} \quad x = 50 \pm \sqrt{2500 - 2400} = 50 \pm 10.$$

$$\text{Donc} \quad x = 60 \quad \text{et} \quad x = 40.$$

Ces deux valeurs satisfont également à la question.

En effet, supposons d'abord que 60 soit le prix de l'achat;

comme 24 est le prix de la vente, 36 est la perte que l'homme éprouve. D'un autre côté, il doit, en vertu de l'énoncé, perdre 60 pour 100 de 60, c'est-à-dire les  $\frac{60}{100}$  de 60, ou  $\frac{60 \times 60}{100}$ , nombre qui se réduit à 36; ainsi, 60 satisfait à l'énoncé.

Soit maintenant 40 le prix de l'achat, 16 est la perte qu'il éprouve; d'ailleurs, il doit perdre 40 pour 100 de 40, ou  $40 \times \frac{40}{100}$ , nombre qui se réduit à 16; ainsi, 40 vérifie encore l'énoncé.

### *Discussion générale de l'équation du second degré.*

Jusqu'à présent, nous n'avons résolu que des problèmes du second degré, dont les données étaient exprimées par des nombres particuliers. Mais pour mettre en état de résoudre des problèmes généraux, et d'interpréter tous les résultats auxquels on peut parvenir, en attribuant aux données des valeurs particulières, il est nécessaire de reprendre l'équation la plus générale du second degré, et d'examiner les circonstances qui résultent de toutes les hypothèses possibles, faites sur les coefficients. Tel est l'objet de la discussion de l'équation du second degré.

97. Avant de passer à cette discussion, nous ferons connaître un autre moyen de résoudre l'équation du second degré, qui nous conduira à des propriétés importantes dont jouissent les valeurs de l'inconnue.

On a déjà vu (n° 93) que toute équation du second degré peut être ramenée à la forme

$$x^2 + px = q \dots \dots (1),$$

$p$  et  $q$  étant des quantités numériques ou algébriques, entières ou fractionnaires, de signes quelconques.

Cela posé, si, afin de rendre le premier membre un carré parfait, on ajoute  $\frac{p^2}{4}$  aux deux membres, il vient

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = q + \frac{p^2}{4},$$

ou 
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \frac{p^2}{4}.$$

Quelle que soit la valeur du nombre exprimé par  $q + \frac{p^2}{4}$ , on peut toujours désigner sa racine carrée par  $m$ , et alors l'équation devient

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = m^2,$$

ou bien, 
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - m^2 = 0;$$

mais le premier membre de cette équation étant la différence de deux carrés, peut (n° 19) se mettre sous la forme

$$\left(x + \frac{p}{2} - m\right) \left(x + \frac{p}{2} + m\right);$$

ce qui donne la nouvelle équation

$$\left(x + \frac{p}{2} - m\right) \left(x + \frac{p}{2} + m\right) = 0 \dots (2),$$

équation dont le premier membre est le produit de deux facteurs, et le second membre est 0. Or, on peut rendre ce produit égal à 0, et par conséquent satisfaire à l'équation (2), de deux manières différentes :

Soit en posant  $x + \frac{p}{2} - m = 0$ , d'où  $x = -\frac{p}{2} + m$ ,

Soit en posant  $x + \frac{p}{2} + m = 0$ , d'où  $x = -\frac{p}{2} - m$ ,

ou bien, remplaçant  $m$  par sa valeur, 
$$\begin{cases} x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}, \\ x = -\frac{p}{2} - \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}. \end{cases}$$

Il est d'ailleurs visible que l'on ne peut rendre nul le premier membre de l'équation (2), qu'en y mettant pour  $x$  un nombre qui anéantisse l'un des deux facteurs dont il se compose.

Donc, comme l'équation (2) est une conséquence de l'équation (1), et réciproquement, toute équation du second degré admet deux valeurs pour l'inconnue, et ne peut en avoir davantage.

Cette méthode de résolution, qui peut-être est un peu plus longue que la première, a sur celle-ci l'avantage de mieux faire ressortir l'existence de deux valeurs, et de faire voir qu'il ne peut y en avoir que deux.

98. Ces valeurs jouissent de quelques propriétés remarquables. Premièrement, puisque l'équation

$$x^2 + px = q, \text{ ou } x^2 + px - q = 0,$$

peut, par une suite de transformations, être ramenée à la forme

$$\left(x + \frac{p}{2} - m\right) \left(x + \frac{p}{2} + m\right) = 0, \text{ } m \text{ étant égal à } \sqrt{q + \frac{p^2}{4}},$$

il s'ensuit que le premier membre,  $x^2 + px - q$ , de toute équation du second degré, dont le second est 0, se compose du produit de deux facteurs binômes du premier degré en  $x$ , ayant pour terme commun  $x$ , et pour seconds termes, les deux valeurs de  $x$  prises en signes contraires.

Cette propriété, d'après laquelle on retrouve aisément l'équation, dès que l'on connaît les valeurs de l'inconnue, a fait donner à ces valeurs, le nom de racines de l'équation.

Ainsi, soit l'équation  $x^2 + 3x - 28 = 0$ , qui, étant résolue, donne

$$x = 4, \quad x = -7;$$

le premier membre résulte du produit  $(x - 4)(x + 7)$ ;

en effet, il vient  $x^2 - 4x + 7x - 28 = x^2 + 3x - 28$ .

En second lieu, si l'on désigne par  $x'$  et  $x''$  les deux racines, on a, d'après la propriété précédente,

$$x^2 + px - q = (x - x')(x - x''),$$

ou, effectuant les calculs,

$$x^2 + px + q = x^2 - (x' + x'')x + x'x''$$



Comparant entre eux les termes analogues des deux membres, on trouve  $x' + x'' = -p$ ,  $x'x'' = -q$ .

Donc, 1°. la somme algébrique des deux racines est égale au coefficient du second terme de l'équation, pris en signe contraire; 2°. le produit des deux racines est égal au dernier terme de l'équation, ou bien, à la quantité toute connue, transposée dans le premier membre.

Ces deux propriétés peuvent au reste se vérifier, d'après les expressions générales des deux racines.

D'abord, si l'on ajoute

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}} \quad \text{avec} \quad x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{q + \frac{p^2}{4}},$$

on obtient

$$x' + x'' = -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}} - \frac{p}{2} - \sqrt{q + \frac{p^2}{4}} = -p;$$

maintenant, si on les multiplie, il vient

$$\begin{aligned} x'x'' &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}\right) \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}\right) \\ &= \frac{p^2}{4} - \left(q + \frac{p^2}{4}\right) = -q. \end{aligned}$$

*N.B.* Les propriétés précédentes supposent que l'équation soit ramenée à la forme  $x^2 + px - q = 0$ ; c'est-à-dire, 1°. qu'on ait d'abord divisé toute l'équation par le coefficient de  $x^2$ ; 2°. que tous les termes soient transposés et ordonnés, dans le premier membre.

#### Discussion.

99. Reprenons l'équation générale  $x^2 + px = q$ , qui, étant résolue, donne  $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$ .

Pour que cette expression, qui renferme un radical, puisse être évaluée, soit exactement, soit par approximation, il faut

(n° 85) que la quantité soumise au signe radical, c'est-à-dire,  $q + \frac{p^2}{4}$ , soit positive. Or,  $\frac{p^2}{4}$  étant nécessairement positif, quel que soit le signe de  $p$ , il s'ensuit que le signe de la quantité  $q + \frac{p^2}{4}$ , dépend principalement de celui de  $q$ , ou de la quantité toute connue.

Cela posé, *soit d'abord q positif*, auquel cas l'équation est de la forme  $x^2 \pm px = +q$  (on met ici les signes des coefficients en évidence); on en déduit

$$x = \mp \frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}};$$

or il est visible que les deux valeurs de  $x$  seront réelles et pourront être déterminées, soit exactement, si  $q + \frac{p^2}{4}$  est un carré parfait, soit avec tel degré d'approximation que l'on voudra.

Toutefois, de ces deux valeurs, *la première sera positive*, et répondra directement à l'équation, ou au problème dont cette équation est la traduction algébrique; car le radical  $\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$  étant numériquement plus grand que  $\frac{p}{2}$ , l'expression.....

$\mp \frac{p}{2} + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$ , est nécessairement de même signe que le radical.

*La seconde valeur est*, par la même raison, *essentiellement négative*, puisqu'elle doit avoir le même signe que celui dont le radical est affecté. Considérée indépendamment de son signe, elle répond, non plus à l'équation telle qu'elle a été établie, mais à cette équation dans laquelle on aurait remplacé  $x$  par  $-x$ , c'est-à-dire à  $x^2 \mp px = q$ .

En effet, celle-ci donne  $x = \pm \frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$ , valeurs qui ne diffèrent des précédentes que par le signe.

Il est d'ailleurs remarquable que la même équation lie

entre elles deux questions dont les énoncés diffèrent néanmoins par le sens de certaines conditions. (Voyez les deux problèmes du n<sup>o</sup> 95.)

100. Soit *actuellement*  $q$  négatif, auquel cas l'équation est de la forme  $x^2 \pm px = -q$ , et les valeurs de  $x$  sont

$$x = \mp \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Pour que l'extraction de racine puisse s'effectuer, il faut que l'on ait  $q < \frac{p^2}{4}$ . Cette condition étant satisfaite, les deux valeurs sont réelles.

Comme d'ailleurs,  $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$  est numériquement plus petit que  $\frac{p}{2}$ , il s'ensuit que ces valeurs sont *toutes deux négatives*, si  $p$  est positif dans l'équation, c'est-à-dire si cette équation est de la forme  $x^2 + px = -q$ ; et elles sont *toutes deux positives*, si  $p$  est négatif, c'est-à-dire si l'équation est de la forme  $x^2 - px = -q$ .

On peut parvenir aux mêmes conséquences, en se fondant sur les deux propriétés que, dans l'équation du second degré  $x^2 + px - q = 0$ , la somme algébrique des racines est égale au coefficient du second terme pris en signe contraire, et leur produit est égal au dernier terme, ou à la quantité toute connue, transposée dans le premier membre.

En effet, soit  $q$  positif dans le second membre, et par conséquent, négatif dans le premier; il s'ensuit que le produit des deux racines est négatif; donc *elles sont de signes contraires*. D'ailleurs, leur somme sera négative ou positive, suivant que  $p$  sera positif ou négatif; ce qui veut dire que des deux racines, la plus grande, numériquement, sera toujours de signe contraire au coefficient  $p$ .

Mais si  $q$  est négatif dans le second membre, et par conséquent positif dans le premier, le produit des deux racines est positif; donc *elles sont de même signe*, savoir, *toutes deux négatives*, si  $p$  est positif, et *toutes deux positives*, si  $p$  est né-

(n° 85) que la quantité soumise au signe radical, c'est-à-dire,  $q + \frac{p^2}{4}$ , soit positive. Or,  $\frac{p^2}{4}$  étant nécessairement positif, quel que soit le signe de  $p$ , il s'ensuit que le signe de la quantité  $q + \frac{p^2}{4}$ , dépend principalement de celui de  $q$ , ou de la quantité toute connue.

Cela posé, soit d'abord  $q$  positif, auquel cas l'équation est de la forme  $x^2 \pm px = +q$  (on met ici les signes des coefficients en évidence); on en déduit

$$x = \mp \frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}};$$

or il est visible que les deux valeurs de  $x$  seront réelles et pourront être déterminées, soit exactement, si  $q + \frac{p^2}{4}$  est un carré parfait, soit avec tel degré d'approximation que l'on voudra.

Toutefois, de ces deux valeurs, la première sera positive, et répondra directement à l'équation, ou au problème dont cette équation est la traduction algébrique; car le radical  $\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$  étant numériquement plus grand que  $\frac{p}{2}$ , l'expression.....

$\mp \frac{p}{2} + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$ , est nécessairement de même signe que le radical.

La seconde valeur est, par la même raison, essentiellement négative, puisqu'elle doit avoir le même signe que celui dont le radical est affecté. Considérée indépendamment de son signe, elle répond, non plus à l'équation telle qu'elle a été établie, mais à cette équation dans laquelle on aurait remplacé  $x$  par  $-x$ , c'est-à-dire à  $x^2 \mp px = q$ .

En effet, celle-ci donne  $x = \pm \frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$ , valeurs qui ne diffèrent des précédentes que par le signe.

Il est d'ailleurs remarquable que la même équation lie

entre elles deux questions dont les énoncés diffèrent néanmoins par le sens de certaines conditions. (Voyez les deux problèmes du n<sup>o</sup> 66.)

100. Soit *actuellement*  $q$  négatif, auquel cas l'équation est de la forme  $x^2 \pm px = -q$ , et les valeurs de  $x$  sont

$$x = \mp \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Pour que l'extraction de racine puisse s'effectuer, il faut que l'on ait  $q < \frac{p^2}{4}$ . Cette condition étant satisfaite, les deux valeurs sont réelles.

Comme d'ailleurs,  $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$  est numériquement plus petit que  $\frac{p}{2}$ , il s'ensuit que ces valeurs sont toutes deux négatives, si  $p$  est positif dans l'équation, c'est-à-dire si cette équation est de la forme  $x^2 + px = -q$ ; et elles sont toutes deux positives, si  $p$  est négatif, c'est-à-dire si l'équation est de la forme  $x^2 - px = -q$ .

On peut parvenir aux mêmes conséquences, en se fondant sur les deux propriétés que, dans l'équation du second degré  $x^2 + px - q = 0$ , la somme algébrique des racines est égale au coefficient du second terme pris en signe contraire, et leur produit est égal au dernier terme, ou à la quantité toute connue, transposée dans le premier membre.

En effet, soit  $q$  positif dans le second membre, et par conséquent, négatif dans le premier; il s'ensuit que le produit des deux racines est négatif; donc elles sont de signes contraires. D'ailleurs, leur somme sera négative ou positive, suivant que  $p$  sera positif ou négatif; ce qui veut dire que des deux racines, la plus grande, numériquement, sera toujours de signe contraire au coefficient  $p$ .

Mais si  $q$  est négatif dans le second membre, et par conséquent positif dans le premier, le produit des deux racines est positif; donc elles sont de même signe, savoir, toutes deux négatives, si  $p$  est positif, et toutes deux positives, si  $p$  est né-

gatif, puisque, dans le premier cas, leur somme algébrique est négative, et dans le second, elle est positive.

Nous pouvons reconnaître *a priori* que, toutes les fois que  $q$  est négatif dans le second membre, et  $p$  négatif dans le premier, le problème admet deux solutions directes, pourvu que l'on ait entre  $p$  et  $q$  la relation  $q < \frac{p^2}{4}$ .

L'équation  $x^2 - px = -q$ , peut, si l'on change les signes des deux membres, être mise sous la forme

$$px - x^2 = q, \quad \text{ou} \quad x(p - x) = q.$$

Or, cette nouvelle équation est évidemment la traduction algébrique de l'énoncé : *Partager un nombre donné  $p$  en deux parties dont le produit soit égal à un autre nombre donné  $q$* ; car si l'on désigne par  $x$  l'une des parties,  $p - x$  désigne l'autre, et leur produit est exprimé par  $x(p - x)$ .

Cela posé, je dis d'abord que l'énoncé du problème admet deux solutions directes. Pour le prouver, remarquons que l'équation est toujours la même, soit que l'on désigne par  $x$  la plus grande partie, soit que  $x$  représente la plus petite; ainsi, l'équation résolue ne doit pas donner l'une plutôt que l'autre; elle doit donc les donner toutes les deux à la fois.

*Autrement.* Les deux parties cherchées doivent être telles, que leur somme soit égale à  $p$ , et que leur produit soit égal à  $q$ . Or, ces mêmes relations existent entre les deux racines et les coefficients de l'équation  $x^2 - px = -q$ , ou  $x^2 - px + q = 0$ ; donc, les parties cherchées sont égales aux deux racines de cette équation.

Je dis, en second lieu, que, pour que le problème soit possible, on doit avoir  $q < \frac{p^2}{4}$ .

Car, quelles que soient les deux parties cherchées, on peut toujours désigner leur différence par  $d$ ; et comme leur somme est  $p$ , on aura, en vertu du théorème (n° 4), .....

pour la plus grande partie,  $\frac{p}{2} + \frac{d}{2}$ ,

et pour la petite,  $\frac{p}{2} - \frac{d}{2}$ .

Effectuant le produit de ces deux expressions, on trouve

$$\frac{p^2}{4} - \frac{d^2}{4},$$

quantité essentiellement moindre que  $\frac{p^2}{4}$ , à moins que l'on ne suppose les deux parties égales; auquel cas, on a  $d = 0$ , et le produit se réduit à  $\frac{p^2}{4}$ .

Il est donc absurde d'exiger que le produit, que l'on avait d'ailleurs représenté par  $q$ , soit plus grand que  $\frac{p^2}{4}$ . D'où l'on peut conclure que, toutes les fois que la quantité connue est négative dans le second membre, mais numériquement plus grande que le carré de la moitié du coefficient du second terme, la question proposée est impossible.

*Remarque.* Il résulte encore de là que le plus grand produit qu'on puisse obtenir, en décomposant un nombre en deux parties, et multipliant ces deux parties entre elles, est le carré de la moitié du nombre. Car, on vient de voir que ce produit peut être exprimé par  $\frac{p^2}{4} - \frac{d^2}{4}$ , nombre moindre que  $\frac{p^2}{4}$ , mais qui lui devient égal, lorsqu'on suppose  $d = 0$ , ou les deux parties égales.

#### *Examen de quelques cas particuliers.*

101. 1°. Si, lorsque  $q$  est négatif, c'est-à-dire lorsque l'équation est de la forme  $x^2 + px = -q$ , ( $p$  étant de signe quelconque), on suppose  $q$  égal à  $\frac{p^2}{4}$ , le radical,  $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ , des deux valeurs de  $x$ , devient nul, et ces valeurs se réduisent l'une et l'autre à  $x = -\frac{p}{2}$ ; on dit alors que les deux racines sont égales.

En effet, si l'on remonte à l'équation, et qu'on y rem-

place  $q$  par  $\frac{p^2}{4}$ , elle devient  $x^2 + px = -\frac{p^2}{4}$ , d'où l'on tire

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = 0, \text{ ou } \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0.$$

Dans ce cas, le premier membre est le produit de deux facteurs égaux. On peut donc dire aussi que les racines de l'équation sont égales; puisqu'alors les deux facteurs égaux à zéro, donnent la même valeur pour  $x$ .

2°. Si, dans l'équation générale  $x^2 + px = q$ , on suppose  $q = 0$ , les deux valeurs de  $x$  se réduisent à  $x = -\frac{p}{2} + \frac{p}{2}$ , ou  $x = 0$ , et à  $x = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2}$ , ou  $x = -p$ .

En effet, l'équation est alors de la forme  $x^2 + px = 0$ , ou  $x(x+p) = 0$ , équation que l'on peut vérifier, soit en posant  $x = 0$ , soit en posant  $x + p = 0$ , d'où  $x = -p$ .

3°. Si, dans l'équation générale  $x^2 + px = q$ , on suppose  $p = 0$ , il en résulte  $x^2 = q$ , d'où  $x = \pm\sqrt{q}$ ; c'est-à-dire que, dans ce cas, les deux valeurs de  $x$  sont égales et de signes contraires, réelles si  $q$  est positif, et imaginaires si  $q$  est négatif. L'équation rentre alors dans la classe des équations à deux termes, traitées n° 92.

4°. Supposons à la fois  $p = 0$ ,  $q = 0$ ; l'équation se réduit à  $x^2 = 0$ , et donne deux valeurs de  $x$  égales à 0.

102. Il nous reste à examiner un cas assez singulier qui se rencontre souvent dans la résolution des problèmes du second degré.

Pour cela, il faut reprendre l'équation  $ax^2 + bx = c$ . Cette équation résolue, donne  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$ .

Supposons maintenant que, d'après une hypothèse particulière faite sur les données de la question, on ait  $a = 0$ ;

l'expression de  $x$  devient  $x = \frac{-b \pm b}{0}$ , d'où  $\begin{cases} x = \frac{0}{0}, \\ x = -\frac{2b}{0}. \end{cases}$



La seconde valeur se présente sous la forme de l'*infini*, et peut être regardée comme une réponse, si toutefois la question proposée est susceptible d'admettre des solutions infinies (n° 71).

Quant à la première  $\frac{0}{0}$ , il faut tâcher de l'interpréter.

D'abord, si l'on remonte à l'équation, on voit que l'hypothèse  $a=0$ , la réduit à  $bx=c$ ; d'où l'on tire  $x=\frac{c}{b}$ , expression *finie* et *déterminée*, qui doit être regardée comme représentant la vraie valeur de  $\frac{0}{0}$ , dans le cas qui nous occupe.

Mais pour ne laisser aucun doute à ce sujet, reprenons l'équation

$$ax^2 + bx = c,$$

et posons  $x=\frac{1}{y}$ ; il en résulte

$$\frac{a}{y^2} + \frac{b}{y} = c, \text{ ou bien, } cy^2 - by - a = 0$$

(en chassant les dénominateurs et transposant).

Cela posé, soit  $a=0$ ; cette dernière équation devient  $cy^2 - by = 0$ , et donne deux valeurs,  $y=0$ ,  $y=\frac{b}{c}$ .

Substituant ces valeurs dans la relation  $x=\frac{1}{y}$ , on en déduit

$$1^{\circ}. x=\frac{1}{0}, \quad 2^{\circ}. x=\frac{c}{b}.$$

Si, outre l'hypothèse de  $a=0$ , on a encore  $b=0$ , la valeur  $x=\frac{c}{b}$  devient elle-même  $\frac{c}{0}$  ou *infini*.

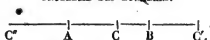
Et en effet, l'équation  $cy^2 - by - a=0$  se réduit, dans cette double hypothèse, à  $cy^2=0$ , équation dont les deux valeurs sont égales à 0. Ainsi, les valeurs de  $x$  correspondantes sont toutes les deux *infinies*.

Si l'on avait à la fois  $a=0$ ,  $b=0$ ,  $c=0$ , l'équation proposée deviendrait tout-à-fait indéterminée.

C'est le seul cas d'indétermination que présente l'équation du second degré.

Nous allons maintenant appliquer les principes de cette discussion générale à divers problèmes qui donneront lieu à toutes les circonstances qu'on rencontre ordinairement dans les problèmes du second degré.

PROBLÈME DES LUMIÈRES.



103. Cinquième problème. *Trouver sur la ligne qui joint deux lumières A et B d'intensités différentes, le point où elles éclairent également.*

( On suppose connu ce principe de Physique, que les intensités d'une même lumière, à deux distances différentes, sont en raison inverse des carrés de ces distances. )

*Solution.* Soient  $a$  la distance AB des deux lumières,  $b$  l'intensité de la lumière A, à l'unité de distance,  $c$  l'intensité de la lumière B, à la même distance. Soit C le point cherché; faisons  $AC = x$ , d'où  $BC = a - x$ .

Puisqu'en vertu du principe de Physique, l'intensité de A, à la distance 1, étant  $b$ , son intensité aux distances 2, 3, 4... est  $\frac{b}{4}$ ,  $\frac{b}{9}$ ,  $\frac{b}{16}$ ..., il s'ensuit qu'à la distance  $x$ , elle doit être exprimée par  $\frac{b}{x^2}$ . On a de même, pour l'intensité de B, à la dis-

tance  $a - x$ ,  $\frac{c}{(a - x)^2}$ ; mais, d'après l'énoncé, ces deux intensités doivent être égales; ainsi l'on a l'équation

$$\frac{b}{x^2} = \frac{c}{(a - x)^2};$$

d'où l'on tire, en développant et réduisant,

$$(b - c) x^2 - 2abx = -a^2b.$$

Cette équation donne  $x = \frac{ab}{b-c} \pm \sqrt{\frac{a^2b^2}{(b-c)^2} - \frac{a^2b}{b-c}}$ ,

ou réduisant,  $x = \frac{a(b \pm \sqrt{bc})}{b-c}$ .

Cette expression se simplifie, si l'on observe, 1°. que  $b \pm \sqrt{bc}$  peut se mettre sous la forme  $\sqrt{b} \cdot \sqrt{b \pm \sqrt{bc}}$ , ou  $\sqrt{b} \cdot (\sqrt{b} \pm \sqrt{c})$ ; 2°. que  $b-c = (\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2 = (\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})$ . Ainsi, en considérant d'abord le signe supérieur de l'expression ci-dessus, on a

$$x = \frac{a\sqrt{b} \cdot (\sqrt{b} + \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}.$$

On obtient de même pour la seconde valeur,

$$x = \frac{a\sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

Au reste, ces valeurs simplifiées pouvaient s'obtenir immédiatement, d'après l'équation proposée. En effet, l'équation

$$\frac{b}{x^2} = \frac{c}{(a-x)^2}, \text{ revient à } \frac{(a-x)^2}{x^2} = \frac{c}{b}.$$

Or, si l'on extrait la racine carrée des deux membres, il vient

$$\frac{a-x}{x} = \pm \sqrt{\frac{c}{b}} = \frac{\pm \sqrt{c}}{\sqrt{b}};$$

d'où, chassant les dénominateurs et transposant,

$$a\sqrt{b} - x\sqrt{b} = \pm x\sqrt{c}; \text{ donc, } x = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}.$$

*N. B.* On a d'abord obtenu les valeurs sous une forme plus compliquée, parce que l'on a résolu l'équation du second degré par la méthode générale, qui est moins simple que celle qui vient d'être employée.

Discutons maintenant les deux valeurs simplifiées. On a

$$\left. \begin{array}{l} 1^{\circ} \dots x = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} \\ 2^{\circ} \dots x = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} \end{array} \right\} \text{d'où l'on tire} \left\{ \begin{array}{l} a - x = \frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} \\ a - x = \frac{-a\sqrt{c}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} \end{array} \right.$$

Soit d'abord  $b > c$ .

LA PREMIÈRE VALEUR de  $x$ ,  $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$ , est positive et plus petite que  $a$ , car  $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$  est une fraction; ainsi cette valeur donne pour le point également éclairé, un point C situé entre les points A et B. On voit, en outre, que le point est plus voisin de B que de A; car, à cause de  $b > c$ , on a  $\sqrt{b} > \sqrt{c}$ , ou  $2\sqrt{b} > \sqrt{b} + \sqrt{c}$ ; d'où  $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} > \frac{1}{2}$ , et par conséquent,  $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} > \frac{a}{2}$ . Cela doit être en effet, puisqu'on suppose l'intensité de A plus forte que celle de B.

La valeur de  $a - x$  correspondante,  $\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$ , est positive et plus petite que  $\frac{a}{2}$ , comme il est aisé de le vérifier.

LA SECONDE VALEUR de  $x$ ,  $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}$ , est encore positive, mais plus grande que  $a$ ; car on a  $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} > 1$ . Cette seconde valeur donne donc un second point C' situé sur le prolongement de AB, et à la droite des deux lumières. On conçoit en effet que les deux lumières se répandant en tous sens, il peut y avoir sur le prolongement de AB, un autre point également éclairé; mais ce point doit être plus voisin de la lumière dont l'intensité est la moins forte.

On peut reconnaître, *à posteriori*, pourquoi ces deux valeurs sont liées par la même équation. Si, au lieu de prendre AC pour l'inconnue  $x$ , on prend AC', il en résulte  $BC' = x - a$ ; ainsi

Pon a l'équation  $\frac{b}{x^2} = \frac{c}{(x-a)^2}$  : or, comme  $(x-a)^2$  est identique avec  $(a-x)^2$ , la nouvelle équation est la même que l'équation déjà établie, qui, par conséquent, ne doit pas plutôt donner AC que AC'.

La seconde valeur de  $a-x$ ,  $\frac{-a\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ , est négative, ce qui doit être, puisque Pon a  $x > a$ ; mais, en changeant les signes de l'équation  $a-x = \frac{-a\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ , on trouve....  
 $x-a = \frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ ; et cette valeur de  $x-a$  représente la valeur absolue de BC'.

Soit  $b < c$ .

LA PREMIÈRE VALEUR de  $x$ ,  $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ , est toujours positive, mais plus petite que  $\frac{a}{2}$ , puisque Pon a

$$\sqrt{b} + \sqrt{c} > \sqrt{b} + \sqrt{b} > 2\sqrt{b}.$$

La valeur de  $a-x$  correspondante, ou  $\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ , est positive et plus grande que  $\frac{a}{2}$ .

Ainsi, dans l'hypothèse que Pon considère, le point C, situé entre les points A et B, doit être plus voisin de A que de B.

LA SECONDE VALEUR de  $x$ ,  $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ , ou  $\frac{-a\sqrt{b}}{\sqrt{c}-\sqrt{b}}$ , est essentiellement négative. Pour l'interpréter, remontons à l'équation, qui devient, lorsqu'on remplace  $x$  par  $-x$ ,  $\frac{b}{x^2} = \frac{c}{(a+x)^2}$ . Or,  $a-x$  exprimant d'abord la distance de B au point cherché,  $a+x$  doit maintenant exprimer cette même distance, ce qui exige que le point cherché soit à la gauche de A, en C'', par exemple. Et en effet, puisque l'intensité de la lumière B est,

par hypothèse, plus forte que celle de A, le second point cherché doit être plus voisin de A que de B.

\* La valeur de  $a-x$  correspondante,  $\frac{-a\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ , ou  $\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{c}-\sqrt{b}}$ , est positive; et cela tient à ce que,  $x$  étant négatif,  $a-x$  exprime réellement une somme arithmétique.

Soit  $b=c$ .

Les deux premières valeurs de  $x$  et de  $a-x$  se réduisent à  $\frac{a}{2}$ ; ce qui donne le milieu de AB pour le premier point également éclairé. Ce résultat est conforme à l'hypothèse.

Les deux autres valeurs se réduisent à  $\frac{a\sqrt{b}}{0}$ , ou deviennent *infinies*; c'est-à-dire que le second point également éclairé est situé à une distance des points A et B plus grande qu'aucune quantité assignable. Ce résultat répond parfaitement à l'hypothèse présente; car, si l'on suppose que la différence  $b-c$ , sans être tout-à-fait nulle, soit extrêmement petite, le second point également éclairé, existe, mais à une distance très grande des deux bougies; c'est ce qu'indique l'expression  $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ , dont le dénominateur est extrêmement petit par rapport au numérateur. Et lorsqu'on suppose enfin,  $b=c$  on  $\sqrt{b}-\sqrt{c}=0$ , le point cherché ne peut plus exister, ou doit se trouver situé à une distance *infinie*.

Observons, en passant, que dans le cas de  $b=c$ , si l'on considérait les valeurs non simplifiées,

$$x = \frac{a(b + \sqrt{bc})}{b - c} \quad \text{et} \quad x = \frac{a(b - \sqrt{bc})}{b - c},$$

la première, qui correspond à  $x = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ , deviendrait  $\frac{2ab}{0}$ , et la seconde qui correspond à  $x = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ , de-

viendrait  $\frac{0}{0}$ . Mais on n'obtient  $\frac{0}{0}$ , qu'à cause de l'existence d'un facteur commun,  $\sqrt{b}-\sqrt{c}$ , entre les deux termes de la valeur de  $x$ . (Voyez ce qui a été dit n° 72.)

Les deux termes de la première comprennent bien aussi le facteur commun  $\sqrt{b}+\sqrt{c}$ ; mais en le supprimant, on trouve  $x = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ , expression qui se réduit encore à  $\frac{a\sqrt{b}}{0}$ , dans l'hypothèse de  $b=c$ .

Soient  $b=c$  et  $a=0$ .

Le premier système des valeurs de  $x$  et de  $a-x$ , se réduit à 0, et le second système à  $\frac{0}{0}$ . Ce dernier caractère est ici le symbole de l'indétermination; car si l'on remonte à l'équation du problème,  $(b-c)x^2-2abx=-a^2b$ , elle se réduit dans l'hypothèse actuelle, à  $0.x^2-0.x=0$ , équation qui peut être satisfaite par un nombre quelconque mis pour  $x$ . En effet, puisque les deux bougies ont la même intensité et sont placées au même point, elles doivent éclairer également chacun des points de la ligne AB.

La solution 0 que donne le premier système, est une de ces solutions, en nombre infini, dont on vient de parler.

Soit enfin  $a=0$ ,  $b$  étant différent de  $c$ .

Chacun des deux systèmes se réduit à 0; ce qui prouve qu'il n'y a, dans ce cas, qu'un seul point également éclairé, c'est celui où les deux bougies sont placées.

L'équation se réduit alors à  $(b-c)x^2=0$ , et donne les deux valeurs égales,  $x=0$ ,  $x=0$ .

La discussion précédente offre un nouvel exemple de la précision avec laquelle l'Algèbre répond à toutes les circonstances de l'énoncé d'un problème.

104. Sixième problème. Trouver deux nombres tels, que la différence de leurs produits par les nombres respectifs  $a$  et  $b$

soit égale à un nombre donné  $s$ , et que la différence de leurs carrés soit égale à un autre nombre donné  $q$ .

*Solution.* Soient  $x$  et  $y$  les nombres cherchés; on a évidemment les deux équations 
$$\begin{cases} ax - by = s, \\ x^2 - y^2 = q. \end{cases}$$

De la première, on tire  $x = \frac{by + s}{a}$ , valeur qui, substituée dans la seconde, donne

$$(a^2 - b^2) y^2 - 2bsy = s^2 - a^2q \dots (1);$$

donc 
$$y = \frac{bs \pm a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}.$$

Reportant cette valeur dans l'expression de  $x$  en  $y$ , on trouve

$$x = \frac{b\left(\frac{bs \pm a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}\right) + s}{a},$$

d'où 
$$x = \frac{as \pm b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}.$$

(Il est nécessaire d'observer que, dans ces valeurs de  $y$  et de  $x$ , les deux signes supérieurs se correspondent, ainsi que les signes inférieurs.)

*Discussion.* Nous supposons, dans tout ce qui va suivre, que  $a$ ,  $b$ ,  $q$ ,  $s$ , soient des nombres absolus; s'il en était autrement, certains termes des valeurs de  $x$  et de  $y$  changeraient de signe, et il faudrait opérer ces changemens avant de discuter.

Soit  $a > b$ , d'où  $a^2 - b^2$  positif.

D'abord, pour que les deux valeurs de  $x$  et de  $y$  soient réelles, il faut que l'on ait

$$q(a^2 - b^2) < s^2, \text{ d'où } q < \frac{s^2}{a^2 - b^2}.$$

Supposons cette dernière condition remplie, et déterminons les signes dont les deux systèmes de valeurs sont affectés.



LE PREMIER SYSTÈME EST

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{as + b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}, \\ y = \frac{bs + a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}. \end{array} \right.$$

Les deux valeurs de ce système sont nécessairement positives et forment par conséquent une *solution directe* du problème, tel qu'il a été établi.

LE SECOND SYSTÈME EST

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{as - b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}, \\ y = \frac{bs - a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}. \end{array} \right.$$

La valeur de  $x$  est essentiellement positive; car de  $a > b$  on tire  $as > bs$ , et à *fortiori*,  $as > b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}$ , puisque le radical est plus petit que  $s$ .

Quant à celle de  $y$ , elle peut être positive ou négative.

Pour qu'elle soit positive, il faut que l'on ait

$$\begin{aligned} bs &> a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}; \\ b^2s^2 &> a^2s^2 - a^2q(a^2 - b^2); \end{aligned}$$

ou, ajoutant aux deux membres  $a^2q(a^2 - b^2)$ , et retranchant  $b^2s^2$ ,

$$a^2q(a^2 - b^2) > s^2(a^2 - b^2),$$

d'où, en divisant par  $a^2(a^2 - b^2)$ ,  $q > \frac{s^2}{a^2}$ .

Ainsi, pour que le second système soit encore une *solution réelle et directe*, il faut que l'on ait  $q < \frac{s^2}{a^2 - b^2}$ , mais  $q > \frac{s^2}{a^2}$ ,

c'est à-dire que  $q$  soit compris entre les deux nombres  $\frac{s^2}{a^2}$  et  $\frac{s^2}{a^2 - b^2}$ .

(Observons en passant, que la condition  $q > \frac{s^2}{a^2}$  pouvait être obtenue plus facilement, en remontant à l'équation en  $y$ .

Cette équation étant  $(a^2 - b^2)y^2 - 2bsy = s^2 - a^2q$ , on voit

que, dans l'hypothèse de  $a > b$ , elle est de la forme.....

$x^2 - px = -q$ , si l'on a  $a^2q > s^2$  ou  $q > \frac{s^2}{a^2}$ ; et l'on sait (n° 100) qu'alors les deux racines sont à la fois positives.)

Si l'on avait au contraire  $q < \frac{s^2}{a^2}$ , auquel cas on aurait, à plus forte raison,  $q < \frac{s^2}{a^2 - b^2}$ , la valeur de  $y$  du second système serait *negative*; et ce système (abstraction faite du signe pour  $y$ ) ne serait plus *une solution* du problème, tel qu'il a été établi, mais bien de celui dont les équations seraient  $\begin{cases} ax + by = s \\ x^2 - y^2 = q \end{cases}$ , et qui ne différerait du problème qu'en ce que  $s$  exprimerait une *somme* au lieu d'une *différence*.

Ainsi, dans le cas de  $a > b$ , le problème admet *deux solutions réelles et directes*, toutes les fois que l'on a

$$q > \frac{s^2}{a^2}, \text{ mais } q < \frac{s^2}{a^2 - b^2};$$

et elle n'en admet qu'une *seule*, si l'on a  $q < \frac{s^2}{a^2}$ .

En prenant pour  $a, b, s$ , des nombres absolus quelconques, pourvu toutefois que  $a$  soit  $> b$ , et choisissant ensuite pour  $q$  un nombre compris entre les deux limites  $\frac{s^2}{a^2}$  et  $\frac{s^2}{a^2 - b^2}$ , on sera certain d'obtenir *deux solutions directes*.

Soient, par exemple,  $a = 6$ ,  $b = 4$ ,  $s = 15$ , d'où l'on déduit

$$\frac{s^2}{a^2} = \frac{225}{36} = 6 \frac{1}{4}, \quad \frac{s^2}{a^2 - b^2} = \frac{225}{20} = 11 \frac{1}{4}.$$

On pourra supposer  $q = 10$ , par exemple, et il viendra

$$x = \frac{6 \times 15 \pm 4 \sqrt{225 - 20 \times 10}}{20} = \frac{90 \pm 20}{20} = \frac{11}{2} \text{ et } \frac{7}{2},$$

$$y = \frac{4 \times 15 \pm 6 \sqrt{225 - 20 \times 10}}{20} = \frac{60 \pm 30}{20} = \frac{9}{2} \text{ et } \frac{3}{2}.$$

Les solutions  $x = \frac{11}{2}$ ,  $y = \frac{9}{2}$  |  $x = \frac{7}{2}$ ,  $y = \frac{3}{2}$ , forment évidemment deux solutions directes des équations,

$$6x - 4y = 15,$$

$$x^2 - y^2 = 10.$$

Mais si l'on supposait  $a = 6$ ,  $b = 4$ ,  $s = 15$ ,  $q = 5$ , il serait facile de reconnaître que des deux systèmes, le premier seul donnerait une solution directe.

*Cas particuliers qui se rapportent à l'hypothèse de  $a > b$ .*

Soit  $q = \frac{s^2}{a^2 - b^2}$ , d'où  $q(a^2 - b^2) = s^2$ .

Les deux systèmes de valeurs de  $x$  et de  $y$  se réduisent à  $x = \frac{as}{a^2 - b^2}$ ,  $y = \frac{bs}{a^2 - b^2}$ . Ainsi, dans cette hypothèse, il n'y a qu'une solution du problème, et elle est directe.

Soit encore  $q = \frac{s^2}{a^2}$ ; d'où  $s^2 = a^2 q$  et  $s = a\sqrt{q}$ .

le premier système devient  $\begin{cases} x = \frac{as + b\sqrt{b^2 q}}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \sqrt{q}, \\ y = \frac{bs + a\sqrt{b^2 q}}{a^2 - b^2} = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \sqrt{q}; \end{cases}$

le second.....  $\begin{cases} x = \frac{as - b\sqrt{b^2 q}}{a^2 - b^2} = \sqrt{q}, \\ y = \frac{bs - a\sqrt{b^2 q}}{a^2 - b^2} = 0. \end{cases}$

Et en effet, supposons  $s^2 = a^2 q$  dans l'équation en  $y$ ; elle se réduit à  $(a^2 - b^2)y^2 - 2bsy = 0$ , d'où l'on déduit  $y = 0$ ,  $y = \frac{2bs}{a^2 - b^2} = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \sqrt{q}$ . Reportons chacune de ces valeurs dans  $x = \frac{by + s}{a}$ ; il en résulte

$$x = \frac{s}{a} = \sqrt{q}, \quad x = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \sqrt{q}.$$

\* Soit maintenant  $a < b$ ; d'où  $a^2 - b^2$  négatif.

Les expressions de  $x$  et de  $y$  peuvent se mettre sous la forme

$$x = \frac{-as \mp b\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)}}{b^2 - a^2},$$

$$y = \frac{-bs \mp a\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)}}{b^2 - a^2}.$$

Ces valeurs sont toutes réelles, puisque la quantité sous le radical est essentiellement positive.

Quant aux signes, la première valeur de  $x$  est essentiellement négative, et il en est de même de la première valeur de  $y$ . Ainsi ces valeurs, abstraction faite de leur signe, répondent, non aux équations proposées, mais aux équations  $by - ax = s$ ,  $x^2 - y^2 = q$ , dans la première desquelles l'ordre de la différence entre les produits  $ax$  et  $by$  est renversé.

La seconde valeur de  $x$  est nécessairement positive; car ille  $b > a$ , on déduit  $b\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)} > as$ , puisque le radical est numériquement plus grand que  $s$ .

Mais la seconde valeur de  $y$  n'est pas toujours positive. Pour qu'elle le soit, il faut qu'on ait la relation

$$a\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)} > bs,$$

d'où, élevant au carré....  $a^2s^2 + a^2q(b^2 - a^2) > b^2s^2$ ,

ou, transposant  $a^2s^2$ ....  $a^2q(b^2 - a^2) > (b^2 - a^2)s^2$ ,

et divisant par  $a^2(b^2 - a^2)$ ,...  $q > \frac{s^2}{a^2}$ .

En donnant à  $a$ ,  $b$ ,  $s$ ,  $q$  des valeurs particulières, telles que l'on ait  $b > a$  et  $q > \frac{s^2}{a^2}$ , le problème sera encore susceptible d'une solution directe.

Soit enfin  $a = b$ ; d'où  $a^2 - b^2 = 0$ .

Le premier système de valeurs devient, dans cette hypothèse,

$$x = \frac{2as}{0}, \quad y = \frac{2as}{0},$$

et le second,  $x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}.$

Mais si l'on remonte à l'équation  $(a^2 - b^2)y^2 - 2bsy = s^2 - a^2q$ , qui, lorsqu'on fait  $a = b$ , se réduit à  $-2asy = s^2 - a^2q$ ,

on en déduit.....  $y = \frac{a^2q - s^2}{2as};$

et l'expression de  $x$  en  $y$ ,  $x = \frac{by + s}{a}$ , donne  $x = \frac{a^2q + s^2}{2as}.$

(On parviendrait aux mêmes résultats en imitant le procédé suivi n° 102, c'est-à-dire en faisant dans l'équation en  $y$ ,

$$y = \frac{1}{x},$$

Pour que la solution  $x = \frac{a^2q + s^2}{2as}$ ,  $y = \frac{a^2q - s^2}{2as}$ , soit directe, il faut qu'on ait  $q > \frac{s^2}{a^2}.$

*Des Transformations qu'on peut faire subir aux inégalités.*

105. Dans le cours de la discussion des deux problèmes précédens, nous avons eu occasion de poser plusieurs *inégalités*, et nous avons exécuté sur elles des transformations analogues à celles qu'on exécute sur les *égalités*. C'est en effet ce qu'on est souvent obligé de faire, lorsqu'en discutant un problème, on veut établir entre les données les relations nécessaires pour que le problème soit susceptible d'une solution directe ou du moins réelle, et fixer, à l'aide de ces relations, les limites entre lesquelles doivent se trouver les valeurs particulières de certaines données, pour que l'énoncé tombe dans telle ou telle circonstance. Or, quoique les principes établis pour les équations soient en général applicables aux inégalités, il y a néanmoins quelques exceptions dont il est nécessaire de parler, afin de mettre les commençans en garde contre des erreurs qu'ils pourraient commettre, en faisant usage des signes d'inégalité. Ces

expressions proviennent de l'introduction des *expressions négatives* comme *quantités*, dans les calculs.

Pour plus de clarté, nous allons passer en revue les diverses transformations que l'on peut avoir à faire subir aux inégalités, en ayant soin de faire ressortir les exceptions dont ces transformations sont susceptibles.

**TRANSFORMATION PAR ADDITION ET SOUSTRACTION.** *On peut, sans aucune exception, ajouter aux deux membres d'une inégalité quelconque, ou en retrancher une même quantité; l'inégalité subsiste toujours dans le même sens.*

Ainsi, soit  $8 > 3$ ; on a encore  $8 + 5 > 3 + 5$ , et  $8 - 5 > 3 - 5$ . Soit de même  $-3 < -2$ ; on a encore  $-3 + 6 < -2 + 6$ , et  $-3 - 6 < -2 - 6$ . Ceci est évident, d'après ce qui a été dit (n° 63).

Ce principe sert, comme dans les équations, à transposer certains termes d'un membre de l'inégalité dans l'autre; soit, par exemple, l'inégalité  $a^2 + b^2 > 3b^2 - 2a^2$ ; il en résulte  $a^2 + 2a^2 > 3b^2 - b^2$ , ou  $3a^2 > 2b^2$ .

*On peut, sans exception, ajouter membre à membre deux ou plusieurs inégalités établies dans le même sens, et l'inégalité résultante subsiste dans le même sens que les proposées.* Ainsi de  $a > b$ ,  $c > d$ ,  $e > f$ ., il résulte  $a + c + e > b + d + f$ .

Mais il n'en est pas toujours de même, si l'on soustrait membre à membre deux ou plusieurs inégalités établies dans le même sens.

Soient les inégalités  $4 < 7$  et  $2 < 3$ ; on a bien  $4 - 2$ , ou  $2 < 7 - 3$ , ou 4.

Mais, soient les inégalités  $7 < 10$  et  $6 < 8$ ; il vient, par la soustraction,  $9 - 6$ , ou  $3 > 10 - 8$ , ou 2.

On doit donc éviter autant que possible cette transformation, ou, lorsqu'on l'emploie, s'assurer dans quel sens l'inégalité résultante existe.

**TRANSFORMATION PAR MULTIPLICATION ET DIVISION.** *On peut multiplier les deux membres d'une inégalité par un nombre positif ou absolu, et l'inégalité résultante subsiste dans le même sens.*

Ainsi de  $a < b$ , on tire  $3a < 3b$ ; de  $-a < -b$ , on déduit  $-3a < -3b$ .

Ce principe sert à faire disparaître les dénominateurs.

Que l'on ait l'inégalité  $\frac{a^2 - b^2}{2d} > \frac{c^2 - d^2}{3a}$ ; on en déduit, en multipliant les deux membres par  $6ad$ ,

$$3a(a^2 - b^2) > 2d(c^2 - d^2).$$

Même principe pour la division.

Mais lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par une quantité négative, l'inégalité existe en sens contraire.

Soit, par exemple,  $8 > 7$ ; en multipliant les deux membres par  $-3$ , on a, au contraire,  $-24 < -21$ .

De même,  $8 > 7$  donne  $\frac{8}{-3} < \frac{7}{-3}$ , ou  $-\frac{8}{3}$ .

Ainsi, lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité, par un nombre exprimé algébriquement, il faut s'assurer si le *multiplicateur* ou le *diviseur* n'est pas négatif; car, dans ce dernier cas, l'inégalité existerait dans un sens contraire.

Dans le problème du n° 104, de l'inégalité

$$a^2q(a^2 - b^2) > s^2(a^2 - b^2),$$

on a pu déduire  $q > \frac{s^2}{a^2}$ , en divisant par  $a^2(a^2 - b^2)$ , parce que l'on avait supposé  $a > b$ , ou  $a^2 - b^2$  positif.

Il n'est pas permis de changer les signes des deux membres d'une inégalité, à moins qu'on n'établisse l'inégalité résultante en sens contraire; car cette transformation revient évidemment à multiplier les deux membres par  $-1$ .

TRANSFORMATION PAR ÉLÉVATION AU CARRÉ. On peut élever au carré les deux membres d'une inégalité entre des nombres absolus, et l'inégalité subsistera dans le même sens.

Ainsi, de  $5 > 3$ , on déduit  $25 > 9$ ; de  $a + b > c$ , on tire  $(a + b)^2 > c^2$ .

Mais si les deux membres de l'inégalité sont de signes quelconques, on ne peut pas assurer d'avance dans quel sens l'inégalité résultante subsistera.

Par exemple,  $-2 < 3$  donne  $(-2)^2$  ou  $4 < 9$ ; mais  $-3 > -5$  donne, au contraire,  $(-3)^2$  ou  $9 < (-5)^2$  ou  $25$ .

On doit donc, avant d'élever au carré, s'assurer si les deux membres peuvent être regardés comme des nombres absolus.

TRANSFORMATION PAR EXTRACTION DE RACINE CARRÉE. On peut extraire la racine carrée des deux membres d'une inégalité entre des nombres absolus, et l'inégalité subsiste dans le même sens, entre les valeurs numériques de ces racines carrées.

Observons d'abord qu'on ne peut proposer d'extraire la racine carrée des deux membres d'une inégalité, qu'autant qu'ils sont essentiellement positifs; car autrement, on serait conduit à des expressions imaginaires, qu'on ne pourrait comparer.

Mais que l'on ait  $9 < 25$ ; on en déduit  $\sqrt{9}$  ou  $3 < \sqrt{25}$  ou  $5$ .

De  $a^2 > b^2$ , on déduit  $a > b$ , si  $a$  et  $b$  expriment des nombres absolus.

De même, l'inégalité  $a^2 > (c - b)^2$  donne  $a > c - b$ , si l'on suppose déjà  $c$  plus grand que  $b$ ; et  $a > b - c$ , si, au contraire,  $b$  est plus grand que  $c$ .

En un mot, lorsque les deux membres d'une inégalité sont composés de termes additifs et de termes soustractifs, on doit avoir soin d'écrire, pour la racine carrée de chaque membre, un polynôme dans lequel les soustractions soient possibles.

106. Voici les énoncés de nouveaux problèmes:

Septième problème. Deux marchands vendent chacun d'une même étoffe; le second en vend 3 aunes de plus que le premier, et ils en retirent ensemble 35 écus. Le premier dit au second: J'aurais retiré de votre étoffe 24 écus; l'autre répond: et moi j'aurais retiré de la vôtre 12 écus  $\frac{1}{2}$ . Combien d'aunes ont-ils vendu chacun?

(Rép. 1<sup>er</sup> marchand  $x = 15$  ou bien  $x = 5$   
2<sup>e</sup> .....  $y = 18$  ou bien  $y = 8$ .)



Huitième problème. Un négociant doit un billet de 6240 fr. payable dans 8 mois, et un autre billet de 7632 fr. payable dans 9 mois. Il retire ces deux billets, et remet à leur place un billet de 14256 fr. payable dans un an. On demande le taux de l'intérêt. (Rép. 10 fr. 33 c. pour  $\frac{0}{0}$  par an.)

Neuvième problème. Une personne possède 13000 fr., qu'elle partage en deux portions placées en intérêt, de manière qu'elle en retire des revenus égaux. Si elle faisait valoir la première portion sur le même pied que la seconde, elle retirerait pour cette partie 360 fr. d'intérêt; et si elle faisait valoir la seconde portion au même taux que la première, elle retirerait 490 fr. d'intérêt. On demande les deux taux d'intérêt? (Rép. 7 et 6.)

N. B. L'équation de ce problème peut être résolue plus simplement que par la méthode générale.

Dixième problème. Trouver deux rectangles dont on connaît la somme  $q$  des surfaces, la somme  $a$  des bases, et dont on connaît les surfaces  $p$  et  $p'$ , quand à la base de chacun d'eux, on donne la hauteur de l'autre, c'est-à-dire quand on alterne les hauteurs?

Résoudre et discuter ce problème.

$$\left( \text{Rép. Base du premier, } x = \frac{a[2p + q \pm \sqrt{q^2 - 4pp'}]}{2(p + p' + q)} \right)$$

Onzième problème. Partager deux nombres  $a$  et  $b$ , l'un et l'autre en deux parties, de manière que le produit d'une partie de  $a$  par une partie de  $b$ , soit égal à un nombre donné  $p$ , et que le produit des parties restantes de  $a$  et  $b$  soit aussi égal à un nombre donné  $p'$ . Résoudre et discuter ce problème.

Douzième problème. Trouver un nombre tel, que son carré soit au produit des différences entre ce nombre et deux autres nombres donnés  $a$  et  $b$ , dans un rapport connu,  $p : q$ ? Résoudre et discuter ce problème.

Nous recommandons ce dernier problème aux élèves, non-seulement, parce que sa discussion offre de nouvelles applications des principes sur les inégalités, mais encore parce que les

formules auxquelles on parvient renferment implicitement les solutions d'une foule de questions analogues, dont les énoncés ne diffèrent que par le sens de certaines conditions.

*Questions de maximis et minimis. Propriétés des Trinômes du second degré.*

107. Il est une certaine classe de problèmes qui se rapportent à la théorie des équations du second degré, et qu'on rencontre souvent dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie. Ces questions ont pour objet de déterminer la plus grande ou la plus petite valeur que puisse recevoir le résultat de certaines opérations arithmétiques effectuées sur des nombres.

Soit proposée cette première question : *Partager un nombre donné  $2a$  en deux parties, dont le produit soit le plus grand possible, ou un MAXIMUM.*

Désignons par  $x$  l'une des parties, l'autre sera  $2a - x$ , et leur produit,  $x(2a - x)$ . Si l'on donne à  $x$  différentes valeurs, ce produit passera par différens états de grandeur, et il s'agit d'assigner à  $x$  la valeur qui doit rendre ce produit le plus grand possible.

Désignons par  $y$  ce plus grand produit, dont la valeur est inconnue pour le moment; on aura, d'après l'énoncé, l'équation

$$x(2a - x) = y.$$

Regardant d'abord  $y$  comme connu, et tirant de cette équation la valeur de  $x$ , on trouve  $x = a \pm \sqrt{a^2 - y}$ .

Or, ce résultat fait voir que les deux valeurs de  $x$  ne peuvent être réelles, qu'autant que l'on aura  $y < a^2$ , ou, tout au plus,  $y = a^2$ ; d'où l'on peut conclure que la plus grande valeur que puisse recevoir  $y$  ou le produit des deux parties, est  $a^2$ . Mais si l'on fait  $y = a^2$ , il en résulte  $x = a$ .

Ainsi, pour obtenir le plus grand produit, il faut diviser le nombre donné  $2a$  en deux parties égales, et le MAXIMUM qu'on

obtient est le carré de la moitié du nombre, résultat auquel on est déjà parvenu par un autre moyen (n° 100).

*Solution plus simple.* Appelons  $2x$  la différence qui existe entre les deux parties; puisque leur somme est déjà exprimée par  $2a$ , la plus grande de ces parties sera (n° 4) représentée par  $\frac{2a+2x}{2}$ , ou  $a+x$ , la plus petite par  $a-x$ , et l'on aura pour

l'équation,  $(a+x)(a-x)=y$ , ou, effectuant les calculs,  $a^2-x^2=y$ ; d'où  $x=\pm\sqrt{a^2-y}$ .

Pour que cette valeur de  $x$  soit réelle, il faut que  $y$  soit tout au plus égal à  $a^2$ ; et en faisant  $y=a^2$ , on obtient  $x=0$ , ce qui prouve que les deux parties doivent être égales.

Cette solution a l'avantage de conduire à une équation du second degré à deux termes.

108. N. B. Dans les équations  $x(2a-x)=y$ , et.....  $(a+x)(a-x)=y$ , établies ci-dessus, la quantité  $x$  est ce qu'on appelle une *variable*, et l'expression  $x(2a-x)$  ou  $(a+x)(a-x)$ , est dite une certaine fonction de la variable. Cette fonction, représentée par  $y$ , est elle-même une autre *variable*, dont la valeur dépend de celle qu'on attribue à la première. C'est pour cela que les analystes désignent quelquefois celle-ci sous le nom de *variable indépendante*, tandis que la seconde, ou  $y$ , reçoit des valeurs dépendantes de celles qu'on attribue à  $x$ .

En résolvant les deux équations  $x(2a-x)=y$ , et....  $(a+x)(a-x)=y$ , par rapport à  $x$ , ce qui donne

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - y},$$

et

$$x = \pm \sqrt{a^2 - y},$$

on peut regarder, à son tour,  $y$  comme une *variable indépendante*, et  $x$  comme une certaine fonction de cette variable.

109. Proposons-nous, pour seconde question, de diviser un nombre  $2a$  en deux parties telles, que la somme des racines carrées de ces deux parties soit un maximum.

Appelons  $x^2$  l'une des parties,  $2a - x^2$  sera l'autre partie, et la somme de leurs racines carrées aura pour expression  $x + \sqrt{2a - x^2}$ ; c'est cette expression dont il faut déterminer le *maximum*.

Posons

$$x + \sqrt{2a - x^2} = y.$$

Pour résoudre cette équation, il faut chasser le radical. On a d'abord, en transposant le terme  $x$  dans le second membre,

$$\sqrt{2a - x^2} = y - x,$$

d'où, élevant au carré,  $2a - x^2 = y^2 - 2xy + x^2$ ,

ou, ordonnant par rapport à  $x$ ,  $2x^2 - 2yx = 2a - y^2$ ,

équation d'où l'on tire  $x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{2a - y^2}{2}}$ ,

ou simplifiant,  $x = \frac{y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4a - y^2}$ .

Pour que les deux valeurs de  $x$  soient réelles, il faut que  $y^2$  soit tout au plus égal à  $4a$ ; donc  $2\sqrt{a}$  est la *plus grande valeur* que puisse recevoir  $y$ .

Mais si l'on fait  $y = 2\sqrt{a}$ , il en résulte  $x = \sqrt{a}$ , d'où l'on déduit  $x^2 = a$  et  $2a - x^2 = a$ .

Ainsi, le nombre donné  $2a$  doit être divisé en deux parties égales, pour que la somme des racines carrées de ces deux parties soit un *MAXIMUM*. Ce maximum est d'ailleurs égal à  $2\sqrt{a}$ .

Soit, par exemple, 72 le nombre proposé; on a  $72 = 36 + 36$ ; d'où  $\sqrt{36} + \sqrt{36} = 12$ ; c'est le *maximum* des valeurs qu'on puisse obtenir pour la somme des racines carrées des deux parties de 72.

Et en effet, décomposons 72 en 64 + 8; on a  $\sqrt{64} = 8$ ,  $\sqrt{8} = 2 +$  une fract.; d'où  $\sqrt{64} + \sqrt{8} = 10 +$  une fract.; soit encore  $72 = 49 + 23$ ; on a  $\sqrt{49} = 7$ ,  $\sqrt{23} = 4 +$  une fract.; donc  $\sqrt{49} + \sqrt{23} = 11 +$  une fract.

Considérons, pour 3<sup>e</sup> exemple, l'expression  $\frac{m^2x^2+n^2}{(m^2-n^2)x}$ , qu'il s'agit de rendre un MINIMUM ( $m$  étant supposé  $> n$ ).

$$\text{Posons } \frac{m^2x^2+n^2}{(m^2-n^2)x} = y; \text{ d'où } m^2x^2 - (m^2-n^2)y \cdot x = -n^2;$$

$$\text{on en déduit } x = \frac{(m^2-n^2)y}{2m^2} \pm \frac{1}{2m^2} \sqrt{(m^2-n^2)^2y^2 - 4m^2n^2}.$$

Or, pour que les deux valeurs de  $x$ , correspondantes à une valeur de  $y$ , soient réelles, il faut évidemment que  $(m^2-n^2)^2y^2$  soit au moins égal à  $4m^2n^2$ , et, par conséquent, que  $y$  soit au moins égal à  $\frac{2mn}{m^2-n^2}$ . Ainsi,  $\frac{2mn}{m^2-n^2}$  est le minimum des valeurs que puisse recevoir la fonction  $y$ .

Mais si l'on fait  $y = \frac{2mn}{m^2-n^2}$ , dans l'expression de  $x$ , le radical disparaît, et la valeur de  $x$  devient

$$x = \frac{m^2-n^2}{2m^2} \times \frac{2mn}{m^2-n^2} = \frac{n}{m}.$$

Cette valeur,  $x = \frac{n}{m}$ , est donc celle qui rend l'expression proposée un minimum.

110. Ces exemples suffisent pour mettre au fait de la marche qu'il faut suivre dans la résolution de ces sortes de questions.

Après avoir formé l'expression algébrique de la quantité susceptible de devenir, soit un MAXIMUM, soit un MINIMUM, on l'égalé à une lettre quelconque  $y$ . Si l'équation que l'on obtient ainsi est du second degré en  $x$  ( $x$  désignant la quantité variable qui entre dans l'expression algébrique), on la résout par rapport à  $x$ ; puis on égale à zéro la quantité soumise au radical, et l'on tire de cette dernière équation une valeur de  $y$ , qui représente alors le maximum ou le minimum cherché. Substituant enfin cette valeur de  $y$  dans l'expression de  $x$ , on a la valeur de cette dernière variable, propre à satisfaire à l'énoncé.

N. B. S'il arrivait que la quantité sous le radical restât essentiellement positive, quelle que fût la valeur de  $y$ , on en conclurait que *l'expression proposée pourrait passer par tous les états de grandeur possibles*, en d'autres termes, qu'elle aurait l'infini pour MAXIMUM, et 0 pour MINIMUM.

Soit, pour nouvel exemple, l'expression  $\frac{4x^2 + 4x - 3}{6(2x + 1)}$ ; on demande si cette expression est susceptible d'un maximum ou d'un minimum?

Posons 
$$\frac{4x^2 + 4x - 3}{6(2x + 1)} = y.$$

Il en résulte l'équation  $4x^2 - 4(3y - 1)x = 6y + 3$ , d'où l'on déduit  $x = \frac{3y - 1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{9y^2 + 4}$ . Or, quelque valeur qu'on donne à  $y$ , la quantité sous le radical sera toujours positive. Ainsi,  $y$  ou l'expression proposée peut passer par tous les états de grandeur.

Dans les exemples précédens, la quantité sous le radical de la valeur de  $x$  ne renfermait que deux parties, l'une affectée de  $y$  ou de  $y^2$ , et l'autre toute connue, et il a été facile d'obtenir le maximum ou le minimum dont la fonction était susceptible. Mais il peut arriver que la quantité soumise au radical soit un trinôme du second degré de la forme...  $my^2 + ny + p$ . Dans ce cas, la question devient plus difficile, et pour mettre en état de la résoudre complètement, il est nécessaire de démontrer plusieurs propriétés relatives à ces trinômes.

#### *Propriétés des trinômes du second degré.*

111. On appelle *trinôme du second degré*, toute expression algébrique qui peut être ramenée à la forme  $my^2 + ny + p$ ,  $m$ ,  $n$  et  $p$  étant des quantités connues de signes quelconques,  $y$  désignant d'ailleurs une variable, c'est-à-dire une quantité que l'on fait passer par différens états de grandeur.

Ainsi,  $3y^2 - 5y + 7, -9y^2 + 2y + 5,$   
 $(a - b + 2c)y^2 + 4b^2y - 2ac^2 + 3a^2b,$

sont dits des trinomes du second degré en  $y$ .

Si l'on égale à 0 le trinome  $my^2 + ny + p$ , ce qui donne

$$my^2 + ny + p = 0, \text{ d'où } y = -\frac{n}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{n^2 - 4mp},$$

on peut faire trois hypothèses principales, par rapport à la nature des valeurs de  $y$  qu'on vient d'obtenir.

On peut avoir  $n^2 - 4mp > 0$ , ou *positif*; dans ce cas, les deux racines sont *réelles* et *inégaux* de signes quelconques.

Ou bien,  $n^2 - 4mp = 0$ , auquel cas les deux racines sont *réelles* et *égales*.

Ou bien enfin,  $n^2 - 4mp < 0$ , ou *négatif*; alors les deux racines sont *imaginaires*.

Cela posé, voici les propriétés relatives à ces différens cas :

*Premièrement.* Toutes les fois qu'un trinome du second degré est tel qu'en l'égalant à 0, et résolvant l'équation qui en résulte, on obtient deux racines réelles et inégales, toute quantité (positive ou négative) comprise entre les deux racines, et substituée à la place de  $y$  dans le trinome, donne nécessairement un résultat de signe contraire à celui dont le coefficient de  $y^2$  est affecté; mais toute quantité non comprise entre les deux racines et substituée à la place de  $y$ , donne un résultat de même signe que le coefficient de  $y^2$ .

En effet, désignons par  $y'$  et  $y''$  les deux racines (supposées réelles) de l'équation  $my^2 + ny + p = 0$ ,

ou 
$$m\left(y^2 + \frac{n}{m}y + \frac{p}{m}\right) = 0.$$

Le premier membre  $m\left(y^2 + \frac{n}{m}y + \frac{p}{m}\right)$  peut (n° 98) se mettre sous la forme  $m(y - y')(y - y'')$ . Ainsi l'on a

$$my^2 + ny + p = m(y - y')(y - y'');$$

quelque valeur qu'on donne à  $y$ .

Cela posé, soit  $\alpha$  une quantité comprise entre  $y'$  et  $y''$ , c'est-à-dire telle que l'on ait  $\alpha > y'$  ou  $\alpha < y''$ , mais  $\alpha < \text{ou} > y''$ , il en résulte  $\alpha - y' > \text{ou} < 0$ , mais  $\alpha - y'' < \text{ou} > 0$ ; d'où l'on voit que les facteurs  $\alpha - y'$ ,  $\alpha - y''$ , sont de signes contraires; ainsi leur produit,  $(\alpha - y')(\alpha - y'')$ , est négatif. Donc,  $m(\alpha - y')(\alpha - y'')$ , ou sa valeur  $m\alpha^2 + n\alpha + p$ , est de signe contraire à celui dont  $m$  est affecté.

Si, au contraire, on suppose en même temps  $\alpha > \text{ou} < y'$  et  $\alpha > \text{ou} < y''$ , d'où l'on déduit  $\alpha - y' > \text{ou} < 0$ ; et  $\alpha - y'' > \text{ou} < 0$ , les deux facteurs sont de même signe; donc, leur produit  $(\alpha - y')(\alpha - y'')$  est positif, par conséquent,  $m(\alpha - y')(\alpha - y'')$  ou  $m\alpha^2 + n\alpha + p$ , est de même signe que  $m$ . C. Q. F. D.

En second lieu, si les deux racines sont réelles et égales, toute quantité différente de celle qui réduit le trinôme à 0, substituée dans ce trinôme, donne un résultat de même signe que le coefficient de  $y^2$ .

En effet, puisque les deux racines sont égales, on a la relation  $n^2 - 4mp = 0$ , d'où l'on tire  $p = \frac{n^2}{4m}$ ; dès lors, le trinôme  $my^2 + ny + p$ , ou  $m\left(y^2 + \frac{n}{m}y + \frac{p}{m}\right)$ , peut se mettre sous la forme  $m\left(y^2 + \frac{n}{m}y + \frac{n^2}{4m^2}\right) = m\left(y + \frac{n}{2m}\right)^2$ . Or, il est évident que pour toute valeur de  $y$ , autre que  $-\frac{n}{2m}$ , la quantité  $\left(y + \frac{n}{2m}\right)^2$  sera positive. Ainsi,  $m\left(y + \frac{n}{2m}\right)^2$ , ou  $my^2 + ny + p$ , sera de même signe que  $m$ . C. Q. F. D.

Troisièmement. Enfin, si les deux racines sont imaginaires, toute quantité réelle positive et négative, substituée à la place de  $y$ , donnera un résultat de même signe que le coefficient de  $y^2$ .

Car, puisque les deux racines sont imaginaires, on a la relation  $n^2 - 4mp < 0$ ; d'où  $4mp > n^2$ , ou bien (n° 105), divisant par  $4m^2$ , ...  $\frac{p}{m} > \frac{n^2}{4m^2}$ .



Soit donc  $\frac{p}{m} = \frac{n^2}{4m^2} + k^2 \dots$ ,  $k^2$  désignant une quantité essentiellement positive; il en résulte

$$my^2 + ny + p, \text{ ou } m\left(y^2 + \frac{n}{m}y + \frac{p}{m}\right) = m\left(y^2 + \frac{n}{m}y + \frac{n^2}{4m^2} + k^2\right) \\ = m\left(y + \frac{n}{2m}\right)^2 + mk^2,$$

quantité qui rest a toujours de même signe que  $m$ , quelque valeur que l'on y substitue pour  $y$ .

112. La seconde propriété nous conduit naturellement à parler d'une proposition qui est d'un fréquent usage dans l'analyse.

Toutes les fois, qu'un trinome du 2<sup>e</sup> degré,  $my^2 + ny + p$ , est un carré parfait, on a entre ses coefficients la relation  $n^2 - 4mp = 0$ .

En effet, si ce trinome est un carré parfait et de la forme  $(m'y + n')^2$ , les deux racines de l'équation  $my^2 + ny + p = 0$  doivent être égales. Or, pour qu'elles soient égales, il faut que la quantité sous le radical, ou  $n^2 - 4mp$ , soit nulle. On a donc la relation  $n^2 - 4mp = 0$ .

Réciproquement. Si l'on a entre les coefficients la relation  $n^2 - 4mp = 0$ , le trinome est un carré parfait; car on déduit de cette relation,  $p = \frac{n^2}{4m}$ ; d'où

$$my^2 + ny + p = my^2 + ny + \frac{n^2}{4m} = \left(y\sqrt{m} + \frac{n}{2\sqrt{m}}\right)^2.$$

113. Voyons actuellement l'usage de ces propriétés, dans la résolution des questions de *maximis et minimis*.

Soit proposé de déterminer si, lorsqu'on fait varier  $x$ , la fonction  $\frac{x^2 - 2x + 21}{6x - 14}$ , peut passer par tous les états de grandeur.

Posons  $\frac{x^2 - 2x + 21}{6x - 14} = y$ , d'où  $x^2 - 2(3y + 1)x = -21 - 14y$ .

Il en résulte  $x = 3y + 1 \pm \sqrt{9y^2 - 8y - 20}$ .

Pour que  $x$  soit réel, il faut que  $9y^2 - 8y - 20$  soit positif. Or, si l'on égale cette quantité à 0, il vient

$$y^2 - \frac{8}{9}y - \frac{20}{9} = 0, \text{ d'où } y = 2 \text{ et } y = -\frac{10}{9}.$$

Ces deux valeurs de  $y$  étant réelles, il suit de la première des propriétés ci-dessus, que, dès qu'on donnera à  $y$  des valeurs comprises entre 2 et  $-\frac{10}{9}$ , telles que 1, 0, -1, ... la valeur du trinome sera *négative*, puisque le coefficient de  $y^2$  est positif. Mais en donnant à  $y$  des valeurs non comprises entre 2 et  $-\frac{10}{9}$ , comme 3, 4, ... ou -2, -3, -4, ... on obtiendra un résultat *positif*. On voit donc que 2 est, *en nombres absolus*, le *minimum* des valeurs que doit recevoir  $y$ , pour que  $x$  soit réel. Si, dans l'expression de  $x$  ci-dessus, on fait  $y = 2$ , le radical disparaît, et l'on trouve  $x = 7$ .

En effet, l'expression  $\frac{x^2 - 2x + 21}{6x - 14}$  devient, dans l'hypothèse de  $x = 7$ , ...  $\frac{49 - 14 + 21}{42 - 14} = \frac{56}{28} = 2$ .

La racine  $y = -\frac{10}{9}$  est, *en nombres négatifs*, le *maximum* des valeurs que  $y$  peut recevoir, et la valeur de  $x$  correspondante à ce *maximum*, est  $x = 3 \times -\frac{10}{9} + 1 = -\frac{7}{3}$ .

Lorsque,  $x$  étant exprimé en  $y$ , le coefficient de  $y^2$  sous le radical, est négatif, et que les deux valeurs de  $y$ , déduites du trinome égalé à zéro, sont, l'une positive, l'autre négative, la valeur positive est un *maximum*, puisque toute valeur plus grande donnerait un résultat de même signe que le coefficient de  $y^2$ ; et la valeur négative est un *minimum*, parmi les valeurs négatives que  $y$  peut recevoir.

Nous laissons aux élèves le soin d'examiner les autres circonstances qui peuvent se présenter, par exemple, le cas où le coefficient de  $y^2$  étant positif, les deux valeurs de  $y$  sont positives; celui où ce même coefficient étant positif, les deux valeurs sont imaginaires; et il pourront d'ailleurs s'exercer sur les questions suivantes :

*Partager un nombre donné  $2a$  en deux parties, de manière que la somme des quotiens qu'on obtient quand on les divise mutuellement l'une par l'autre, soit un MINIMUM.*

(Rép. Les deux parties doivent être égales, et le minimum est 2.)

*Soient  $a$  et  $b$  deux nombres donnés dont  $a$  est le plus grand; on demande que l'expression  $\frac{(x+a)(x-b)}{x^2}$  soit la plus grande possible?*

(Rép. Maximum =  $\frac{(a+b)^2}{4ab}$ , et la valeur de  $x$  correspondante est  $x = \frac{2ab}{a-b}$ .)

*On demande que  $\frac{(a+x)(b+x)}{x}$  soit le plus petit possible.*

(Minimum =  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ ;  $x = \sqrt{ab}$ .)

### § III. Des équations et problèmes du second degré à deux ou plusieurs inconnues.

114. Nous ne pouvons donner ici une théorie complète, car nous ferons voir bientôt que la résolution de deux équations du second degré à deux inconnues, dépend en général de la résolution d'une équation du quatrième degré à une seule inconnue; mais nous allons nous proposer quelques questions qui ne dépendent, en dernière analyse, que de la résolution d'une équation du second degré à une inconnue.

Premier problème. *Trouver deux nombres tels, que la somme de leurs produits, par les nombres respectifs  $a$  et  $b$ , soit égale à  $2p$ , et que leur produit soit égal à  $p$ .*

Soient  $x$  et  $y$  les deux nombres cherchés; on a les équations

$$\begin{aligned} ax + by &= 2s, \\ xy &= p. \end{aligned}$$

De la première, on tire  $y = \frac{2s - ax}{b}$ ; d'où, substituant dans la seconde et réduisant,  $ax^2 - 2sx = -bp$ .

Donc, 
$$x = \frac{s}{a} \pm \frac{1}{a} \sqrt{s^2 - abp},$$

et par conséquent, 
$$y = \frac{s}{b} \mp \frac{1}{b} \sqrt{s^2 - abp}.$$

Le problème est, comme on le voit, susceptible de deux solutions directes, car  $s$  est évidemment  $> \sqrt{s^2 - abp}$ ; mais pour qu'elles soient réelles, il faut que l'on ait  $s^2 > \text{ou} = abp$ .

Soit  $a = b = 1$ ; les valeurs de  $x$  et de  $y$  se réduisent à

$$x = s \pm \sqrt{s^2 - p} \quad \text{et} \quad y = s \mp \sqrt{s^2 - p}.$$

D'où l'on voit que les deux valeurs de  $y$  sont égales à celles de  $x$ , prises dans un ordre inverse; ce qui veut dire que si  $s + \sqrt{s^2 - p}$  représente la valeur de  $x$ ,  $s - \sqrt{s^2 - p}$  représente la valeur correspondante de  $y$ , et réciproquement.

On interprète cette circonstance, en observant que les équations se réduisent, dans ce cas particulier, à  $\begin{cases} x + y = 2s, \\ xy = p; \end{cases}$

et alors, la question revient à trouver deux nombres dont la somme soit  $2s$ , et dont le produit soit  $p$ , ou, en d'autres termes, à partager un nombre  $2s$  en deux parties, dont le produit soit égal à un nombre donné  $p$ .

Or, on a vu (n° 100) que les deux parties sont nécessairement liées entre elles par une même équation du second-degré  $x^2 - 2sx + p = 0$ , dont le coefficient du second terme est la somme  $2s$  prise en signe contraire, et le dernier terme est le produit  $p$  des deux parties.

115. Second problème. Trouver quatre nombres en pro-

portion, connaissant la somme 2s des extrêmes, la somme 2s' des moyens, et la somme 4c<sup>2</sup> des carrés.

Désignons par  $u, x, y, z$ , les quatre termes de la proportion; on a, pour les équations du problème, en vertu des données et de la propriété fondamentale des proportions,

$$\begin{aligned} u + z &= 2s, \\ x + y &= 2s', \\ uz &= xy, \\ u^2 + x^2 + y^2 + z^2 &= 4c^2. \end{aligned}$$

Au premier abord, il peut paraître difficile de trouver les valeurs des inconnues; mais, à l'aide d'une *inconnue auxiliaire*, on parvient à les déterminer simplement.

En effet, soit  $p$  le produit inconnu des extrêmes ou des moyens, on a

1°. Les équations  $\begin{cases} u + z = 2s, \\ uz = p, \end{cases}$  qui donnent  $\begin{cases} u = s + \sqrt{s^2 - p}, \\ z = s - \sqrt{s^2 - p}. \end{cases}$

(Voyez le problème précédent.)

2°. Les équations  $\begin{cases} x + y = 2s', \\ xy = p, \end{cases}$  qui donnent  $\begin{cases} x = s' + \sqrt{s'^2 - p}, \\ y = s' - \sqrt{s'^2 - p}. \end{cases}$

On voit donc déjà que la détermination des quatre inconnues ne dépend plus que de celle du produit  $p$ .

Or, si l'on substitue ces valeurs de  $u, x, y, z$  dans la dernière des équations du problème, il vient

$$(s + \sqrt{s^2 - p})^2 + (s - \sqrt{s^2 - p})^2 + (s' + \sqrt{s'^2 - p})^2 + (s' - \sqrt{s'^2 - p})^2 = 4c^2,$$

ou, développant et faisant les réductions,

$$4s^2 + 4s'^2 - 4p = 4c^2; \text{ donc } p = s^2 + s'^2 - c^2.$$

Reportant cette valeur de  $p$  dans les expressions de  $u, x, y, z$ ,

on trouve enfin  $\begin{cases} u = s + \sqrt{c^2 - s'^2}, & x = s' + \sqrt{c^2 - s^2}, \\ z = s - \sqrt{c^2 - s'^2}, & y = s' - \sqrt{c^2 - s^2}. \end{cases}$

Ces quatre nombres constituent évidemment une proportion; car on a

$$uz = (s + \sqrt{c^2 - s'^2}) (s - \sqrt{c^2 - s'^2}) = s^2 - c^2 + s'^2.$$

$$xy = (s' + \sqrt{c^2 - s^2}) (s' - \sqrt{c^2 - s^2}) = s'^2 - c^2 + s^2.$$

*N. B.* Ce problème, que nous avons extrait de l'Algèbre de M. Lhuillier, est propre à faire voir combien l'introduction d'une *inconnue auxiliaire* dans un calcul, facilite la détermination des inconnues principales. On trouve, dans l'ouvrage que nous venons de citer, d'autres problèmes du même genre, qui conduisent à des équations d'un degré supérieur au second, et que néanmoins, on peut résoudre à l'aide d'équations du premier et du second degré, en introduisant des *inconnues auxiliaires*.

116. Considérons maintenant le cas où un problème donnerait lieu à deux équations quelconques du second degré à deux inconnues.

Une équation à deux inconnues est dite du *second degré*, lorsqu'elle renferme des termes dans lesquels la *somme des exposans des deux inconnues est égale à 2 et ne surpasse pas 2*. Ainsi,  $3x^2 - 4x + y^2 - xy - 5y + 6 = 0$ ,  $7xy - 4x + y = 0$ , sont des équations du second degré.

Il suit de là que toute équation du second degré à deux inconnues, est de la forme  $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + fx + g = 0$ ,  $a, b, c, \dots$  représentant des quantités connues, soit numériques, soit algébriques.

Soient donc proposées les équations

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + fx + g = 0,$$

$$a'y^2 + b'xy + c'x^2 + d'y + f'x + g' = 0.$$

On peut ordonner ces deux équations par rapport à  $x$ ; et il vient

$$cx^2 + (by + f)x + ay^2 + dy + g = 0,$$

$$c'x^2 + (b'y + f')x + a'y^2 + d'y + g' = 0.$$

Cela posé, si les deux coefficients de  $x^2$  étaient les mêmes dans

les deux équations, on obtiendrait, en retranchant ces deux équations l'une de l'autre, une équation du premier degré en  $x$ , qui pourrait être substituée à l'une des équations proposées; de cette équation, l'on tirerait la valeur de  $x$  en  $y$ , et reportant cette valeur dans une des équations proposées, on parviendrait à une équation qui ne renfermerait plus que l'inconnue  $y$ .

Or, si l'on multiplie la première équation par  $c'$ , et la seconde par  $c$ , il vient

$$cc'x^2 + (by + f)c'x + (ay^2 + dy + g)c' = 0,$$

$$cc'x^2 + (b'y + f')cx + (a'y^2 + d'y + g')c = 0;$$

équations qui peuvent remplacer les précédentes, et dans lesquelles le coefficient de  $x^2$  est le même.

En les soustrayant, on trouve

$$[(bc' - cb')y + fc' - cf']x + (ac' - ca')y^2 + (dc' - cd')y + gc' - cg' = 0,$$

$$\text{équation qui donne } x = \frac{(ca' - ac')y^2 + (cd' - dc')y + cg' - gc'}{(bc' - cb')y + fc' - cf'}.$$

Cette expression de  $x$ , substituée dans l'une des équations proposées, donnerait une *équation finale* en  $y$ .

Mais, sans effectuer cette substitution, qui entraînerait dans un résultat très compliqué, il est facile de reconnaître que l'équation en  $y$  doit être en général du quatrième degré; car le numérateur de l'expression de  $x$  étant de la forme  $my^2 + ny + p$ , son carré, ou l'expression de  $x^2$ , est du quatrième degré; or, ce carré forme l'une des parties du résultat de la substitution.

Donc, en général, la résolution de deux équations du second degré à deux inconnues dépend de celle d'une équation du quatrième degré à une seule inconnue.

117. Il est une classe d'équations du quatrième degré, dont on peut ramener la résolution à celle des équations du second degré; ce sont les équations de la forme  $x^4 + px^2 + q = 0$ . On les appelle *équations trinomes* ou *bicarrées*, parce qu'elles ne contiennent que trois espèces de termes : des termes en  $x^4$ , des termes en  $x^2$ , et des termes tout connus.

Pour résoudre l'équation  $x^4 + px^2 + q = 0$ , on pose, pour le moment,  $x^2 = y$ , ce qui réduit l'équation à

$$y^2 + py + q = 0, \text{ d'où l'on tire } y = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

mais l'équation,  $x^2 = y$  donne  $x = \pm \sqrt{y}$ .

$$\text{Donc, } x = \pm \sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$$

On reconnaît, par le fait même de la résolution de l'équation, que l'inconnue a quatre valeurs, puisque chacun des signes  $+$  et  $-$ , qui affectent le premier radical, peut être successivement combiné avec chacun des deux signes qui affectent le second; *mais ces valeurs sont égales et de signes contraires, deux à deux.*

Soit, par exemple, l'équation  $x^4 - 25x^2 = -144$ ;  
si l'on pose  $x^2 = y$ , il vient  $y^2 - 25y = -144$ ,  
d'où l'on tire  $y = 16, y = 9$ .

Substituant ces valeurs dans l'équation  $x^2 = y$ , on obtient

$$1^\circ. x^2 = 16, \text{ d'où } x = \pm 4; \quad 2^\circ. x^2 = 9, \text{ d'où } x = \pm 3.$$

Ainsi, les quatre valeurs sont  $+4, -4, +3$  et  $-3$ .

Soit encore l'équation  $x^4 - 7x^2 = 8$ . Posons  $x^2 = y$ , l'équation devient  $y^2 - 7y = 8$ ; d'où  $y = 8$  et  $y = -1$ .

Donc,  $1^\circ. x^2 = 8$ , d'où  $x = \pm 2\sqrt{2}$ ;  $2^\circ. x^2 = -1$ , d'où  $x = \pm \sqrt{-1}$ ; les deux dernières valeurs de  $x$  sont imaginaires.

Soit l'équation algébrique  $x^4 - (2bc + 4a^2)x^2 = -b^2c^2$ ;  
posons  $x^2 = y$ ; l'équation devient  $y^2 - (2bc + 4a^2)y = -b^2c^2$ ;  
d'où l'on déduit  $y = \frac{bc + 2a^2 \pm 2a\sqrt{bc + a^2}}{2}$ ,  
et par conséquent,  $x = \pm \sqrt{\frac{bc + 2a^2 \pm 2a\sqrt{bc + a^2}}{2}}$ .



*Extraction de la racine carrée d'une expression en partie rationnelle et en partie radicale.*

118. La résolution de l'équation trinôme du quatrième degré donne naissance à une nouvelle espèce d'opération algébrique ; c'est l'extraction de la racine carrée d'une quantité de la forme  $a \pm \sqrt{b}$ ,  $a$  et  $b$  étant des quantités numériques ou algébriques.

Que l'on ait l'expression  $3 \pm \sqrt{5}$  à élever au carré.

On trouve  $(3 \pm \sqrt{5})^2 = 9 \pm 6\sqrt{5} + 5 = 14 \pm 6\sqrt{5}$

donc réciproquement,  $\sqrt{14 \pm 6\sqrt{5}} = 3 \pm \sqrt{5}$ .

Pareillement,  $(\sqrt{7} \pm \sqrt{11})^2 = 7 \pm 2\sqrt{7} \times \sqrt{11} + 11$   
 $= 18 \pm 2\sqrt{77}$  ;

donc réciproquement,  $\sqrt{18 \pm 2\sqrt{77}} = \sqrt{7} \pm \sqrt{11}$ .

D'où l'on voit qu'une expression telle que  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ , peut quelquefois être ramenée à la forme  $a' \pm \sqrt{b'}$  ou  $\sqrt{a'} \pm \sqrt{b'}$  ; et, lorsque cette transformation est possible, il est avantageux de l'effectuer, puisqu'alors on n'a qu'une ou deux racines carrées simples à extraire, tandis que l'expression  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$  exige qu'on extraie une racine carrée de racine carrée.

119. Nous nous proposerons donc cette question : Une quantité de la forme  $a \pm \sqrt{b}$ , étant donnée, reconnaître si cette quantité est le carré d'une expression de la forme  $a' \pm \sqrt{b'}$ , ou  $\sqrt{a'} \pm \sqrt{b'}$ , et déterminer cette racine.

Appelons, en général,  $p$  et  $q$ , les deux parties dont la racine carrée de  $a + \sqrt{b}$  est censée se composer ;  $p$  et  $q$  sont alors deux monômes irrationnels du second degré, ou bien, l'un une quantité rationnelle, et l'autre un monôme irrationnel.

Cela posé, observons d'abord que, si l'on a

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = p + q \dots\dots (1),$$

il en résulte nécessairement

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=p-q\dots\dots(2).$$

Ces équations, multipliées entre elles, donnent

$$\sqrt{a^2-b}=p^2-q^2\dots\dots(3).$$

Or, puisque  $p$  et  $q$  sont deux monômes irrationnels, ou l'un rationnel et l'autre irrationnel, il s'ensuit que  $p^2$  et  $q^2$  doivent être rationnels; ainsi,  $p^2-q^2$ , ou sa valeur,  $\sqrt{a^2-b}$ , est nécessairement une quantité rationnelle.

D'où l'on peut déjà conclure que, si  $a \pm \sqrt{b}$  est le carré d'une quantité de la forme  $a' \pm \sqrt{b'}$ , ou  $\sqrt{a'} \pm \sqrt{b'}$ , l'expression  $a^2-b$  doit être un *carré parfait*. C'est le caractère auquel on reconnaît la possibilité de l'opération.

Soit donc  $a^2-b$  un carré parfait, et posons  $\sqrt{a^2-b}=c$ ; l'équation (3) devient

$$p^2-q^2=c.$$

D'ailleurs, les équations (1) et (2) étant élevées au carré, donnent

$$p^2+q^2+2pq=a+\sqrt{b},$$

$$p^2+q^2-2pq=a-\sqrt{b};$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$p^2+q^2=a\dots\dots(4);$$

mais on a déjà  $p^2-q^2=c\dots\dots(5);$

donc, ajoutant ces nouvelles équations, et retranchant la 2<sup>e</sup> de la 1<sup>re</sup>, on obtient

$$2p^2=a+c,$$

$$2q^2=a-c;$$

et par conséquent

$$\begin{cases} p = \pm \sqrt{\frac{a+c}{2}}, \\ q = \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}. \end{cases}$$

Ainsi,  $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ , ou  $p+q = \pm \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ ,

$\sqrt{a-\sqrt{b}}$ , ou  $p-q = \pm \sqrt{\frac{a+c}{2}} \mp \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ ;

ou plus clairement, ●

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \pm \left( \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}} \right) \dots (6),$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \pm \left( \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}} \right) \dots (7).$$

(Le double signe  $\pm$ , dont le second membre est affecté, vient de ce qu'en général, l'expression d'une racine carrée peut être indifféremment affectée du signe + ou du signe -.)

Ces deux formules peuvent être vérifiées *à posteriori*; en effet élevons, par exemple, les deux membres de la première au carré; il vient

$$a+\sqrt{b} = \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2} + 2 \sqrt{\frac{a^2-c^2}{4}} = a + \sqrt{a^2-c^2};$$

mais la relation  $\sqrt{a^2-b} = c$  donne  $c^2 = a^2-b$ ;

on a donc  $a+\sqrt{b} = a + \sqrt{a^2-a^2+b} = a + \sqrt{b}$ .

On vérifierait de même la seconde formule.

120. *Remarque.* Comme l'exactitude des formules (6) et (7) est constatée, quelle que soit la quantité  $c$ , ou  $\sqrt{a^2-b}$ , il s'ensuit que, quand bien même  $a^2-b$  ne serait pas un carré parfait, on pourrait encore remplacer les expressions  $\sqrt{a+\sqrt{b}}$  et  $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ , par les seconds membres des égalités (6) et (7); mais alors, on serait loin d'avoir simplifié la question, puisque les quantités  $p$  et  $q$  seraient de même forme que l'expression proposée.

Il n'y a donc lieu, en général, à effectuer cette transformation que lorsque  $a^2-b$  est un carré parfait.

121. Appliquons les formules (6) et (7) à quelques exemples.

Soit d'abord l'expression numérique  $94 + 42\sqrt{5}$ , qui revient à  $94 + \sqrt{8820}$ . On a

$$a = 94, \quad b = 8820,$$

$$\text{d'où} \quad c = \sqrt{a^2 - b} = \sqrt{8836 - 8820} = 4,$$

quantité rationnelle. Ainsi, la formule (1) est applicable.

Il vient

$$\sqrt{94 + 42\sqrt{5}} = \pm \left( \sqrt{\frac{94+4}{2}} + \sqrt{\frac{94-4}{2}} \right),$$

$$\text{ou réduisant,} \quad = \pm (\sqrt{49} + \sqrt{45}),$$

ou bien enfin,

$$\sqrt{94 + 42\sqrt{5}} = \pm (7 + 3\sqrt{5}).$$

$$\begin{aligned} \text{En effet,} \quad (7 + 3\sqrt{5})^2 &= 49 + 45 + 42\sqrt{5} \\ &= 94 + 42\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Soit encore l'expression

$$\sqrt{np + 2m^2 - 2m\sqrt{np + m^2}};$$

$$\text{on a} \quad a = np + 2m^2, \quad b = 4m^2(np + m^2),$$

$$\text{d'où} \quad a^2 - b = n^2p^2,$$

$$\text{et} \quad c \text{ ou } \sqrt{a^2 - b} = np;$$

donc, la formule (7) est applicable. Elle donne, pour la racine demandée,

$$\pm \left( \sqrt{\frac{np + 2m^2 + np}{2}} - \sqrt{\frac{np + 2m^2 - np}{2}} \right),$$

$$\text{ou réduisant,} \quad \pm (\sqrt{np + m^2} - m).$$

En effet,

$$(\sqrt{np+m^2}-m)^2 = np + m^2 - 2m\sqrt{np+m^2}.$$

Soit, pour troisième exemple, à simplifier l'expression

$$\sqrt{16+30\sqrt{-1}} + \sqrt{16-30\sqrt{-1}};$$

en appliquant les formules précédentes, on trouverait

$$\sqrt{16+30\sqrt{-1}}=5+3\sqrt{-1}, \sqrt{16-30\sqrt{-1}}=5-3\sqrt{-1};$$

donc,  $\sqrt{16+30\sqrt{-1}} + \sqrt{16-30\sqrt{-1}} = 10.$

Ce dernier exemple fait ressortir, plus que tous les autres, l'utilité du problème général dont nous venons de nous occuper; car il prouve que des *expressions imaginaires* combinées entre elles, peuvent donner lieu à des *résultats réels*, même *rationnels*.

Les élèves pourront s'exercer sur les exemples suivans :

$$\sqrt{28+10\sqrt{3}}=5+\sqrt{3}; \sqrt{1+4\sqrt{-3}}=2+\sqrt{-3};$$

$$\sqrt{bc+2b\sqrt{bc-b^2}}+\sqrt{bc-2b\sqrt{bc-b^2}}=\pm 2b;$$

$$\sqrt{ab+4c^2-d^2}+2\sqrt{4abc^2-abd^2}=\sqrt{ab}+\sqrt{4c^2-d^2}.$$

## CHAPITRE IV.

### *Analyse indéterminée du premier et du second degré.*

*Introduction.* Lorsque l'énoncé d'un problème fournit moins d'équations qu'il n'y a d'inconnues, le problème est dit *indéterminé*, en ce sens que (n° 55) ses équations peuvent être satisfaites par une infinité de systèmes de valeurs attribuées aux

inconnues. Mais il arrive souvent que la nature de la question exige que les valeurs des inconnues soient exprimées en *nombre entiers*; dans ce cas, l'une des inconnues, à laquelle on pouvait d'abord donner une valeur tout-à-fait arbitraire, ne doit plus recevoir que des valeurs entières et telles, que la valeur correspondante de l'autre inconnue ou de chacune des autres inconnues soit aussi exprimée en nombres entiers. Or, cette condition restreint beaucoup le nombre des *solutions*, surtout si l'on ne veut tenir compte que des *solutions directes*, c'est-à-dire des solutions en nombres entiers et positifs pour toutes les inconnues.

*L'objet de l'ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ est de résoudre les questions indéterminées du premier degré en nombres entiers et positifs.* Nous verrons plus loin le but que l'on se propose dans l'analyse indéterminée du second degré.

### § 1<sup>er</sup>. *Équations et Problèmes du premier degré à deux inconnues.*

122. Toute équation du premier degré à deux inconnues peut (n° 66) être ramenée à la forme  $ax + by = c$ ;  $a, b, c$ , désignant des nombres entiers, positifs ou négatifs.

Nous commencerons par faire observer que, si les coefficients  $a$  et  $b$  ont un facteur commun qui ne divise pas le second membre  $c$ , l'équation ne peut être satisfaite par des nombres entiers.

Car soit  $a = ha', b = hb'$ ; l'équation devient  $ha'x + hb'y = c$ , d'où l'on tire  $a'x + b'y = \frac{c}{h}$ , équation qui ne peut être satisfaite par aucun système de valeurs entières de  $x$  et de  $y$ , tant que  $c$  n'est pas divisible par  $h$ .

Nous supposons, dans tout ce qui va suivre, que  $a$  et  $b$  soient des nombres premiers entre eux; puisque, s'ils avaient un facteur commun, il faudrait que  $c$  renfermât aussi ce facteur, auquel cas on pourrait le supprimer dans l'équation.

123. Pour plus de clarté, nous traiterons d'abord des équations particulières, et nous généraliserons ensuite.

PREMIÈRE QUESTION. Partager 159 en deux parties, dont l'une soit divisible par 8 et l'autre par 13?

Désignons par  $x$  et  $y$  les quotiens de la division des deux parties cherchées par les nombres respectifs 8 et 13; il est clair que  $8x$  et  $13y$  expriment ces deux parties, et l'on a l'équation

$$8x + 13y = 159 \dots (1),$$

qui, d'après l'énoncé, doit être résolue en nombres entiers et positifs pour  $x$  et  $y$ .

On déduit d'abord de cette équation,  $\dots x = \frac{159 - 13y}{8}$ ,  
ou, effectuant la division autant que possible,  $x = 19 - y + \frac{7 - 5y}{8}$ .

Observons maintenant que la valeur de  $x$  sera entière, si l'on donne à  $y$  une valeur telle, que  $\frac{7 - 5y}{8}$  soit un nombre entier; d'ailleurs cette condition est nécessaire; ainsi, il faut et il suffit que  $\frac{7 - 5y}{8}$  soit égal à un nombre entier quelconque.

Soit  $t$  ce nombre entier ( $t$  est dit une indéterminée); il en résulte  $\dots \frac{7 - 5y}{8} = t$ , d'où  $5y + 8t = 7 \dots (2)$ ,

et la valeur de  $x$  devient  $x = 19 - y + t$ .

Toute valeur entière de  $t$  qui, substituée dans l'équation (2), en donnera une semblable pour  $y$ , satisfera à la condition que  $\frac{7 - 5y}{8}$  soit entier; ainsi, les deux valeurs de  $x$  et de  $y$  correspondantes seront entières et satisferont d'ailleurs à l'équation (1), qui résulte évidemment de l'élimination de  $t$  entre les deux équations  $\frac{7 - 5y}{8} = t$ ,  $x = 19 - y + t$ . La question est donc ramenée à résoudre en nombres entiers l'équation (2), dont les coefficients sont plus simples que ceux de l'équation (1).

On tire de l'équation (2), .....  $y = \frac{7-8t}{5}$ ,

ou, effectuant la division en partie,  $y = 1 - t + \frac{2-3t}{5}$ .

Toute valeur entière de  $t$ , qui rendra  $2-3t$  un multiple de 5, donnera aussi pour  $y$  un nombre entier, et sera par conséquent convenable. Posons donc  $\frac{2-3t}{5} = t'$ ,  $t'$  étant une nou-

velle indéterminée; il vient  $3t + 5t' = 2 \dots (3)$ ,

et la valeur de  $y$  se réduit à  $y = 1 - t + t'$ .

[L'équation (2) résulte d'ailleurs de l'élimination de  $t'$  entre ces deux-ci.]

La question est encore ramenée à résoudre en nombres entiers l'équation (3), de laquelle on tire

$$t = \frac{2-5t'}{3} = -t' + \frac{2-t'}{3};$$

posons  $\frac{2-t'}{3} = t''$ , il en résulte  $2t' + 3t'' = 2 \dots (4)$ ,

et  $t = -t' + t''$ .

De l'équation (4) on déduit  $t' = \frac{2-3t''}{2} = 1 - t'' - \frac{t''}{2}$ .

Posons enfin  $\frac{t''}{2} = t'''$ , il en résulte  $t' = 2t''' \dots (5)$ ,

et  $t = 1 - t' - t'''$ .

Comme dans l'équation (5), le coefficient de  $t'$  est égal à l'unité, il s'ensuit que toute valeur entière attribuée à  $t''$  en donnera une semblable pour  $t'$ . D'ailleurs, les deux inconnues principales  $x$  et  $y$ , et les inconnues intermédiaires  $t$ ,  $t'$  et  $t''$ , sont liées entre elles par les cinq équations

$$x = 19 - y + t,$$

$$y = 1 - t + t',$$

$$t = -t' + t'',$$

$$t' = 1 - t'' - t''',$$

$$t'' = 2t''',$$



Ainsi, en donnant à  $t''$  une valeur entière quelconque, et remontant de la dernière de ces équations aux deux premières, on obtiendra pour  $x$  et  $y$  des valeurs entières correspondantes, qui vérifieront nécessairement l'équation proposée; car, d'après les raisonnemens qui ont été faits plus haut; cette équation résulte de l'élimination de  $t$ ,  $t'$ ,  $t''$ , entre les cinq équations que l'on vient d'établir.

Mais afin de n'attribuer à  $t''$  que des valeurs auxquelles correspondent des valeurs entières et positives pour  $x$  et  $y$ , il convient d'exprimer  $x$  et  $y$  en fonction immédiate (\*) de l'indéterminée ou inconnue auxiliaire  $t''$ , à l'aide des cinq équations ci-dessus.

Or, l'expression de  $t'$  devient, lorsqu'on remplace  $t''$  par sa valeur en  $t''$ ,  $t' = 1 - 2t'' - t''$ , ou  $t' = 1 - 3t''$ , remontant à l'expression de  $t$ ...  $t = -t' + t'' = -1 + 3t'' + 2t''$ .

Donc

$$t = -1 + 5t''.$$

On trouvera de même  $y = 1 - (-1 + 5t'') + 1 - 3t''$ .

Donc

$$y = 3 - 8t''.$$

Enfin,  $x = 19 - (3 - 8t'') + (-1 + 5t'')$ , ou  $x = 15 + 13t''$ .

Il est facile de vérifier que ces deux dernières équations reproduisent l'équation proposée, par l'élimination de  $t''$ . En effet, si l'on multiplie la première équation par 13, et la seconde par 8, et qu'on ajoute les résultats, il vient

$$13y + 8x = 159.$$

Faisons successivement  $t'' = 0, 1, 2, 3, \dots$ , ou bien  $t'' = -1, -2, -3, \dots$ ; les formules précédentes donneront toutes les valeurs de  $x$  et de  $y$  en nombres entiers, soit positifs soit négatifs, propres à vérifier la proposée; mais si, comme l'exige

---

(\*) On appelle fonction d'une lettre considérée comme variable, toute expression qui renferme cette lettre combinée avec des quantités connues. (Foyez n° 108.)

l'énoncé, on ne doit tenir compte que des solutions entières et positives,  $t''$  ne peut recevoir que des valeurs qui rendent  $3 - 8t''$  et  $15 + 13t''$  positifs. Or, il n'y a évidemment que  $t'' = 0$  et  $t'' = -1$ , qui satisfont à cette condition; car toute valeur positive de  $t''$  rend  $y$  négatif, et toute valeur négative, numériquement plus grande que 1, rend  $x$  négatif.

Si l'on fait successivement  $t'' = 0$ ,  $t'' = -1$ ,

$$\text{il en résulte } \begin{cases} y = 3, & y = 11, \\ x = 15, & x = 2. \end{cases}$$

Donc les deux systèmes  $x = 15$  et  $y = 3$ ,  $x = 2$  et  $y = 11$ , sont les seuls qui vérifient l'équation  $8x + 13y = 159$ .

Quant à la question dont cette équation est la traduction algébrique, puisque  $8x$  et  $13y$  représentent les deux parties cherchées, il s'ensuit que  $8 \times 15$  ou 120, et  $13 \times 3$  ou 39, forment une première solution; que  $8 \times 2$  ou 16, et  $13 \times 11$  ou 143 forment une seconde solution; c'est-à-dire que 159 peut être partagé, soit en  $120 + 39$ , soit en  $16 + 143$ .

124. Soit, pour second exemple, l'équation

$$17x - 49y = -8 \dots (1).$$

$$\text{On en déduit d'abord } x = \frac{49y - 8}{17} = 2y + \frac{15y - 8}{17}.$$

Pour qu'à une valeur entière de  $y$ , il corresponde une valeur entière de  $x$ , il faut et il suffit que  $15y - 8$  soit un multiple de 17. Soit donc  $\frac{15y - 8}{17} = t$ ,  $t$  étant une inconnue intermédiaire;

$$\text{il en résulte } 15y - 17t = 8 \dots (2),$$

$$\text{et } x = 2y + t.$$

[L'élimination de  $t$  entre ces deux équations reproduirait l'équation (1).]

$$\text{On déduit de l'équation (2), } y = \frac{8 + 17t}{15} = t + \frac{8 + 2t}{15},$$

et la nouvelle expression,  $\frac{8 + 2t}{15}$ , doit être un nombre entier.

Posant  $\frac{8+2t}{15} = t'$ , on obtient  $2t - 15t' = -8 \dots (3)$ ,

et  $y = t + t'$ .

L'équation (3) donne  $t = \frac{15t' - 8}{2} = 7t' - 4 + \frac{t'}{2}$ .

Donc  $\frac{t'}{2}$  doit être un nombre entier.

Posons enfin  $\frac{t'}{2} = t''$ , il vient  $t' = 2t''$ ,

et  $t = 7t' - 4 + t' = 14t'' - 4 + 2t'' = 16t'' - 4$ .

Maintenant, pour exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de l'indéterminée  $t''$ , rapprochons les quatre équations

$$\begin{aligned} x &= 2y + t, \\ y &= t + t', \\ t &= 7t' - 4 + t', \\ t &= 2t''. \end{aligned}$$

L'avant-dernière devient  $t = 7 \times 2t'' - 4 + t''$ , ou  $t = 15t'' - 4$ ;  
remontant à la seconde, on a  $y = 15t'' - 4 + 2t''$ , ou  $y = 17t'' - 4$ ;  
enfin, la première devient

$$x = 2(17t'' - 4) + 15t'' - 4, \text{ ou } x = 49t'' - 12.$$

Ces deux formules reproduisent l'équation proposée, par l'élimination de  $t'$ ; car, si l'on multiplie la première par 49, la seconde par 17, et qu'on retranche les deux résultats l'un de l'autre, il vient

$$17x - 49y = -204 + 196 = -8.$$

On voit d'ailleurs qu'en donnant à  $t''$  des valeurs positives quelconques, on obtiendra pour  $x$  et  $y$  des valeurs positives; mais on ne peut supposer  $t''$  négatif.

Soit  $t'' = 1, 2, 3, 4, \dots$

On trouve  $y = 13, 30, 47, 64, \dots$

$x = 37, 86, 135, 184, \dots$

Le nombre des solutions entières et positives de l'équation proposée est donc infini; et le plus petit système est  $x = 37$ ,  $y = 13$ .

Ce système vérifie l'équation, car on a

$$17 \times 37 - 49 \times 13 = 629 - 637 = -8.$$

Nous nous sommes dispensé, dans cet exemple, de reprendre tous les raisonnemens qui avaient été faits dans le premier, pour rendre compte de toutes les opérations; mais il est facile aux commençans de les reproduire, en suivant pas à pas les transformations.

125. On peut résumer ainsi la méthode précédente :

Soit  $ax + by = c \dots (1)$ , l'équation qu'il s'agit de résoudre. Tirez de cette équation la valeur de l'inconnue qui a le plus petit coefficient, de  $x$ , par exemple, et effectuez la division autant que possible; vous obtenez une expression de  $x$  en  $y$ , composée d'une partie entière et d'une partie fractionnaire qu'il faut tâcher de rendre entière. Égalez cette seconde partie à une première indéterminée  $t$ ; il en résulte une nouvelle équation en  $y$  et  $t$ , que l'on peut nommer l'équation (2), et dont les coefficients sont plus simples que ceux de l'équation (1); la valeur de  $x$  se trouve d'ailleurs exprimée en fonction entière de  $y$  et  $t$ , et l'équation proposée résulte de l'élimination de  $t$  entre l'équation (2) et l'équation qui donne la valeur de  $x$  en  $y$  et  $t$ .

Tirez de l'équation (2) la valeur de  $y$ , et effectuez la division autant que possible. Égalez la partie fractionnaire à une seconde indéterminée  $t'$ ; d'où il résulte une équation (3) en  $t$  et  $t'$ , plus simple que les équations (1) et (2). La valeur de  $y$  se trouve ainsi exprimée en fonction entière de  $t$  et  $t'$ ; et la proposée résulte de l'élimination de  $t$  et  $t'$  entre l'équation (3) et les deux équations qui donnent  $x$  en fonction entière de  $y$  et  $t$ , puis  $y$  en fonction entière de  $t$  et  $t'$ .

Opérez sur l'équation (3) comme sur les équations (1) et (2), et continuez cette série d'opérations jusqu'à ce qu'enfin vous

parveniez à une dernière équation entre deux indéterminées, dont l'une ait pour coefficient l'UNITÉ.

Remontez ensuite de cette dernière équation aux précédentes, et cherchez, par des substitutions successives, à exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de la dernière indéterminée.

Vous obtenez ainsi deux formules à l'aide desquelles, en donnant à l'indéterminée restante des valeurs arbitraires, vous trouvez tous les systèmes de valeurs entières, tant positives que négatives, propres à vérifier l'équation proposée,  $ax + by = c$ .

Si l'on ne veut que des valeurs entières et positives pour  $x$  et  $y$ , les deux formules indiquent, par leur composition, et que les limites doivent être comprises les valeurs de la dernière indéterminée, pour que cette condition soit satisfaite.

Remarques. 1°. Le procédé qui vient d'être indiqué doit toujours conduire à une dernière équation dans laquelle le coefficient d'une des indéterminées est égal à l'Unité.

En effet, dans la première opération, on est conduit à diviser le plus grand coefficient des deux inconnues par le plus petit; dans la seconde, le plus petit coefficient par le reste de leur division; dans la troisième, le premier reste par le second reste, et ainsi de suite, c'est à-dire que l'on applique aux deux coefficients le procédé du commun diviseur. Donc, puisque, par hypothèse, les deux coefficients sont premiers entre eux (n° 122), on parviendra finalement à un reste égal à 1, qui servira de coefficient à l'avant-dernière des indéterminées que l'on aura introduites dans le cours du calcul.

2°. Lorsqu'on applique le procédé à une équation dans laquelle les coefficients des deux inconnues renferment un facteur commun, qui ne se trouve pas dans le second membre, mais que l'on n'a pas d'abord aperçu, la suite des calculs fait reconnaître l'impossibilité de résoudre la question en nombres entiers.

Soit, par exemple, l'équation  $49x - 35y = 11$ .

(Le facteur 7 est commun aux coefficients de  $x$  et  $y$ , et n'entre pas dans le second membre.)

On en déduit  $y = \frac{49x - 11}{35} = x + \frac{14x - 11}{35}$ .

Posant  $\frac{14x - 11}{35} = t$ , d'où  $y = x + t$ ,

on a  $x = \frac{35t + 11}{14} = 2t + \frac{7t + 11}{14}$ .

Posant  $\frac{7t + 11}{14} = t'$ , d'où  $x = 2t + t'$ ,

on trouve  $t = \frac{14t' - 11}{7} = 2t' - 1 - \frac{4}{7}$ .

Cette dernière équation est évidemment *impossible en nombres entiers pour  $t$  et  $t'$* , puisque  $\frac{4}{7}$  est une fraction. Donc aussi l'équation proposée est impossible en nombres entiers, pour  $x$  et  $y$ .

126. Au reste, le procédé ci-dessus est susceptible de plusieurs *simplifications* qu'il est important d'introduire, dans la pratique.

Reprenons l'équation déjà traitée,  $17x - 49y = -8$ ;

on en déduit d'abord,  $x = \frac{49y - 8}{17}$ .

Observons actuellement que 49 est égal à  $17 \times 2 + 15$ , ou bien encore, égal à  $17 \times 3 - 2$ ; donc,  $\frac{49y}{17} = 3y - \frac{2y}{17}$ ;

ainsi la valeur de  $x$  prend la forme  $x = 3y - \frac{(2y + 8)}{17}$ ;

et la question est ramenée à trouver pour  $y$  un nombre entier qui rende entière l'expression  $\frac{2y + 8}{17}$ . Or cette expression re-

vient à  $\frac{2(y + 4)}{17}$ ; mais les deux nombres 17 et 2 sont *premiers entre eux*. Ainsi, pour que  $\frac{2(y + 4)}{17}$  soit un nombre entier, il

*faute et il suffit* (*Arith.*, n° 132) que  $y + 4$  soit divisible par 17.

Posons donc  $\frac{y+4}{17} = t$ ,  $t$  étant un nombre entier tout-à-fait arbitraire; il en résulte.....  $y = 17t - 4$ ,  
et la valeur de  $x$  devient,.....  $x = 3y - 2t$ ,  
ou, remettant pour  $y$  sa valeur en  $t$ ,.....  $x = 49t - 12$ .

Ces formules donnent également toutes les solutions entières de la proposée; car l'élimination de  $t$  entre ces deux équations reproduit l'équation  $17x - 49y = -8$ .

En faisant  $t = 1, 2, 3, 4, \dots$ , on trouverait des valeurs entières et positives pour  $x$  et  $y$ ; mais on ne peut supposer  $t$  négatif ni égal à 0.

On doit sentir de quelle importance sont les modifications précédentes, puisque, par leur moyen, on n'a introduit qu'une seule indéterminée dans le cours du calcul.

Ces modifications se rencontrent dans presque tous les exemples; mais on ne peut les expliquer que sur des équations particulières; c'est pourquoi nous traiterons encore les questions suivantes.

127. SECONDE QUESTION. *Payer 78 fr. avec des pièces de 5 fr. et de 3 fr., sans aucune autre monnaie?*

Soient  $x$  le nombre de pièces de 5 fr. et  $y$  celui des pièces de 3 fr.; on a l'équation  $5x + 3y = 78$ , qui n'admet que des valeurs entières et positives, comme solutions de la question.

Cette équation résolue par rapport à  $y$ , donne  $y = \frac{78-5x}{3}$ ,  
ou, effectuant la division.....  $y = 26 - x - \frac{2x}{3}$ ,  
ou bien encore.....  $y = 26 - 2x + \frac{x}{3}$ .

En considérant la première forme de la valeur de  $y$ , on voit que la valeur de  $y$  correspondante à une valeur entière de  $x$ , ne peut être elle-même entière qu'autant que l'on aura  $\frac{2x}{3}$  égal

à un nombre entier; et comme 2 est premier avec 3, il faut et il suffit (*Arith.* n° 132) que  $x$  soit divisible par 3.

Soit donc.....  $x = 3t$ ;

il en résulte  $y = 26 - x - 2t$ , ou bien,....  $y = 26 - 5t$ .

Si l'on considère la seconde valeur, on voit de suite que  $x$  doit être un multiple de 3, ce qui donne  $x = 3t$ ,

d'où résulte encore  $y = 26 - 2x + t$ , ou  $y = 26 - 5t$ .

Ces deux formules montrent que  $t$  doit être positif et ne peut avoir une valeur plus grande que  $\frac{26}{5}$ , ou  $5\frac{1}{5}$ .

Soit donc  $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ,

il en résulte  $x = 0, 3, 6, 9, 12, 15$ ,

$y = 26, 21, 16, 11, 6, 1$ .

Ainsi, l'on peut satisfaire à la question de six manières différentes, savoir, avec 26 pièces de 3 fr., sans aucune pièce de 5 fr.; avec 21 pièces de 3 fr. et 3 pièces de 5 fr., avec 16 pièces de 3 fr. et 6 pièces de 5 fr., et ainsi de suite.

TROISIÈME PROBLÈME. Trouver un nombre qui, étant divisé par 39, donne le reste 16, et divisé par 56, donne le reste 27?

Appelons  $x$  le quotient entier de la division du nombre cherché par 39,  $39x + 16$  est une première expression de ce nombre; soit  $y$  le quotient entier de la division par 56,  $56y + 27$  est une seconde expression du nombre.

On a donc l'équation  $39x + 16 = 56y + 27$ ,  
ou réduisant.....  $39x - 56y = 11$ ..... (f).

On en déduit  $x = \frac{56y + 11}{39} = y + \frac{17y + 11}{39}$ .

ou bien encore,  $x = 2y - \frac{(2y - 11)}{39} = 2y - \frac{11(2y - 1)}{39}$ .

(On prend ici le quotient par excès, parce qu'on s'aperçoit que le facteur 11 peut être mis en évidence, dans le numérateur de la fraction.)



Comme dans l'expression  $\frac{11(2y-1)}{39}$ , le facteur 11 est premier avec 39, pour que cette expression soit un nombre entier, il faut et il suffit que  $2y-1$  soit divisible par 39.

Posons donc  $\frac{2y-1}{39} = t$ , il en résulte  $2y-39t=1 \dots (2)$ ,  
et par conséquent.....  $x=2y-11t$ .

L'équation (2) donne.....  $y = \frac{39t+1}{2} = 19t + \frac{t+1}{2}$ ;

posant  $\frac{t+1}{2} = t'$ , on obtient l'équation  $t = 2t' - 1$ ,

et par conséquent.....  $y = 19t' + t'$ .

Si, dans cette dernière équation, on remplace  $t$  par sa valeur en  $t'$ , elle devient  $y = 19(2t'-1) + t'$ , d'où  $y = 39t' - 19$ .

Reportant cette valeur de  $y$  et celle de  $t$   
dans l'expression de  $x$ , on trouve.....  $x = 56t' - 27$ .

On reconnaît, à l'inspection de ces deux formules, que  $t'$  peut avoir une valeur positive quelconque.

Soit  $t'=1$ , il en résulte  $y=39-19=20$ ,  $x=56-27=29$ .

Substituant la valeur de  $x$  dans l'expression  $39x+16$ , on obtient  $39.29+16$ , ou 1147, pour le plus petit nombre qui satisfait à l'énoncé de la question.

Soit encore  $t'=2$ , on trouve  $x=56.2-27=85$ ; donc  $39x+16=39.85+16=3331$ , et ainsi de suite. On peut d'ailleurs vérifier l'énoncé sur les deux nombres qui viennent d'être obtenus.

N. B. L'artifice auquel nous avons eu recours dans cette question, suppose de l'habitude; mais nous ne saurions trop en recommander l'usage, parce qu'il abrège beaucoup la détermination des valeurs de  $x$  et de  $y$ .

128. Si l'on compare les formules propres à donner tous les systèmes de valeurs de  $x$  et de  $y$ , dans les diverses questions que nous avons traitées jusqu'à présent, aux équations de ces

problèmes, on peut facilement reconnaître qu'elles jouissent de cette propriété commune: *Les coefficients de l'indéterminée qui entre dans ces formules, sont réciproquement les mêmes (au signe près pour l'un des deux) que les coefficients dont les inconnues  $x$  et  $y$  sont affectées dans l'équation proposée; c'est-à-dire que, dans la valeur de  $x$ , le coefficient de l'indéterminée est égal au coefficient dont  $y$  est affecté dans l'équation, et dans la valeur de  $y$ , le coefficient de l'indéterminée est égal au coefficient de  $x$  de l'équation, pris en signe contraire; ou réciproquement (quant aux signes des deux coefficients).*

Pour démontrer cette propriété, reprenons l'équation générale

$$ax + by = c \dots (1),$$

et supposons qu'après avoir appliqué la méthode, on soit parvenu aux deux formules

$$x = mt + A \dots (2),$$

$$y = nt + B \dots (3).$$

Nous observerons d'abord que, dans ces formules, les coefficients  $m$  et  $n$  doivent être premiers entre eux; car, s'ils avaient un facteur commun, et que l'on eût, par exemple,

$$m = m'k, \quad n = n'k,$$

les formules deviendraient

$$x = m'kt + A,$$

$$y = n'kt + B;$$

et en posant  $t = \frac{\ell}{k}$ , on obtiendrait

$$x = m'\ell + A, \quad y = n'\ell + B;$$

d'où il suivrait qu'à une valeur fractionnaire  $\frac{\ell}{k}$  de  $t$ , il correspondrait des valeurs entières de  $x$  et de  $y$ , ce qui serait con-

traire à la nature de la méthode, qui veut que toutes les indéterminées introduites dans le cours du calcul ne reçoivent que des valeurs entières.

Cela posé, on a vu précédemment que l'équation (1) doit résulter de l'élimination de  $t$  entre les équations (2) et (3).

Or, pour effectuer cette élimination, il suffit de multiplier l'équation (2) par  $n$ , et l'équation (3) par  $m$ , puis de retrancher l'une de l'autre; ce qui donne

$$nx - my = nA - mB,$$

équation qui doit être identique avec l'équation

$$ax + by = c,$$

(puisque d'ailleurs  $m$  et  $n$ , ainsi que  $a$  et  $b$ , sont premiers entre eux), et donne par conséquent

$$n = a, \quad m = -b.$$

Comme on peut soustraire les deux équations (2) et (3), dans un ordre inverse, il vient encore

$$my - nx = mB - nA;$$

d'où, comparant avec l'équation (1),

$$n = -a, \quad m = b.$$

*Ce qu'il fallait démontrer.*

AUTREMENT. Les valeurs (2) et (3) devant vérifier l'équation (1), quel que soit  $t$ , on a nécessairement

$$a(mt + A) + b(nt + B) = c,$$

ou, développant et ordonnant par rapport à  $t$ ,

$$(am + bn)t + aA + bB = c.$$

Mais, comme la supposition de  $t = 0$  dans les formules (2) et (3), donne  $x = A$  et  $y = B$ , ces valeurs doivent former un système particulier; ainsi l'on a séparément

$$aA + bB = c;$$

done l'égalité précédente se réduit à

$$(am + bn)t = 0.$$

Or, pour que cette égalité soit satisfaite pour toute valeur *entière* attribuée à *t*, il faut que l'on ait

$$am + bn = 0; \text{ d'où } \frac{n}{m} = -\frac{a}{b};$$

et puisqu'on a déjà reconnu que *m* et *n* sont premiers entre eux, aussi bien que *a* et *b*, on doit avoir (Arith., n° 157)

$$m = -b, \quad n = a,$$

ou bien,  $m = b, \quad n = -a.$

129. On peut, au reste, donner de cette propriété une démonstration qui soit tout-à-fait indépendante de la méthode qu'on a suivie pour obtenir les valeurs de *x* et de *y*.

Soit toujours l'équation proposée

$$ax + by = c \dots (1);$$

et supposons que, par un moyen quelconque, on ait trouvé

$$x = a \quad \text{et} \quad y = c,$$

pour une première solution en nombres entiers (positifs ou négatifs); je dis que toutes les autres solutions sont comprises dans les deux formules

$$\left. \begin{array}{l} y = c + at \\ x = a - bt \end{array} \right\} \quad \text{ou bien} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = c - at, \\ x = a + bt; \end{array} \right.$$

*t* désignant un nombre entier tout-à-fait arbitraire.

En effet, puisque *a* et *c* forment un premier système de valeurs de *x* et de *y*, en nombres entiers, on a l'égalité

$$aa + bc = c \dots (2).$$

Retranchant cette égalité, membre à membre, de l'équa-

tion (1), on obtient

$$a(x-a) + b(y-c) = 0 \dots (3),$$

équation qui peut remplacer la proposée.

Or, l'équation (3) revient à celle-ci :

$$x - a = - \frac{b(y-c)}{a};$$

et pour que la valeur de  $x$ , correspondante à une valeur entière de  $y$ , soit elle-même entière, il faut et il suffit que  $b(y-c)$  soit divisible par  $a$ ; mais on sait (n° 122) que les coefficients  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux (autrement l'équation ne serait pas résoluble en nombres entiers); donc, en vertu du principe établi en Arithmétique (n° 132), il faut et il suffit que  $y-c$  soit un multiple de  $a$ .

Posons donc.....  $y-c=at$ ,

il en résulte.....  $x-a=-bt$ ;

et de ces deux équations on déduit évidemment

$$\begin{aligned} y &= c + at, \\ x &= a - bt. \end{aligned}$$

Comme de l'équation (3) on tire encore

$$y-c = - \frac{a(x-a)}{b};$$

si l'on pose.....  $x-a=bt$ ,

il en résulte.....  $y-c=-at$ ,

équations qui donnent

$$\begin{aligned} x &= a + bt, \\ y &= c - at. \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que, quelle que soit la valeur de  $t$ , les valeurs  $y=c+at$ ,  $x=a-bt$ , satisfont à la proposée.

En effet, si on les substitue dans cette équation, on trouve

$$a(z - bt) + b(c + at) = c, \text{ ou réduisant, } az + bc = c,$$

égalité vérifiée, puisque  $a$  et  $c$  forment, par hypothèse, une solution de la proposée.

130<sup>e</sup> *Conséquence.* Si dans les formules

$$y = c + at,$$

$$x = a - bt,$$

on fait successivement

$$t = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, \text{ et } t = -1, -2, -3, \dots,$$

elles deviennent

$$\left. \begin{array}{l} y = c, c + a, c + 2a, c + 3a, \dots \\ x = a, a - b, a - 2b, a - 3b, \dots \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} y = c - a, c - 2a, c - 3a, \dots \\ x = a + b, a + 2b, a + 3b, \dots \end{array} \right.$$

D'où l'on voit que toutes les solutions entières, positives ou négatives, de la proposée, forment *deux progressions par différence, dont la raison est, pour les valeurs de  $x$ , le coefficient dont  $y$  est affecté dans l'équation, et pour les valeurs de  $y$ , le coefficient dont  $x$  est affecté dans la même équation.*

131. *AUTRE MÉTHODE.* Il résulte de l'analyse du n° 129, que toute la difficulté, pour résoudre complètement l'équation  $ax + by = c$ , consiste à trouver *une première solution*, puisqu'on peut ensuite obtenir toutes les autres, au moyen des formules

$$x = a - bt, \quad y = c + at.$$

Cette considération conduit à une seconde méthode, pour résoudre l'équation indéterminée. Elle repose sur les propriétés élémentaires des fractions continues.

Soit, pour premier exemple, l'équation déjà traitée (n° 124)

$$17x - 49y = -8.$$

Si l'on convertit  $\frac{17}{49}$  en fraction continue (Arith., n° 167), et

qu'on forme les réduites (Arith., n° 169), on obtient les fractions

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{8}{23}, \frac{17}{49}.$$

Or, l'on sait (Arith., n° 171) que le numérateur de la différence entre deux réduites consécutives est égal à  $+1$ , si la réduite de laquelle on retranche est de rang pair; et à  $-1$ , si cette réduite est de rang impair.

Donc, comme  $\frac{17}{49}$  est de rang impair, on doit avoir

$$\frac{17}{49} - \frac{8}{23} = \frac{-1}{49 \times 23}; \text{ d'où } 17 \times 23 - 49 \times 8 = -1,$$

(égalité qui peut d'ailleurs se vérifier immédiatement).

Cela posé, multiplions les deux membres de cette égalité vérifiée, par 8, c'est-à-dire par le second membre de la proposée, pris en signe contraire; il vient

$$17 \times 23 \times 8 - 49 \times 8 \times 8 = -8,$$

ou 
$$17 \times 184 - 49 \times 64 = -8,$$

égalité qui est encore exacte, et qui ne diffère de la proposée qu'en ce que 184 remplace  $x$ , et 64 remplace  $y$ ; d'où l'on voit que la proposée est nécessairement satisfaite par

$$x = 184 \text{ et } y = 64.$$

Cette première solution étant trouvée, on a (n° 129), pour déterminer les autres, les formules

$$x = 184 + 49t, \quad y = 64 + 17t.$$

Si l'on ne veut que des valeurs entières et positives, il faut supposer  $t$  positif, ou égal à 0,  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$ . L'hypothèse  $t = -3$ , donne  $x = 37$ ,  $y = 13$ ; c'est le plus petit système trouvé n° 124.

132. Pour généraliser, supposons que l'équation à résoudre soit

$$ax - by = c \dots (1),$$

$a$  et  $b$  étant deux nombres absolus, mais  $c$  pouvant être positif ou négatif.

Convertissons en fraction continue  $\frac{a}{b}$  qui, par sa nature, doit être irréductible (n° 122), et formons les réduites consécutives; la dernière est  $\frac{a}{b}$ , et l'avant-dernière peut être représentée par  $\frac{m}{m'}$ ; ce qui donne la relation

$$a \times m' - b \times m = \pm 1;$$

savoir:  $+1$ , si la réduite  $\frac{a}{b}$  est de rang pair, et  $-1$ , si cette réduite est de rang impair.

Admettons, pour un instant, qu'elle soit de rang pair; on a

*l'égalité vérifiée*.....  $a \times m' - b \times m = +1$ ;

multiplions ses deux membres par  $c$ ,

il vient.....  $a \times m'c - b \times mc = c$ ,

résultat qui ne diffère de l'équation  $ax - by = c$ ,

qu'en ce que  $x$  et  $y$  sont remplacés par  $m'c$  et  $mc$ ; donc  $x = m'c$  et  $y = mc$  forment une solution de l'équation.

Si la réduite  $\frac{a}{b}$  est de rang impair, on a  $a \times m' - b \times m = -1$ ;

d'où multipliant par  $-c$ ,  $a \times -m'c - b \times -mc = c$ ,

Comparant cette égalité vérifiée avec l'équation  $ax - by = c$ ,

on en conclut  $x = -m'c$ ,  $y = -mc$ , pour solution.

Si l'équation est de la forme...  $ax + by = c$ ,

c'est-à-dire si les deux coeffi-

ciens  $a$  et  $b$  sont de même signe,

on peut la modifier et l'écrire

ainsi: .....  $ax - b \times -y = c$ ,

Dès lors, en formant, comme

ci-dessus, l'égalité.....  $a \times m'c - b \times mc = c$ ,

ou bien, celle-ci.....  $a \times -m'c - b \times -mc = c$ ,



on pourra conclure que  $x = m'c$ ,  $y = -mc$ , ou  $x = -m'c$ ,  $y = mc$  forment une solution de l'équation.

Ainsi, quelle que soit l'équation proposée, on peut toujours, au moyen des fractions continues, obtenir une *première solution* de cette équation; et les formules  $x = a - bt$ ,  $y = c + at$ , donnent ensuite toutes les autres.

133. Appliquons cette méthode à un nouvel exemple.

Soit à résoudre l'équation

$$29x + 17y = 250.$$

La fraction  $\frac{29}{17}$ , convertie en fraction continue, donne pour les réduites consécutives,  $\frac{1}{1}$ ,  $\frac{2}{1}$ ,  $\frac{5}{3}$ ,  $\frac{12}{7}$ ,  $\frac{29}{17}$ .

D'où résulte l'égalité vérifiée  $29 \times 7 - 17 \times 12 = -1$ ,

(ici, la réduite  $\frac{29}{17}$  est de rang impair).

Multiplions les deux membres de cette égalité par  $-250$ ; il vient

$$29 \times -1750 - 17 \times 3000 = 250;$$

mais la proposée peut être écrite ainsi :

$$29 \times x - 17 \times -y = 250.$$

D'où l'on voit que  $x = -1750$ ,  $y = 3000$ , forment une *solution*.

Les formules deviennent alors 
$$\begin{cases} x = -1750 - 17t, \\ y = 3000 + 29t. \end{cases}$$

Si l'on ne veut tenir compte que des solutions en nombres entiers et positifs, il faut supposer  $t$  négatif; ainsi, changeant le signe de  $t$ , on a  $x = -1750 + 17t$ ,  $y = 3000 - 29t$ ; et il est évident que les valeurs de  $x$  et de  $y$  ne seront positives

qu'autant que l'on aura 
$$\begin{cases} 17t > 1750, \\ 29t < 3000, \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} t > \frac{1750}{17}, \\ t < \frac{3000}{29}. \end{cases}$$

ou, effectuant les divisions,  $t > 102 \frac{16}{17}$ , mais  $< 103 \frac{13}{29}$ .

Done  $t = 103$  est la seule valeur de l'indéterminée; qui rende  $x$  et  $y$  positifs.

Pour  $t = 103$ , on trouve  $x = 1$ ,  $y = 13$ , valeurs qui, substituées dans l'équation, donnent

$$29 \times 1 + 17 \times 13 = 29 + 221 = 250.$$

On voit avec quelle précision la méthode précédente donne toutes les solutions de l'équation.

134. Dans quelques circonstances, la première solution peut s'obtenir, sans que l'on soit obligé de convertir  $\frac{a}{b}$  en fraction continue. 1°. Si l'un des deux coefficients  $a$  et  $b$  est un sous-multiple exact de la quantité toute connue  $c$ , l'équation donne sur-le-champ une première solution.

Soit, par exemple, l'équation  $5x + 3y = 78$ ; le coefficient 3 divise 78 et donne pour quotient 26.

Donc, si l'on pose  $x = 0$ , et  $y = 26$ , l'équation est satisfaite, car elle devient  $5 \times 0 + 3 \times 26 = 78$ ;

les autres solutions se trouvent dans les formules  $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 26 - 5t. \end{cases}$

Soit encore l'équation  $12x + 35y = 156$ .

156 est divisible par 12, et donne pour quotient 13; ainsi,  $x = 13$ ,  $y = 0$ , forment un premier système; et l'on a pour les autres,  $x = 13 - 35t$ ,  $y = 12t$ .

2°. Toutes les fois que, d'après l'inspection de l'équation, on reconnaît que la somme ou la différence des coefficients  $a$  et  $b$ , multipliés respectivement par deux nombres, donne un sous-multiple du second membre, la première solution s'obtient encore sur-le-champ.

Soit, par exemple, l'équation  $25x - 16y = 12$ .

Comme en faisant  $x = 2$ ,  $y = 3$ , on trouve  $25 \times 2 - 16 \times 3 = 2$ , multiplions les deux membres de cette égalité vérifiée, par 6,

quotient de 12 par 2 ; il vient  $25 \times 12 - 16 \times 18 = 12$ .  
D'où l'on peut conclure que  $x = 12$ ,  $y = 18$  satisfont à la proposée.

Soit encore l'équation  $13x - 47y = 0$  ;  
elle est évidemment satisfaite par  $x = 0$ ,  $y = 0$ .  
Ainsi, les formules générales sont  $x = 47t$ ,  $y = 13t$ .

Au reste, ces moyens de trouver une première solution ne sont que des moyens particuliers à certaines équations, tandis que la conversion en fraction continue est un moyen toujours certain d'y parvenir.

Nous engageons les commençans à se familiariser également avec les deux méthodes que nous venons d'exposer, pour résoudre l'équation  $ax + by = c$ .

135. On peut, à la seule inspection des signes de l'équation  $ax + by = c$ , annoncer si le nombre des solutions en *nombres entiers et positifs*, est limité ou infini.

1°. Toutes les fois que  $b$  est positif ( $a$  peut toujours être supposé tel), le nombre des solutions est *limité*.

En effet, on déduit de l'équation,  $x = \frac{c - by}{a}$ .

Cela posé, si  $c$  est négatif, quelque valeur positive que l'on donne à  $y$ , la valeur de  $x$  correspondante sera négative ; ainsi, dans ce cas, l'équation *n'admet aucune solution*.

Si  $c$  est positif, on ne peut donner à  $y$  des valeurs positives plus grandes que  $\frac{c}{b}$ , autrement  $x$  serait négatif ; donc, etc.

2°. Toutes les fois que  $b$  est négatif, quel que soit le signe de  $c$ , le nombre des solutions est *illimité*.

En effet, les formules  $x = a - bt$ ,  $y = c + at$  deviennent, lorsqu'on met le signe de  $b$  en évidence,  $\begin{cases} x = a + bt, \\ y = c + at. \end{cases}$

Or, en admettant le cas le plus défavorable, celui où  $a$  et  $c$  sont deux nombres négatifs, il suffit, pour que  $x$  et  $y$  soient

positifs, de supposer à  $t$  des valeurs numériquement plus grandes que celles de  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{a}$ . Ainsi, l'on peut donner à  $t$  des valeurs entières quelconques au-dessus de ces deux quotiens.

Dans le cas où le nombre des solutions est *limité*, on peut toujours fixer les limites entre lesquelles doivent être comprises les valeurs de l'indéterminée  $t$ , en considérant les deux formules

$$\text{qui sont, dans ce cas,} \dots \dots \dots \begin{cases} x = a - bt, \\ y = c + at. \end{cases}$$

$$\text{Il suffit, pour cela, de poser les inégalités.} \dots \begin{cases} a - bt > 0, \\ c + at > 0, \end{cases}$$

et d'en déduire, d'après les transformations exposées (n° 105), deux autres inégalités, dont les premiers membres ne renferment que  $t$ . On obtient ainsi le nombre total des solutions dont la question est susceptible.

## § II. Des Équations et problèmes à trois ou un plus grand nombre d'inconnues.

136. Considérons d'abord le cas de *deux équations à trois inconnues*.

Soit, pour premier exemple, le système des deux équations

$$5x + 4y + z = 272 \dots (1),$$

$$8x + 9y + 3z = 656 \dots (2),$$

dans l'une desquelles l'inconnue  $z$  est affectée d'un coefficient égal à l'unité. Commençons par l'éliminer.

Pour cela, multiplions la première équation par 3, et retranchons la seconde de la première; il vient  $7x + 3y = 160 \dots (3)$ , équation qui peut remplacer l'équation (2).

Appliquant à l'équation (3) la première méthode, on trouve

$$\text{les deux formules} \dots \dots \dots \begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = 51 + 7t. \end{cases}$$

Reportant ces deux expressions de  $x$  et de  $y$  dans la première équation, on obtient  $5(1-3t) + 4(51+7t) + z = 272$ , ou réduisant,.....  $z = 63 - 13t$ .

Les trois inconnues se trouvent actuellement exprimées en fonction entière de l'indéterminée  $t$ . Ainsi, en donnant à  $t$  des valeurs entières quelconques, on en obtiendra de semblables pour  $x, y, z$ ; et ces valeurs satisferont aux deux équations proposées; car, d'après ce qui vient d'être dit, le système des trois formules équivaut aux deux équations.

Si l'on demande des valeurs entières et positives pour  $x, y, z$ , il est évident que  $t$  ne peut être positif, car  $x$  serait négatif; mais on peut supposer  $t = 0, -1, -2, \dots$ , jusqu'à  $t = -\frac{51}{7}$  ou  $-7\frac{2}{7}$ .

Faisant donc  $t = 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7$ ,

on trouve...  $\begin{cases} x=1, & 4, & 7, & 10, & 13, & 16, & 19, & 22; \\ y=51, & 44, & 37, & 30, & 23, & 16, & 9, & 2; \\ z=63, & 76, & 89, & 102, & 115, & 128, & 141, & 154; \end{cases}$

d'où l'on voit que le problème est susceptible de huit solutions différentes.

Vérifions seulement les solutions extrêmes.

1°.  $x=1, y=51, z=63$ , donnent  $\begin{cases} 5. 1+4.51+1. 63=272, \\ 8. 1+9.51+3. 63=656; \end{cases}$

2°.  $x=22, y=2, z=154$ , donnent  $\begin{cases} 5.22+4. 2+1.154=272. \\ 8.22+9. 2+3.154=656. \end{cases}$

137. Soient, pour nouvel exemple, les équations

$$6x + 7y + 4z = 122 \dots (1),$$

$$11x + 8y - 6z = 145 \dots (2).$$

Pour éliminer  $z$  entre ces deux équations, multiplions la première par 3 et la seconde par 2, puis ajoutons les résultats membre à membre; il vient.....  $40x + 37y = 656 \dots (3),$

équation pour laquelle on trouve, d'après la première méthode,.....  $\begin{cases} x = 37t + 9, \\ y = 8 - 40t. \end{cases}$

Reportons ces expressions de  $x$  et de  $y$  dans l'équation (1); elle devient.....  $6(37t + 9) + 7(8 - 40t) + 4z = 122$ , ou, effectuant les calculs et réduisant,  $2z - 29t = 6 \dots (4)$ .

Ici l'inconnue  $z$  n'est pas, comme les deux autres  $x$  et  $y$ , exprimée en fonction entière de l'indéterminée  $t$ . Ainsi, il faut encore appliquer à l'équation (4) l'une des deux méthodes connues.

On a pour les formules relatives à cette équation  $\begin{cases} t = 2t', \\ z = 29t' + 3. \end{cases}$

Comme d'ailleurs, toute valeur entière de  $t$ , substituée dans les expressions de  $x$  et de  $y$ , en donnera de semblables pour ces inconnues, il s'ensuit que, si l'on met  $2t'$  à la place de  $t$  dans ces

expressions, ce qui donne.....  $\begin{cases} x = 74t' + 9, \\ y = 8 - 80t', \end{cases}$

ces formules réunies à celle-ci :.....  $z = 29t' + 3$ , comprendront tous les systèmes de valeurs entières de  $x, y, z$ , propres à vérifier les équations proposées.

Si l'on ne veut que des solutions directes, il est visible que  $t'$  ne peut être positif, puisque  $y$  serait négatif; et  $t'$  ne peut être négatif, puisque  $z$  et  $x$  seraient négatifs. Mais l'hypothèse  $t' = 0$  donne  $x = 9, y = 8, z = 3$ ; donc ce système est le seul qui satisfasse aux deux équations.

En résumant la marche précédente, on en conclut cette règle générale : Éliminez l'une des inconnues entre les équations proposées, et cherchez pour l'équation résultante de cette élimination, les deux formules qui donnent les deux inconnues qui y entrent, en fonction entière d'une indéterminée  $t$ . Substituez ces expressions dans l'une des équations proposées, ce qui donne une nouvelle équation, ne renfermant plus que  $t$  et l'inconnue que l'on avait d'abord éliminée. Déterminez, pour cette nouvelle équation, les deux formules qui donnent les expressions des deux

*inconnues qui y entrent, en fonction entière d'une seconde indéterminée  $x$ . Substituez enfin l'expression de  $x$  dans celles des deux premières inconnues. Les valeurs des trois inconnues se trouvent ainsi exprimées en fonction entière de  $x$ ; et il ne s'agit plus, après cela, que de déterminer pour  $x$  les limites entre lesquelles ces valeurs doivent se trouver, pour que celles des inconnues principales soient entières et positives.*

*N. B.* Toutes les fois que l'une des inconnues a pour coefficient l'unité, dans l'une des équations, il est plus simple d'éliminer cette inconnue; parce qu'après avoir exprimé les deux autres en fonction entière d'une même indéterminée, si l'on reporte ces valeurs dans l'équation où la troisième inconnue est affectée d'un coefficient égal à l'unité, on obtient immédiatement cette troisième inconnue en fonction entière de la même indéterminée; ainsi, dans ce cas, une seule opération est suffisante. Les deux équations du n° 136 en ont offert un exemple.

138. Voici la marche qu'il faut suivre pour trois équations à quatre inconnues : *Après avoir éliminé l'une des inconnues, on exprime, à l'aide des deux équations résultantes, et d'après ce qui vient d'être dit, les trois autres inconnues en fonction entière d'une même indéterminée, et l'on substitue ces valeurs dans l'une des équations proposées. Si, dans la nouvelle équation, les coefficients des deux inconnues qui y entrent sont différens de l'unité, on établit deux formules qui donnent ces inconnues en fonction entière d'une seconde indéterminée; puis on remplace, dans les expressions des trois premières inconnues, la première indéterminée en fonction de la seconde, et l'on obtient ainsi les quatre inconnues primitives en fonction entière de la seconde indéterminée.*

Même raisonnement pour quatre équations à cinq inconnues, etc. Nous proposerons, pour exercices, les questions suivantes.

**TROISIÈME QUESTION.** *Un monnoyeur a trois sortes d'argent. Sur 8 onces ou 1 marc, la première contient 7 onces d'argent fin, la seconde  $5^{\text{me}} \frac{1}{2}$ , et la troisième  $4^{\text{me}} \frac{1}{2}$ . Il veut faire un alliage*

de 30 marcs pesant, qui contienne 6 onces d'argent sur 8. Combien (en nombres entiers) doit-il prendre de marcs de chaque sorte ?

$$\left. \begin{array}{l} \text{Réponse. } \left\{ \begin{array}{l} x = 10, 12, 14, 16, 18, \\ y = 20, 15, 10, 5, 0, \\ z = 0, 3, 6, 9, 12, \end{array} \right. \\ \text{c'est-à-dire cinq solutions, en admettant 0 pour valeurs de} \\ y \text{ et de } z. \end{array} \right\}$$

QUATRIÈME QUESTION. Trouver trois nombres entiers tels, que la somme de leurs produits par les nombres respectifs 3, 5, 7, soit égale à 560, et que la somme de leurs produits par les carrés 9, 25, 49 soit égale à 2920 ?

$$\left( \text{Réponse. } \left\{ \begin{array}{l} x = 15, 50 \\ y = 82, 40 \\ z = 15, 30 \end{array} \right\}, \text{c'est-à-dire deux solutions.} \right)$$

CINQUIÈME QUESTION. Trouver un nombre  $N$  qui, étant divisé par 11, donne le reste 3; divisé par 19, donne le reste 5, et divisé par 29, donne le reste 10 ?

$$\left( \text{Rép. } N = 4128 + 6061t; \text{ en sorte que } 4128 \text{ est le plus petit nombre qui satisfait à l'énoncé.} \right)$$

SIXIÈME QUESTION. Trouver pour  $x$  un nombre tel, que les expressions  $\frac{3x-10}{7}$ ,  $\frac{11x+8}{17}$ ,  $\frac{16x-1}{5}$  soient des nombres entiers ?

(Rép.  $x = 211 + 595t$ ,  $t$  étant une indéterminée.)

139. Si, dans la sixième question, on désigne par  $y$ ,  $z$  et  $v$ , les quotiens  $\frac{3x-10}{7}$ ,  $\frac{11x+8}{17}$ ,  $\frac{16x-1}{5}$ , on a pour les équations du problème,  $3x-10=7y$ ,  $11x+8=17z$ ,  $16x-1=5v$ ; ou bien, . . .  $3x-7y=10$ ,  $11x-17z=-8$ ,  $16x-5v=-1$ .

Il faudrait donc appliquer à ces équations la marche indiquée



dans le n° précédent, pour trois équations à quatre inconnues. Mais nous allons développer un moyen beaucoup plus simple de déterminer la valeur de  $x$ , qui est ici l'inconnue principale. Ce moyen est d'ailleurs applicable à toutes les questions du même genre.

D'abord, si nous considérons la troisième expression,  $\frac{16x-1}{5}$ , elle revient à  $3x + \frac{x-1}{5}$ ; ainsi, pour qu'elle soit entière, il faut et il suffit que  $x-1$  soit un multiple de 5.

Posons donc  $\frac{x-1}{5} = t$ ; il en résulte  $x = 1 + 5t$ .

Toute valeur entière de  $t$ , substituée dans cette formule, donnera pour  $x$  un nombre qui satisfera à la troisième condition de l'énoncé.

Substituons maintenant cette valeur de  $x$  dans la première expression,  $\frac{3x-10}{7}$ ; il vient  $\frac{15t-7}{7}$ , ou  $2t-1+\frac{t}{7}$ , d'où l'on voit que cette nouvelle expression sera entière, si l'on suppose  $t = 7t'$ ; d'ailleurs cette condition est nécessaire. Ainsi, pour que les première et troisième expressions proposées soient entières, il faut que l'on ait  $x = 1 + 5t$ ,  $t$  étant de la forme  $t = 7t'$ ; ce qui donne...  $x = 1 + 35t'$ .

Portons cette nouvelle valeur dans la seconde expression

$$\frac{11x+8}{17}; \text{ il vient } \frac{385t'+19}{17}, \text{ ou } 23t' + 1 + \frac{2-6t'}{17}.$$

Or, on a  $2-6t' = 2(1-3t')$ ;

d'ailleurs, 2 est premier avec 17; donc, pour que la seconde expression soit un nombre entier, il faut et il suffit que  $1-3t'$  soit divisible par 17.

Posant  $\frac{1-3t'}{17} = t''$ , on en tire...  $t' = \frac{1-17t''}{3}$ .

ou, effectuant la division, .....  $\ell = -6\ell'' + \frac{\ell''+1}{3}$ .

Soit  $\frac{\ell''+1}{3} = \ell''$ , on obtient .....  $\ell'' = 3\ell''' - 1$ ,

d'où l'on déduit  $\ell = -6\ell'' + \ell''$ , ou ...  $\ell = -17\ell'' + 6$ .

Reportant cette valeur dans l'expression  $x = 1 + 35\ell$ ,

on obtient, toute réduction faite,

$$x = 211 - 595\ell''.$$

Telle est la formule propre à donner toutes les valeurs de  $x$ , susceptibles de satisfaire à l'énoncé.

Soit  $\ell'' = 0$ , on trouve  $x = 211$ ; c'est le plus petit de tous les nombres cherchés. En supposant à  $\ell''$  des valeurs négatives quelconques, on obtiendrait les autres solutions.

N. B. Nous remarquerons que 595, coefficient de  $\ell''$  dans la formule, est le produit  $7 \times 17 \times 5$  des dénominateurs des trois expressions proposées. Il serait aisé de se rendre compte de cette propriété, qui se modifie, lorsque les dénominateurs ne sont pas premiers entre eux; car, dans ce cas, le coefficient est égal au *multiple le plus simple des dénominateurs*.

140. Il nous reste encore à parler des problèmes dits *plus qu'indéterminés*, c'est-à-dire pour lesquels le nombre des équations est moindre de deux ou plusieurs unités, que le nombre des inconnues.

Soit d'abord l'équation à trois inconnues,  $ax + by + cz = d$ . Si l'on fait passer le terme  $cz$  dans le second membre, il vient

$$ax + by = d - cz, \quad \text{ou} \quad ax + by = c',$$

(en désignant par  $c'$  la quantité  $d - cz$ , qu'on regarde pour le moment comme connue).

Cela posé, l'on établit pour l'équation  $ax + by = c'$ , les deux formules  $x = a - bt$ ;  $y = c' + at$ . Après quoi, l'on remplace dans  $a$  et  $c'$  par sa valeur  $d - cz$ ; alors  $x$  et  $y$  se trouvent exprimés en fonction entière de l'indéterminée, et de la troisième inconnue  $z$ .

Soit proposé, par exemple, de payer 187 francs avec des pièces de 5 fr., 6 fr. et 20 fr., sans aucune autre monnaie.

Désignons par  $x$ ,  $y$ ,  $z$  les trois nombres de pièces qu'il faut donner de chaque sorte; on a l'équation

$$5x + 6y + 20z = 187,$$

qui revient à  $5x + 6y = 187 - 20z = c'.$

Tirant de cette équation la valeur

de  $x$ , on a.....  $x = \frac{c' - 6y}{5},$

ou bien.....  $x = -y + \frac{c' - y}{5}.$

Posant  $\frac{c' - y}{5} = t$ , l'on en déduit  $y = c' - 5t,$

d'où.....  $x = -c' + 6t.$

Remplaçant, dans ces deux formules,  $c'$  par sa valeur  $187 - 20z$ ,

on trouve enfin.....  $\begin{cases} y = 187 - 20z - 5t, \\ x = -187 + 20z + 6t. \end{cases}$

Tant que l'on admettra pour  $x$  et  $y$  des nombres entiers positifs ou négatifs, on pourra donner à  $z$  et à  $t$  des valeurs tout-à-fait arbitraires; mais si l'on veut satisfaire directement à l'énoncé, la forme même de l'équation proposée,  $5x + 6y + 20z = 187$ , prouve que  $z$  ne doit pas recevoir de valeurs au-dessus de  $\frac{187}{20}$

ou  $9\frac{7}{20}$ , car autrement,  $x$  ou  $y$  serait négatif.

Posons donc successivement  $z = 0, 1, 2, 3, \dots, 8, 9$ .  
Si l'on fait  $z = 0$ , les valeurs de  $x$  et de  $y$

deviennent.....  $\begin{cases} x = -187 + 6t, \\ y = 187 - 5t; \end{cases}$

formules qui prouvent que  $t$  doit être  $> \frac{187}{6}$ ; mais  $< \frac{187}{5}$ .

ou  $> 31\frac{1}{6}$ , mais  $< 37\frac{2}{5}$ . Donc  $t$  peut recevoir six valeurs, savoir : 32, 33, 34, 35, 36 et 37.

Ainsi, pour  $z = 0$ , on a... 
$$\begin{cases} t = 32, 33, 34, 35, 36, 37, \\ x = 5, 11, 17, 23, 29, 35, \\ y = 27, 22, 17, 12, 7, 2. \end{cases}$$

Soit  $z = 1$ ; l'on trouve..... 
$$\begin{cases} x = -167 + 6t, \\ y = 167 - 5t; \end{cases}$$

d'où  $t > \frac{167}{6}$  ou  $27\frac{5}{6}$ , mais  $< \frac{167}{5}$  ou  $33\frac{2}{5}$ , ce qui donne encore les six valeurs 28, 29, 30, 31, 32 et 33.

Ainsi, pour  $z = 1$ , l'on a... 
$$\begin{cases} t = 28, 29, 30, 31, 32, 33, \\ x = 1, 7, 13, 19, 25, 31, \\ y = 27, 22, 17, 12, 7, 2. \end{cases}$$

Pour  $z = 2$ , on trouverait... 
$$\begin{cases} t = 25, 26, 27, 28, 29, \\ x = 3, 9, 15, 21, 27, \\ y = 22, 17, 12, 7, 2. \end{cases}$$

Pour  $z = 3$ ..... 
$$\begin{cases} t = 22, 23, 24, 25, \\ x = 5, 11, 17, 23, \\ y = 17, 12, 7, 2. \end{cases}$$

.....  
.....  
.....  
Pour  $z = 8$ , les formules  $\begin{cases} x = -27 + 6t, \\ y = 27 - 5t. \end{cases}$  seraient

d'où  $t > \frac{27}{6}$  ou  $4\frac{1}{2}$ , mais  $< \frac{27}{5}$  ou  $5\frac{2}{5}$ . Ainsi  $t$  ne peut recevoir que la valeur  $t = 5$ ; ce qui donne  $x = 3$ ,  $y = 2$ .

Enfin, à l'hypothèse  $z = 9$ , il ne correspond aucune solution, car les formules deviennent  $x = -7 + 6t$ ,  $y = 7 - 5t$ ,

d'où  $t > \frac{7}{6}$  ou  $1\frac{1}{6}$ , mais  $t < \frac{7}{5}$  ou  $1\frac{1}{5}$ .

141. On voit assez ce qu'il faudrait faire pour deux équations

à quatre inconnues, trois équations à cinq inconnues. Cependant, nous donnerons encore la résolution complète d'une question de ce genre, pour faire voir comment, à l'aide de quelques considérations particulières, on parvient souvent à simplifier les calculs.

SEPTIÈME QUESTION. *Un fermier achète 100 pièces de bétail pour 100 louis, savoir : des bœufs à 10 louis la pièce, des vaches à 5 louis, des veaux à 2 louis, et des moutons à un demi-louis. Combien a-t-il acheté d'animaux de chaque espèce?*

Soient  $x, y, z, u$ , les nombres cherchés; on a les équations

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z + u = 100 \\ 10x + 5y + 2z + \frac{1}{2}u = 100 \end{array} \right\} \text{ou réduis.} \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + u = 100 \\ 20x + 10y + 4z + u = 200. \end{array} \right.$$

En retranchant la première équation de

la seconde, on obtient . . . . .  $19x + 9y + 3z = 100$ ,

équation qu'il faudrait traiter comme dans le n° précédent. Mais avant tout, observons qu'il est préférable d'exprimer  $y$  et  $z$  en fonction entière de  $x$ ; 1°. parce qu'il est évident que  $x$  ne doit pas avoir de valeurs au-dessus de  $\frac{100}{19}$  ou  $5\frac{5}{19}$ ; 2°. parce que les coefficients de  $y$  et de  $z$  ont un facteur commun; ce qui entraînera nécessairement une condition propre à déterminer les valeurs convenables de  $x$ .

D'après ces considérations, transposons le terme  $19x$ ; il vient  $9y + 3z = 100 - 19x$ , ou bien,  $3y + z = \frac{100 - 19x}{3}$ .

Or, puisque l'on demande pour  $x, y, z, u$ , des nombres entiers et positifs, il faut que  $\frac{100 - 19x}{3}$  soit entier et positif; mais il n'y a évidemment que  $x = 1$  et  $x = 4$ , qui puissent satisfaire à cette double condition. Ainsi déjà,  $x$  ne peut avoir pour valeurs que  $x = 1$  et  $x = 4$ .

Soit  $x = 1$ , il en résulte  $3y + z = 27$ , ou  $z = 27 - 3y$ .

Substituant ces valeurs de  $x$  et de  $z$  dans la première des équations proposées, on trouve  $u = 72 + 2y$ . La 1<sup>re</sup> de ces deux formules montre que  $y$  ne peut pas être  $> 9$ ; ainsi,

$$\text{pour } x = 1, \text{ on a } \begin{cases} y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \\ z = 27, 24, 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3, 0, \\ u = 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90. \end{cases}$$

Soit  $x = 4$ , il vient  $3y + z = 8$ , d'où  $z = 8 - 3y$ ,  
et  $u = 88 + 2y$ .

L'expression de  $z$  prouve que  $y$  ne peut pas être  $> 2$ ; ainsi pour

$$x = 4, \text{ on trouve } \begin{cases} y = 0, 1, 2, \\ z = 8, 5, 2, \\ u = 88, 90, 92. \end{cases}$$

D'où l'on voit que la question proposée n'est susceptible que de *treize* solutions; et de *dix*, si l'on excepte les solutions 0.

### § III. De l'Analyse indéterminée du second degré.

142. On se propose, dans cette partie, comme dans l'Analyse indéterminée du premier degré, de résoudre en nombres entiers les problèmes qui donnent lieu à un nombre d'équations moindre que celui des inconnues. Mais comme, en général, une équation du second degré à deux inconnues, donne l'une d'elles en *fonction irrationnelle* de l'autre, il s'ensuit que la question consiste, 1°. à déterminer, pour l'une des inconnues, des valeurs rationnelles, qui aient la propriété d'en donner de semblables pour la seconde; 2°. à choisir parmi les valeurs de la première inconnue, les valeurs entières qui en donnent de semblables pour la seconde. On conçoit, d'après cela, que l'Analyse indéterminée du second degré doit offrir de plus grandes difficultés que celle du premier degré. C'est en effet une des théories les plus difficiles de l'Analyse algébrique, et elle sort tout-à-fait des *Éléments*. Nous renvoyons, pour cet objet, à la *Théorie des nombres* de Legendre.

Nous exposerons toutefois la résolution, en nombres entiers, d'une série de questions à deux inconnues, dont les équations ne renferment que le rectangle ou produit des inconnues, sans renfermer aucun des deux carrés.

Ces questions, assez curieuses par elles-mêmes, sont tirées de l'Algèbre de M. Lhuillier, à l'ouvrage duquel nous devons déjà les énoncés de plusieurs problèmes.

143. PREMIÈRE QUESTION. Trouver en nombres entiers les côtés d'un rectangle dont la surface contienne quatre fois autant de mètres carrés, que son contour contient de mètres ?

Soient  $x$  et  $y$  deux côtés du rectangle exprimés en mètres ;  $xy$  exprime sa surface, et  $2x + 2y$  son contour.

On a donc, en vertu de l'énoncé, l'équation

$$xy = 8x + 8y.$$

De cette équation, l'on déduit  $x = \frac{8y}{y-8}$ , ou  $x = 8 + \frac{64}{y-8}$ .

D'après la forme de la valeur de  $x$  en  $y$ , il est évident que, pour une valeur entière de  $y$ , on ne peut en obtenir une semblable pour  $x$ , à moins que  $y-8$  ne soit diviseur de 64.

Concevons donc que l'on ait déterminé (*Arith.*, n° 148) tous les diviseurs de 64, et qu'on les prenne avec les signes  $+$  et  $-$  ; on aura

$y-8 = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, | -64, -32, -16, -8, -4, -2, -1$  ;  
d'où

$y = 9, 10, 12, 16, 24, 40, 72, | -56, -24, -8, 0, 4, 6, 7$  ;

Remplaçant dans l'expression de  $x$ ,  $y-8$  par ses différentes valeurs, et réduisant, on trouvera

$x = 72, 40, 24, 16, 12, 10, 9, | 7, 6, 4, 0, -8, -24, -56$ .

En jetant les yeux sur les deux dernières lignes de calcul, on peut voir que les valeurs de  $x$  sont, dans un ordre inverse, les mêmes que celles de  $y$  ; ce qui doit être, car l'équation du problème ne change pas lorsqu'on met  $x$  à la place de  $y$ , et réciproquement.

*proquement.* D'où l'on peut conclure, en faisant d'ailleurs abstraction des solutions négatives, que les systèmes de valeurs, réellement différents, sont

$$\begin{aligned} y &= 9, 10, 12, 16, \\ x &= 72, 40, 24, 16. \end{aligned}$$

Ainsi, la question est susceptible de quatre solutions.

Vérifions le système  $y = 10, x = 40$ .

La base du rectangle renfermant 40 mètres, et la hauteur 10, la surface est de 400 mètres carrés. D'un autre côté, le contour est égal à  $2(40 + 10)$ , ou 100 mètres; or, 400 est égal au quadruple de 100; donc, etc.

Généralisons cette question, et proposons-nous de déterminer un rectangle dont la surface contienne  $m$  fois autant de mètres carrés que le contour contient de mètres.

Ou a l'équation  $xy = m(2x + 2y) = 2mx + 2my$ .

D'où, tirant la valeur de  $x$  et effectuant la division,

$$x = 2m + \frac{4m^2}{y - 2m}.$$

Remarquons d'abord qu'il est inutile d'avoir égard aux diviseurs négatifs de  $4m^2$ ; car si  $y - 2m$  est négatif et numériquement plus petit que  $2m$ ,  $y$  est bien positif; mais comme alors  $\frac{4m^2}{y - 2m}$  est négatif et numériquement plus grand que  $2m$ , la valeur correspondante de  $x$  est négative. Le contraire aurait lieu, si  $y - 2m$  était négatif et numériquement plus grand que  $4m^2$ , c'est-à-dire que  $y$  serait négatif et  $x$  positif. Or, on est censé n'admettre que des solutions directes de la question.

Cela posé, soient  $d, d', d'', d''' \dots$  les diviseurs de  $4m^2$ ; on a

$$y - 2m = d, d', d'', d''' \dots;$$

d'où

$$y = 2m + d, 2m + d', 2m + d'', 2m + d''', \dots$$

et par conséquent, en désignant par  $q, q', q'', q''' \dots$  les quotiens



entiers de  $4m^2$  par  $d, d', d'', d''' \dots$ ,

$$x = 2m + q, 2m + q', 2m + q'', 2m + q''' \dots$$

Le nombre des *solutions* paraît, au premier abord, égal au nombre des diviseurs de  $4m^2$ ; mais comme l'équation est *symétrique* (\*) en  $x$  et  $y$ , les valeurs de  $x$  tirées de l'équation résolue d'abord par rapport à  $y$ , seraient les mêmes que celles de  $y$ , prises dans un ordre inverse. Ainsi, le nombre total des *solutions distinctes* n'est réellement que la moitié du nombre des *diviseurs*, si ce dernier nombre est pair, et la moitié plus un, si ce nombre est impair.

Soit pour seconde application,

$$m = 3, \text{ d'où } x = 6 + \frac{36}{y - 6};$$

cherchant les diviseurs de 36, on a

$$y - 6 = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36;$$

$$\text{d'où } y = 7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 24, 42.$$

$$\frac{36}{y - 6} = 36, 18, 12, 9, 6, 4, 3, 2, 1.$$

$$\text{Donc } x = 42, 24, 18, 15, 12, 10, 9, 8, 7;$$

ce qui donne *cinq solutions distinctes*.

144. SECONDE QUESTION. Étant donné le côté  $a$  d'un carré, trouver en nombres entiers les côtés d'un rectangle dont le contour soit à celui du carré dans le même rapport que leurs surfaces.

Soient  $x$  et  $y$  deux côtés du rectangle;  $2(x + y)$  et  $xy$  en représentent le contour et la surface; d'ailleurs,  $4a$  et  $a^2$  expriment le contour et la surface du carré. Ainsi, l'on a

---

(1) On appelle *fonction symétrique* de deux ou plusieurs quantités, toute expression qui renferme ces quantités combinées de la même manière, c'est-à-dire telles que, lorsqu'on échange ces quantités les unes dans les autres, l'expression ne change pas, excepté dans l'ordre des termes.

l'équation

$$\frac{xy}{a^2} = \frac{2(x+y)}{4a}, \text{ ou simplifiant, } 2xy = a(x+y).$$

Il peut se présenter deux cas : ou  $a$  est pair, ou il est impair.

1°. Si  $a$  est pair et égal à  $2a'$ , il vient, en supprimant le facteur 2,  $xy = a'(x+y)$ , d'où  $x = a' + \frac{a'^2}{y-a'}$ , et la question rentre dans la précédente.

2°. Si  $a$  est impair, on a

$$x = \frac{ay}{2y-a}, \text{ ou } x = \frac{a}{2} + \frac{a^2}{2(2y-a)}.$$

Pour que cette expression de  $x$  soit entière, il faut et il suffit évidemment que  $2y-a$  soit un diviseur de  $a^2$ .

En désignant par  $d, d', d'' \dots$  ces diviseurs, et par  $q, q', q'' \dots$  les quotiens de la division de  $a^2$  par  $d, d', d'' \dots$  (les quantités  $d, d', d'' \dots q, q', q'' \dots$  sont nécessairement des nombres impairs, puisque, par hypothèse,  $a$  est impair) on aura

$$2y-a = d, \quad d', \quad d'' \dots, \text{ nombres impairs,}$$

$$\text{d'où } y = \frac{a+d}{2}, \quad \frac{a+d'}{2}, \quad \frac{a+d''}{2} \dots, \text{ expressions entières.}$$

$$\frac{a^2}{2y-a} = q, \quad q', \quad q'' \dots, \text{ nombres impairs,}$$

et par conséquent,

$$x = \frac{a+q}{2}, \quad \frac{a+q'}{2}, \quad \frac{a+q''}{2} \dots, \text{ expressions entières.}$$

Soit en premier lieu,  $a=20$ ; l'équation est

$$2xy = 20(x+y),$$

ou, divisant par 2 et résolvant par rapport

$$\text{à } x \dots \dots \dots x = 10 + \frac{100}{y-10}$$

cherchant les diviseurs de 100, on trouve

$$y - 10 = 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100;$$

d'où  $y = 11, 12, 14, 15, 20, 30, 35, 60, 110;$

$$\frac{100}{y-10} = 100, 50, 25, 20, 10, 5, 4, 2, 1;$$

donc  $x = 110, 60, 35, 30, 20, 15, 14, 12, 11;$

ce qui donne cinq solutions différentes.

Soit, en second lieu,  $a = 15$ ; on a l'équation

$$2xy = 15(x + y);$$

d'où l'on déduit  $x = \frac{15y}{2y-15}$ , ou bien,  $x = \frac{15}{2} + \frac{225}{2(2y-15)}$ .

Cherchant les diviseurs de 225, on obtient

$$2y - 15 = 1, 3, 5, 9, 15, 25, 45, 75, 225;$$

d'où  $y = 8, 9, 10, 12, 15, 20, 30, 45, 120;$

$$\frac{225}{2y-15} = 225, 75, 45, 25, 15, 9, 5, 3, 1,$$

donc  $x = 120, 45, 30, 20, 15, 12, 10, 9, 8;$

en tout, cinq solutions différentes.

145. TROISIÈME QUESTION. Étant donné le côté  $a$  d'un cube, en nombre entier, on demande (aussi en nombres entiers) le côté de la base et la hauteur d'un parallélépipède rectangle à base carrée, de manière que leurs capacités soient entre elles comme leurs surfaces?

Soient  $x$  le côté de la base, et  $y$  la hauteur de ce parallélépipède;  $x^2y$  et  $2x^2 + 4xy$  représentent le volume et la surface totale de ce solide; d'ailleurs,  $a^3$  et  $6a^2$  sont les expressions du volume et de la surface du cube donné; on a donc l'équation

$$\frac{x^2y}{2x^2 + 4xy} = \frac{a^3}{6a^2};$$

ou, chassant les dénominateurs et réduisant,

$$3xy = ax + 2ay.$$

On déduit de cette équation,  $x = \frac{2ay}{3y-a} = \frac{2a}{3} + \frac{2a^2}{3(3y-a)},$

ou bien encore,  $3x = 2a + \frac{2a^2}{3y-a}.$

Cela posé, désignons par  $d, d', d'' \dots$  tous les diviseurs de  $2a^2$ ,  
et posons  $3y - a = d, d', d'' \dots;$

il en résulte  $y = \frac{a+d}{3}, \frac{a+d'}{3}, \frac{a+d''}{3} \dots$

Soient d'ailleurs  $q, q', q'' \dots$  les quotiens de  $2a^2$  par  $d, d', d'' \dots;$

on a  $\frac{2a^2}{3y-a} = q, q', q'' \dots;$

d'où  $3x = 2a + q, 2a + q', 2a + q'' \dots$

Donc  $x = \frac{2a+q}{3}, \frac{2a+q'}{3}, \frac{2a+q''}{3} \dots$

En ne tenant compte, dans les deux séries des valeurs de  $x$  et de  $y$ , que des expressions entières, on obtiendra les systèmes en nombres entiers, propres à vérifier l'équation.

Soit, par exemple,  $a=8$ , l'équation devient  $3x=16+\frac{128}{3y-8},$   
cherchant les diviseurs de 128, et les égalant à  $3y-8,$

on a  $3y-8 = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128,$

d'où  $y = 3, 4, 4, 8, 16, 24, 44$

$$\frac{128}{3y-8} = 128, 32, 8, 2;$$

donc  $3x = 16 + 128, 16 + 32, 16 + 8, 16 + 2,$

et par conséquent,

$$x = 48, 16, 8, 6;$$

ainsi, l'équation particulière admet les systèmes

$$x = 48, 16, 8, 6,$$

$$y = 3, 4, 8, 24.$$

Nous proposerons, pour nouveaux exercices, les équations

$$1^{\circ}. xy = 2x + 2y + 20 \quad \begin{cases} x = 26, 14, 10, 8, \\ y = 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

$$2^{\circ}. 8xy = 6x + 5y + 12; \text{ système unique, } y = 6, x = 1.$$

$$3^{\circ}. 4xy = 3x + 2y - 12 \quad \begin{cases} x = 0, 4, \\ y = 6, 0. \end{cases}$$

$$4^{\circ}. \text{L'équation générale} \quad mxy = ax + by + c.$$

**QUATRIÈME QUESTION.** On demande, en nombres entiers, les parallélépipèdes rectangles à bases carrées, tels que leur capacité vaille cinq fois autant de mètres cubes que leur surface contient de mètres carrés.

(Côté de la base,  $x = 220, 120, 70, 60, 45, 40, 30, 28, 25, 24, 22, 21;$   
hauteur,  $y = 11, 12, 14, 15, 18, 20, 30, 35, 50, 60, 110, 210.$ )

Douze solutions.

## CHAPITRE V.

### *Formation des Puissances et extraction des Racines d'un degré quelconque.*

**Introduction.** De même que la résolution des équations du second degré suppose connus les procédés de l'extraction de la racine carrée, de même, la résolution des équations du troisième,

quatrième... degré, exige qu'on sache extraire la racine troisième, quatrième... d'une quantité, soit numérique, soit algébrique. (Voyez le n° 2, pour les définitions du mot *puissance* et du mot *racine*.)

L'élévation aux puissances, l'extraction des racines de degré quelconque et le calcul des radicaux, seront l'objet principal de ce nouveau chapitre, qui, avec le premier et une partie du troisième, constitue l'ensemble des opérations que l'on peut avoir à effectuer sur des nombres exprimés algébriquement.

Quoiqu'une puissance quelconque d'un nombre puisse s'obtenir d'après les règles de la multiplication, soit arithmétique, soit algébrique, cependant cette puissance est assujettie à une *loi de composition* qu'il faut absolument connaître, si l'on veut revenir de la puissance à la racine. Or, comme la loi de composition du carré d'une quantité numérique ou algébrique est fondée (n° 86) sur l'expression du carré d'un binôme, de même la loi relative à une puissance de degré quelconque se déduit de l'expression d'une puissance de même degré d'un binôme. C'est donc par la détermination du *développement d'une puissance quelconque d'un binôme*, que nous devons commencer cette nouvelle théorie.

### § 1<sup>er</sup>. Binôme de Newton, et conséquences qui en dérivent.

146. Si l'on multiplie le binôme  $x+a$  plusieurs fois de suite par lui-même, on parvient aux résultats suivans :

$$\begin{aligned}(x+a)^1 &= x + a, \\(x+a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2, \\(x+a)^3 &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3, \\(x+a)^4 &= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4, \\(x+a)^5 &= x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.\end{aligned}$$

En jetant les yeux sur ces différens développemens, on reconnaît aisément une loi suivant laquelle ils procèdent, quant

aux exposans de  $x$  et de  $a$ ; il n'en est pas de même pour les coefficients. Cependant Newton, célèbre géomètre anglais, est parvenu à en découvrir une, au moyen de laquelle le degré d'une puissance étant donné, on peut former cette puissance d'un binôme, sans qu'on soit obligé de passer d'abord par toutes les puissances inférieures. Il n'a laissé aucune trace des raisonnemens qui avaient pu l'y conduire; mais depuis, on a constaté d'une manière rigoureuse l'existence de cette loi. De toutes les démonstrations connues, la plus élémentaire est celle qui se trouve fondée sur la *Théorie des combinaisons*. Toutefois, comme elle est encore assez compliquée, nous commencerons, pour en simplifier l'exposition, par résoudre quelques problèmes relatifs aux combinaisons, dont il sera facile ensuite de déduire la formule du binôme, ou le développement d'une puissance quelconque d'un binôme.

157. *Notions préliminaires.* On sait déjà (Arith., n° 125) que le produit d'un nombre  $n$  de facteurs  $a, b, c, d, \dots$ , ne change pas, dans quelque ordre qu'on effectue leur multiplication. Or, on peut se proposer de déterminer le nombre total des manières dont ces lettres sont susceptibles d'être disposées les unes à la suite des autres. Les résultats qui correspondent à chaque échange que l'on fait subir à ces lettres, se nomment *permutations*.

C'est ainsi que deux lettres  $a$  et  $b$  donnent un produit unique  $ab$ , mais fournissent les deux permutations  $ab$  et  $ba$ .

De même, les trois lettres  $a, b, c$ , donnent un produit unique  $abc$ , mais fournissent les six permutations  $abc, acb, cab, bac, bca, cba$ .

Soient maintenant un nombre  $m$  de lettres  $a, b, c, d, e, \dots$ ; si on les dispose les unes à la suite des autres, 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, ..., dans tous les ordres possibles, de manière toutefois que, dans chaque résultat, le nombre des lettres soit moindre que celui des lettres données, on peut demander l'expression du nombre total des résultats que l'on obtient ainsi. Ces résultats sont ce qu'on appelle des *arrangemens*.

Ainsi,  $ab, ac, ad \dots ba, bc, bd \dots ca, cb, cd \dots$  sont des arrangements 2 à 2 des  $m$  lettres.

De même,  $abc, abd \dots bac, bad \dots acb, acd \dots$  sont des arrangements 3 à 3...

Enfin, lorsqu'on dispose ainsi les lettres les unes à la suite des autres, 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4..., on peut exiger que deux quelconques des résultats que l'on forme ne soient pas composés des mêmes lettres, c'est-à-dire qu'ils diffèrent entre eux au moins par l'une des lettres; et l'on peut demander alors le nombre total des résultats qu'on obtient ainsi. Dans ce cas, les résultats prennent le nom de *combinaisons*.

Ainsi,  $ab, ac, bc \dots ad, bd \dots$  sont des combinaisons 2 à 2, en tant que deux quelconques des résultats diffèrent au moins par l'une des lettres.

De même,  $abc, abd \dots acd, bcd \dots$  sont des combinaisons 3 à 3...

Il existe donc une différence essentielle dans la signification des mots *permutation*, *arrangement* et *combinaison*.

On donne le nom de *PERMUTATIONS*, aux résultats qu'on obtient en disposant les unes à la suite des autres, et dans tous les ordres possibles, un nombre déterminé de lettres, de manière que toutes les lettres entrent dans chaque résultat, et que chacune n'y entre qu'une fois.

Le nom d'*ARRANGEMENTS* s'applique aux résultats qu'on obtient en disposant les unes à la suite des autres, et dans tous les ordres possibles, 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4...  $n$  à  $n$ , un nombre  $m$  de lettres,  $m$  étant  $> n$ , c'est-à-dire le nombre des lettres qui entrent dans chaque résultat, étant moindre que le nombre total des lettres considérées. Si cependant, on supposait  $n = m$ , les arrangements  $n$  à  $n$  deviendraient de simples permutations.

Enfin, on appelle *COMBINAISONS* les arrangements dont deux quelconques diffèrent entre eux au moins par l'une des lettres qui y entrent.

Il est important que les élèves se pénètrent bien de ces définitions, pour entendre la résolution des problèmes suivants.



148. PREMIER PROBLÈME. *Déterminer le nombre total des PERMUTATIONS dont  $n$  lettres sont susceptibles ?*

D'abord, deux lettres  $a$  et  $b$  donnent évidemment les deux permutations  $ab$  et  $ba$ . Ainsi, le nombre des permutations de deux lettres est 2, ou  $1 \times 2$ .

Soient actuellement 3 lettres,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Mettons à part l'une quelconque de ces lettres,  $c$  par exemple, et écrivons à la droite des deux arrangemens  $ab$  et  $ba$  que donnent les deux autres, la lettre  $c$ ; il en résulte les deux permutations de trois lettres,  $abc$ ,  $bac$ . Or, comme on peut ainsi mettre à part chacune des trois lettres, il s'ensuit que le nombre total des permutations de trois lettres est égal à  $2 \times 3$ , ou  $1 \times 2 \times 3$ .

En général, soit un nombre  $n$  de lettres,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , ..., et supposons déjà connu le nombre total des permutations de  $n - 1$  lettres, nombre que nous désignerons par  $Q$ .

Considérons à part l'une des  $n$  lettres, et écrivons cette lettre à la droite de chacune des  $Q$  permutations que donnent les  $n - 1$  autres lettres, il en résulte  $Q$  permutations de  $n$  lettres, terminées par la lettre que l'on avait d'abord isolée. Or, comme on peut ainsi mettre à part chacune des  $n$  lettres, il s'ensuit que le nombre total des permutations de  $n$  lettres est égal à .....  $Q \times n$ .

Soit  $n = 2$ ,  $Q$  désigne alors le nombre des permutations qu'une seule lettre peut donner; donc,  $Q = 1$ , et il vient, dans ce cas particulier,  $Q \times n = 1 \times 2$ .

Soit  $n = 3$ ,  $Q$  exprime alors le nombre des permutations de  $3 - 1$  ou de 2 lettres, et est égal à  $1 \times 2$ . Ainsi,  $Q \times n$  se réduit à  $1 \times 2 \times 3$ .

Soit encore  $n = 4$ ,  $Q$  désigne, dans ce cas, le nombre des permutations de 3 lettres et est égal à  $1 \times 2 \times 3$ . Donc  $Q \times n$  devient  $1 \times 2 \times 3 \times 4$ .

N. B. On voit donc que la formule  $Q \times n$ , renferme tous les cas particuliers du problème proposé. Ainsi, en reprenant les raisonnemens ci-dessus, on peut résoudre immédiatement le cas général, sauf à en déduire ensuite tous les cas particuliers.

149. SECOND PROBLÈME. Un nombre  $m$  de lettres  $a, b, c, d, \dots$  étant donné, déterminer le nombre total des ARRANGEMENTS  $n$  à  $n$ , que l'on peut former avec ces  $m$  lettres,  $m$  étant supposé plus grand que  $n$ ?

Pour résoudre sur-le-champ cette question générale, supposons déjà connu le nombre total des arrangements  $n-1$  à  $n-1$ , que l'on peut faire avec les  $m$  lettres; et désignons ce nombre par  $P$ .

Considérons l'un quelconque de ces arrangements et écrivons à sa droite chacune des lettres qui n'entrent pas dans cet arrangement, et dont le nombre est nécessairement  $m - (n - 1)$  ou  $m - n + 1$ ; il est évident que l'on formera ainsi un nombre  $m - n + 1$  d'arrangements de  $n$  lettres, tous différant entre eux par la dernière lettre.

Considérons un nouvel arrangement de  $n-1$  lettres, et écrivons à sa droite les  $m - n + 1$  lettres qui n'en font pas partie; on obtiendra encore un nombre  $m - n + 1$  d'arrangements de  $n$  lettres, tous différant entre eux et différant des précédents, au moins par la disposition d'une des  $n-1$  premières lettres. Comme d'ailleurs on peut considérer à part chacun des  $P$  arrangements  $n-1$  à  $n-1$ , et écrire successivement à sa droite les  $m - n + 1$  autres lettres, il s'ensuit que le nombre total d'arrangements de  $m$  lettres  $n$  à  $n$ , est exprimé par

$$P(m - n + 1).$$

Veut-on maintenant trouver, comme cas particulier, le nombre total des arrangements de  $m$  lettres 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, ...?

Faisons  $n=2$ , d'où  $m - n + 1 = m - 1$ ;  $P$  exprime dans ce cas, le nombre total d'arrangements 2 à 2 — 1 à 2 — 1, ou 1 à 1, et est, par conséquent, égal à  $m$ ; donc, la formule devient  $m(m - 1)$ .

Soit  $n=3$ , d'où  $m - n + 1 = m - 2$ ;  $P$  exprime alors le nombre des arrangements 2 à 2, et est égal à  $m(m - 1)$ ; donc, la formule devient  $m(m - 1)(m - 2)$ .

Soit encore  $n=4$ , d'où  $m-n+1=m-3$ ;  $P$  exprime le nombre des arrangements 3 à 3, ou est égal à  $m(m-1)(m-2)$ ; donc la formule devient  $m(m-1)(m-2)(m-3)$ . Et ainsi de suite.

*N. B.* D'après la manière dont les cas particuliers ont été déduits de la formule générale,  $P(m-n+1)$ , on peut conclure que cette formule développée revient à

$$m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-n+1);$$

c'est-à-dire qu'elle se compose du produit des  $n$  nombres consécutifs et décroissans, qui se trouvent compris depuis  $m$  inclusivement, jusqu'à  $m-(n-1)$  ou  $m-n+1$ , inclusivement.

Cela posé, il est facile de déduire de cette formule développée, la formule du n° précédent, c'est-à-dire la valeur de  $Q \times n$  aussi développée.

En effet, on a vu (n° 147) que les arrangements deviennent des permutations, lorsqu'on suppose le nombre des lettres qui entrent dans chaque arrangement, égal au nombre total des lettres considérées.

Ainsi, pour passer du nombre total d'arrangemens de  $m$  lettres  $n$  à  $n$ , au nombre de permutations de  $n$  lettres, il n'y a qu'à faire dans le développement ci-dessus,  $m=n$ ; ce qui donne

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 1.$$

Renversant l'ordre des facteurs et observant que le dernier facteur étant 1, l'avant-dernier est 2, le précédent 3..., on obtient

$$1.2.3.4.\dots(n-2)(n-1)n$$

pour le développement de  $Q \times n$ .

Ce n'est autre chose que la suite naturelle des nombres, compris depuis 1 inclusivement jusqu'à  $n$  inclusivement.

150. TROISIÈME PROBLÈME. Déterminer le nombre total de combinaisons différentes  $n$  à  $n$  que l'on peut former avec  $m$  lettres.

Désignons par  $X$  le nombre total des *arrangemens*  $n$  à  $n$  que l'on peut former avec  $m$  lettres, par  $Y$  le nombre de *permutations* dont  $n$  lettres sont susceptibles, enfin, par  $Z$  le nombre total des *combinaisons différentes*  $n$  à  $n$ , nombre qu'il s'agit de déterminer.

Il est évident que, pour obtenir tous les *arrangemens* possibles de  $m$  lettres  $n$  à  $n$ , il suffit de faire subir aux  $n$  lettres de chacune des  $Z$  *combinaisons*, toutes les *permutations* dont ces lettres sont susceptibles. Or, une seule combinaison de  $n$  lettres donne, par hypothèse,  $Y$  *permutations*; donc,  $Z$  *combinaisons* de  $n$  lettres doivent donner  $Y \times Z$  *arrangemens*  $n$  à  $n$ ; et comme on a d'ailleurs désigné par  $X$  le nombre total des *arrangemens*, il s'ensuit que les trois quantités  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  sont liées entre elles par la relation  $X = Y \times Z$ ; d'où l'on déduit  $Z = \frac{X}{Y}$ .

Mais on a trouvé (n° 149)

$$X = P(m - n + 1),$$

et (n° 148)

$$Y = Q \times n.$$

$$\text{Donc enfin, } Z = \frac{P(m - n + 1)}{Q \times n} = \frac{P}{Q} \times \frac{m - n + 1}{n}.$$

Comme  $P$  exprime le nombre total d'*arrangemens*  $n - 1$  à  $n - 1$ , que  $Q$  exprime le nombre total de *permutations* de  $n - 1$  lettres, il s'ensuit que  $\frac{P}{Q}$  exprime le nombre des *combinaisons différentes* de  $m$  lettres  $n - 1$  à  $n - 1$ .

D'après cela, soient demandés, comme cas particuliers, les nombres de *combinaisons* 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4...

Faisons  $n = 2$ , auquel cas  $\frac{P}{Q}$  exprime le nombre des *combinaisons* 2 à 2, ou 1 à 1, et est égal à  $m$ ; la formule ci-dessus devient  $m \times \frac{m-1}{2}$  ou  $\frac{m(m-1)}{1.2}$ .

Faisons  $n = 3$ , auquel cas  $\frac{P}{Q}$  exprime le nombre des com-

binaisons 2 à 2, ou est égal à  $\frac{m(m-1)}{2}$ ; la formule devient  $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ .

On trouverait de même  $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$  pour le nombre des combinaisons 4 à 4, etc.; et en général, pour le nombre des combinaisons  $n$  à  $n$ , on a

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-n+1)}{1.2.3.4.5\dots n-1.n}$$

c'est l'expression  $\frac{P(m-n+1)}{Q \times n}$  développée.

151. *Démonstration de la formule du binôme.* Pour découvrir plus aisément la loi du développement de la puissance  $m^{\text{ième}}$  du binôme  $x+a$ , nous commencerons par observer la loi du produit de plusieurs binômes  $x+a$ ,  $x+b$ ,  $x+c$ ,  $x+d\dots$  ayant un premier terme commun, et dont les seconds termes sont différents.

$$\begin{array}{l} x+a \\ x+b \\ \hline 1^{\text{er}} \text{ produit} \dots x^2+a \quad \left| \begin{array}{l} x+ab \\ +b \end{array} \right. \\ \hline x+c \\ \hline 2^{\text{es}} \dots x^3+a \quad \left| \begin{array}{l} x^2+ab \\ +b \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x+abc \\ +ac \\ +bc \end{array} \right. \\ \hline x+d \\ \hline 3^{\text{es}} \dots x^4+a \quad \left| \begin{array}{l} x^3+ab \\ +b \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x^2+abc \\ +ac \\ +abd \\ +ad \\ +acd \\ +bd \\ +bcd \\ +cd \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x+abcd \end{array} \right. \end{array}$$

Ces multiplications étant effectuées d'après les règles ordinaires de la multiplication algébrique, on reconnaît, sur les trois produits qui précèdent, la loi suivante :

1°. Par rapport aux exposans, l'exposant de  $x$  est d'abord égal au nombre des binômes multipliés. Cet exposant diminue ensuite d'une unité d'un terme au suivant, jusqu'au dernier terme, où il est égal à zéro.

2°. Par rapport aux coefficients des diverses puissances de  $x$ , le coefficient du premier terme est l'unité; le coefficient du second terme est égal à la somme des seconds termes des binômes; le coefficient du troisième terme est égal à la somme des produits différens de ces mêmes seconds termes, multipliés deux à deux; le coefficient du quatrième terme est égal à la somme des produits différens trois à trois. En nous laissant conduire par l'analogie, nous pouvons dire que le coefficient d'un terme, qui en a  $n$  avant lui, est égal à la somme des produits différens  $n$  à  $n$  des seconds termes des binômes. Enfin, le dernier terme est égal au produit des seconds termes des binômes.

Pour nous assurer si cette loi de composition est générale, supposons qu'elle soit déjà reconnue vraie pour le produit d'un nombre  $m$  de binômes, et voyons si elle a lieu lorsqu'on introduit un nouveau facteur dans le produit.

Soit donc

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots + Mx^{m-n+1} + Nx^{m-n} + \dots + U,$$

le produit de  $m$  facteurs binômes ( $Nx^{m-n}$  représente un terme qui en a  $n$  avant lui, et  $Mx^{m-n+1}$  celui qui le précède immédiatement).

Soit d'ailleurs  $x + K$  le nouveau facteur introduit; on a pour le produit ordonné,

$$\begin{array}{ccccccc} x^{m+1} + A|x^m + B & | & x^{m-1} + C & | & x^{m-2} + \dots + N & | & x^{m-n+1} + \dots \\ + K & | & + AK & | & + BK & | & + MK & | & + UK. \end{array}$$

Déjà, la loi des exposans est évidemment la même.

Quant aux coefficients, 1°. celui du premier terme est l'unité, 2°.  $A + K$ , ou le coefficient de  $x^m$ , est aussi la somme des seconds termes des  $m + 1$  binômes.

3°. B est, par hypothèse, égal à la somme des produits diffé-

reus 2 à 2 des seconds termes des  $m$  premiers binômes; AK exprime la somme des produits de chacun des seconds termes des  $m$  premiers binômes, multiplié par le nouveau second terme K; donc,  $B + AK$  est encore la somme des produits différens deux à deux des seconds termes des  $m + 1$  binômes.

En général, puisque N exprime la somme des produits  $n$  à  $n$  des seconds termes des  $m$  premiers binômes, et que MK représente la somme des produits  $n-1$  à  $n-1$  de ces seconds termes, multipliés par le nouveau second terme K, il s'ensuit que  $N + MK$ , ou le coefficient qui, dans le polynôme de degré  $m+1$ , en a  $n$  avant lui, est égal à la somme des produits différens  $n$  à  $n$  des seconds termes des  $m + 1$  binômes. Le dernier terme  $U \times K$ , est d'ailleurs égal au produit des  $m + 1$  seconds termes.

Ainsi la loi de composition, supposée vraie pour le produit d'un nombre  $m$  de binômes, l'est aussi pour un nombre  $m+1$ ; donc, elle est générale.

Concevons actuellement que, dans le produit effectué de  $m$  facteurs binômes,  $x + a$ ,  $x + b$ ,  $x + c$ ,  $x + d$ , ..., on fasse  $a = b = c = d$ , ..., l'expression indiquée de ce produit. . . . .  
 $(x + a) (x + b) (x + c) (x + d)$ , ... se change en  $(x + a)^m$ .  
 Quant à son développement, les coefficients étant. . . . .  
 $a + b + c + d + \dots$ ,  $ab + ac + ad + \dots$ ,  $abc + abd + acd + \dots$ ,  
 1°. le coefficient de  $x^{m-1}$ , ou  $a + b + c + d + \dots$ , devient  $a + a + a + a + \dots$ , c'est-à-dire  $a$  pris autant de fois qu'il y a de lettres  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ..., et se réduit, par conséquent, à  $ma$ .  
 2°. Le coefficient de  $x^{m-2}$ , ou  $ab + ac + \dots$ , se réduit à  $a^2 + a^2 + a^2$ , ... ou bien, à autant de fois  $a^2$  que l'on peut former de combinaisons différentes avec  $m$  lettres, multipliées 2 à 2, ou bien enfin ( $n^\circ 150$ ),  
 à  $m \cdot \frac{m-1}{2} a^2$ .

3°. Le coefficient de  $x^{m-3}$  se réduit au produit de  $a^3$ , multiplié par le nombre de combinaisons différentes de  $m$  lettres prises 3 à 3, ou bien, à  $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^3$ ; et ainsi de suite.

En général, si l'on désigne par  $Nx^{m-n}$  le terme qui en a un

nombre  $n$  avant lui, le coefficient  $N$  qui, dans l'hypothèse où les seconds termes des binômes sont différens, est égal à la somme de leurs produits  $n$  à  $n$ , se réduit, lorsqu'on les suppose tous égaux, à  $a^n$  multiplié par le nombre des combinaisons différentes que peuvent donner  $m$  lettres prises  $n$  à  $n$ . Ainsi, (n° 150)

$$N = \frac{P(m-n+1)}{Q \times n} a^n.$$

Donc enfin, l'on a la formule

$$(x+a)^m = x^m + m a x^{m-1} + m \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} \\ + m \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3} \dots + \frac{P(m-n+1)}{Q \cdot n} a^n x^{m-n} \dots + a^m.$$

152. Pour peu que l'on jette les yeux sur les différens termes de ce développement, on reconnaît une *loi simple*, d'après laquelle un coefficient de rang quelconque se forme au moyen du coefficient précédent.

*Le coefficient d'un terme de rang quelconque, se forme en multipliant le coefficient du terme précédent par l'exposant de  $x$  dans ce terme, et divisant le produit par le nombre des termes qui précèdent celui que l'on considère.*

En effet, prenons le *terme général*,  $\frac{P(m-n+1)}{Q \cdot n} a^n x^{m-n}$

(on l'appelle *terme général*, parce qu'en faisant successivement  $n = 2, 3, 4 \dots$  on peut en déduire tous les autres) ; le terme qui le précède d'un rang est évidemment  $\frac{P}{Q} a^{n-1} x^{m-n+1}$ , puisque

(n° 150)  $\frac{P}{Q}$  exprime le nombre de combinaisons  $n-1$  à  $n-1$ .

Or on voit que le coefficient  $\frac{P(m-n+1)}{Q \cdot n}$  est égal au coef-

ficient  $\frac{P}{Q}$  qui le précède, multiplié par  $m-n+1$ , exposant de  $x$  dans ce terme, et divisé par  $n$ , nombre des termes qui pré-



cèdent celui que l'on considère. C'est dans cette loi, due à Newton, que consiste principalement la *formule du binôme*. Elle sert à développer une puissance particulière, sans qu'on soit même obligé d'avoir recours à la formule générale.

Soit, par exemple, proposé de développer  $(x+a)^6$ . On trouvera, d'après cette loi,

$$(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6.$$

Après avoir formé les deux premiers termes, ce qui n'offre aucune difficulté, d'après les termes de la formule générale  $x^m + max^{m-1} + \dots$ , on multiplie 6, coefficient du second terme, par 5, exposant de  $x$  dans ce terme, puis on divise le produit par 2, ce qui donne 15 pour coefficient du troisième terme. Pour obtenir celui du quatrième, on multiplie 15 par 4, exposant de  $x$  dans le troisième terme, et on divise le produit par 3, nombre des termes qui précèdent le quatrième, ce qui donne 20; et ainsi de suite, pour tous les autres termes.

On trouverait pareillement,

$$(x+a)^{10} = x^{10} + 10ax^9 + 45a^2x^8 + 120a^3x^7 + 210a^4x^6 + 252a^5x^5 + 210a^6x^4 + 120a^7x^3 + 45a^8x^2 + 10a^9x + a^{10}.$$

Nous reviendrons plus loin sur la manière de développer les puissances des expressions algébriques.

*Conséquences de la formule du binôme et de la théorie des combinaisons.*

153. *Première conséquence.* L'expression  $(x+a)^m$  étant composée de la même manière en  $a$  et  $x$ , il doit en être ainsi de son développement; donc, si ce développement renferme un terme de la forme  $Ka^n x^{m-n}$ , il doit en avoir un autre égal à  $Kx^n a^{m-n}$  ou  $Ka^{m-n} x^n$ . Ces deux termes sont évidemment à égale distance des deux extrêmes, dans le développement; car le nombre des termes qui précèdent un terme quelconque, étant marqué par l'exposant de  $a$  dans ce terme, il s'ensuit que le terme  $Ka^n x^{m-n}$  en a  $n$  avant lui, que le terme  $Ka^{m-n} x^n$

en a un nombre  $m - n$  avant lui, et par conséquent,  $n$  après lui (puisque le nombre total des termes est  $m + 1$ ).

Ainsi, dans le développement de toute puissance d'un binôme, les coefficients à égale distance des deux extrêmes sont égaux entre eux.

N. B. Dans les termes  $Ka^n x^{m-n}$ ,  $Ka^{m-n} x^n$ , les deux coefficients expriment les nombres de combinaisons différentes  $n$  à  $n$  et  $m-n$  à  $m-n$ , que l'on peut former avec  $m$  quantités; ainsi, l'on peut encore conclure que le nombre de combinaisons différentes de  $m$  quantités  $n$  à  $n$ , est égal au nombre de combinaisons  $m - n$  à  $m - n$  de ces mêmes quantités.

Par exemple, douze quantités combinées 5 à 5, donnent le même nombre de combinaisons que ces douze quantités combinées 12 - 5 à 12 - 5, ou 7 à 7. Cinq quantités combinées 2 à 2, donnent le même nombre de combinaisons que cinq quantités combinées 5 - 2 à 5 - 2, ou 3 à 3.

154. Seconde conséquence. Si, dans la formule générale

$$(x + a)^m = x^m + m x^{m-1} a + m \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} + \text{etc.},$$

on suppose  $x = 1$ ,  $a = 1$ , elle devient

$$(1 + 1)^m \text{ ou } 2^m = 1 + m + m \frac{m-1}{2} + m \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} + \text{etc.},$$

c'est-à-dire que la somme des coefficients des différens termes de la formule du binôme, est égale à une puissance de 2, d'un degré marqué par  $m$ .

Ainsi, dans la formule particulière

$$(x + a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5,$$

la somme  $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$  des coefficients, égale  $2^5$  ou 32. Dans la dixième puissance développée n° 152, la somme des coefficients est égale à  $2^{10}$  ou 1024.

155. Troisième conséquence. Si l'on a une suite de nombres décroissant d'une unité d'un terme à l'autre, dont le premier soit  $m$  et le dernier  $m - p$  ( $m$  et  $p$  sont des nombres

entiers); que l'on fasse un seul produit de tous ces nombres; ce produit est divisible par le produit de tous les nombres naturels depuis 1 jusqu'à  $p + 1$ . C'est-à-dire que l'on a

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-p)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots p+1}$$

égal à un nombre entier. En effet, il résulte de ce qui a été dit (n° 150), que cette expression représente le nombre des combinaisons différentes  $p+1$  à  $p+1$ ; qu'on peut former avec  $m$  lettres. Or, ce nombre de combinaisons doit être, par sa nature, un nombre entier; donc l'expression ci-dessus est nécessairement un nombre entier.

Nous engageons les élèves à rechercher, de cette propriété, une démonstration indépendante de la Théorie des combinaisons ou de la formule du binôme, en les prévenant toutefois que la question, assez facile à traiter pour les premières expressions  $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ ,  $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ , offre plus de difficulté dans le cas général.

## § II. Extraction des racines des nombres particuliers.

Quoique nous ayons exposé, dans notre Arithmétique, les principes de l'extraction de la *racine cubique*, nous croyons devoir reproduire ici cette théorie; *premièrement*, parce qu'après l'extraction de la *racine carrée*, c'est l'opération la plus usitée, *secondement*, parce que les mêmes raisonnemens pourront s'appliquer à l'extraction de la racine  $4^{\text{ème}}$ ,  $5^{\text{ème}}$ , ...  $n^{\text{ème}}$ .

156. On appelle *cube* ou *troisième puissance* d'un nombre, le produit de ce nombre multiplié deux fois par lui-même, et *racine troisième* ou *cubique*, le nombre qui, élevé au cube, peut produire le nombre proposé.

Les dix premiers nombres

étant ..... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,  
on a pour leurs cubes, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

Réciproquement, les nombres de la seconde ligne ont pour racines cubiques les nombres de la première ligne.

On reconnaît, à l'inspection de ces lignes, que, parmi les nombres d'un, de deux ou trois chiffres, il n'y en a que neuf qui soient des *cubes parfaits*; chacun des autres a pour racine cubique un nombre entier, plus, une fraction qui ne peut s'exprimer exactement au moyen de l'unité. En effet, admettons, pour un instant, que  $\frac{a}{b}$ , nombre fractionnaire irréductible, soit la racine d'un nombre entier N; il s'ensuivrait que le cube de  $\frac{a}{b}$ , ou  $\frac{a^3}{b^3}$ , devrait être égal à N. Or, cela est impossible, car  $a$  et  $b$  étant premiers entre eux, il en est de même de  $a^3$  et  $b^3$ ; donc  $\frac{a^3}{b^3}$  ne peut être égal à un nombre entier.

157. La différence de deux cubes parfaits consécutifs est d'autant plus grande, que les deux racines sont plus grandes, et cette différence peut être évaluée aisément.

En effet, soient  $a$  et  $a + 1$  deux nombres entiers consécutifs; on a ( $n^o$  152)  $(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ ;  
d'où  $(a + 1)^3 - a^3 = 3a^2 + 3a + 1$ ;

c'est-à-dire que la différence de deux cubes consécutifs est égale au triple du carré de la plus petite racine, plus le triple de cette même racine, plus 1.

Ainsi, la différence entre le cube de 90 et le cube de 89 est égale à  $3(89)^2 + 3 \times 89 + 1 = 24031$ .

158. Recherchons maintenant un procédé pour extraire la racine cubique d'un nombre entier.

D'abord, si le nombre n'a que trois chiffres au plus, sa racine s'obtient immédiatement, d'après l'inspection des cubes des neuf premiers nombres. Ainsi, la racine cubique de 125 est 5; la racine cubique de 72 est 4 plus une fraction, ou est 4, à une unité près; la racine cubique de 841 est 9, à une unité près, puisque 841 tombe entre 729 ou le cube de 9, et

1000 ou le cube de 10. Considérons donc un nombre de plus de trois chiffres.

Soit, par exemple, 103823 le nombre proposé.

|         |        |        |
|---------|--------|--------|
| 103.823 | 47     |        |
| 64      | 48     |        |
| 398. 23 | 48     | 47     |
|         | 48     | 47     |
|         | 384    | 329    |
|         | 192    | 188    |
|         | 2304   | 2209   |
|         | 48     | 47     |
|         | 18432  | 15463  |
|         | 9216   | 8836   |
|         | 110592 | 103823 |

Ce nombre étant compris entre 1000, qui est le cube de 10, et 1000000, qui est le cube de 100, sa racine est nécessairement composée de deux chiffres, ou de dizaines et d'unités. Désignons par  $a$  les dizaines et par  $b$  les unités, on a (n° 46)

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

D'où il suit que le cube d'un nombre composé de dizaines et d'unités, contient le cube des dizaines, le triple produit du carré des dizaines par les unités, le triple produit du carré des unités par les dizaines, plus le cube des unités.

Cela posé, le cube des dizaines donnant au moins des mille, les trois derniers chiffres à droite n'en peuvent faire partie, et c'est dans la partie 103 (que l'on sépare des trois derniers chiffres par un point) que se trouve le cube des dizaines. Or, la racine du plus grand cube contenu dans 103 étant 4 pour 64, 4 est le chiffre des dizaines de la racine cherchée; car 103823 est évidemment compris entre  $(40)^3$  ou 64000, et  $(50)^3$  ou 125000; donc la racine cherchée est composée de

4 dizaines, plus d'un certain nombre d'unités moindre que dix.

Le chiffre des dizaines étant trouvé, retranchons son cube 64, de 103; il reste 39 qui, suivi de la tranche 823, donne 39823; et ce résultat contient encore le *triple produit du carré des dizaines par les unités*, plus les deux autres parties énoncées précédemment. Or, le carré d'un nombre de dizaines donnant au moins des centaines, il s'ensuit que ce triple produit ne peut se trouver que dans la partie à gauche 398 des deux derniers chiffres 23 (que l'on sépare encore, pour cette raison, par un point). D'un autre côté, l'on peut former le triple carré des dizaines 4, ce qui donne 48; donc si l'on divise 398 par 48, le quotient 8 est le chiffre des unités de la racine, ou un chiffre trop fort, parce que 398 centaines se composent du triple produit du carré des dizaines par les unités, et des retenues provenant des deux autres parties. Pour vérifier si ce chiffre 8 n'est pas trop fort, on pourrait, comme pour la racine carrée, former, à l'aide de ce chiffre 8 et du chiffre 4 des dizaines, les trois parties qui entrent dans 39823; mais il *est beaucoup plus simple* d'élever 48 au cube (comme on l'a fait dans le tableau ci-dessus). Or, on trouve pour ce cube 110592, nombre plus grand que 103823; ainsi le chiffre 8 est trop fort. En formant le cube de 47, on obtient 103823; donc le nombre proposé est un cube parfait, et a pour racine cubique 47.

*N. B.* On ne peut pas rechercher d'abord le chiffre des unités; car le cube des unités pouvant (n° 156) donner des dizaines et même des centaines, ces dizaines et ces centaines se trouvent confondues avec celles qui proviennent des autres parties du cube.

Soit encore à extraire la racine cubique de 47954:

$$\begin{array}{r|l}
 47.954 & 36 \\
 \underline{27} & 27 \\
 209 & \\
 & 36 \\
 & \underline{36} \\
 & 216 \\
 47954 & \\
 \underline{46656} & 108 \\
 1298 & \underline{1296} \\
 & 36 \\
 & \underline{36} \\
 & 776 \\
 & \underline{3888} \\
 & 46656
 \end{array}$$

Le nombre 47954 étant au-dessous de 1000000, sa racine n'a que deux chiffres, c'est-à-dire que des dizaines et des unités. Le cube des dizaines se trouve dans 47 *mille*, et l'on prouverait, comme précédemment, que 3, racine du plus grand cube contenu dans 47, exprime les dizaines. Retranchons le cube de 3 ou 27 de 47, il reste 20; abaissons à côté de ce reste le seul chiffre 9 de la tranche 954; le nombre 209 centaines se compose du triple produit du carré des dizaines par les unités, plus des retenues qui proviennent des deux autres parties. Donc, si l'on forme le triple carré des dizaines 3, ce qui donne 27, et que l'on divise 209 par 27, le quotient 7 est le chiffre des unités de la racine, ou un chiffre trop fort: En élevant 37 au cube, on trouve 50653, nombre plus fort que 47954; si l'on forme ensuite le cube de 36, on obtient 46656, nombre qui, retranché de 47954 (comme on le voit dans le tableau ci-dessus), donne pour reste 1298. Ainsi, le nombre proposé n'est pas un cube parfait; mais sa racine, à une unité près, est 36. En effet, la différence entre le nombre proposé et le cube de 36, est, comme on vient de le voir, 1298, nombre plus petit que  $3 \times (36)^2 + 3 \times 36 + 1$ , puisque l'on a obtenu dans le cours de la vérification, 3888 pour le triple du carré de 36.

159. Soit maintenant proposé d'extraire la racine cubique d'un nombre de plus de 6 chiffres, de 43725658, par exemple.

|                   |         |          |
|-------------------|---------|----------|
| 43.725.658        | 352     |          |
| 27                | 27..... | 3675     |
| 167               | 35      | 352      |
|                   | 35      | 352      |
| 43 725            | 175     | 704      |
| 42 875            | 105     | 1760     |
| 8506              | 1225    | 1056     |
|                   | 35      | 123904   |
| 43725658          | 6125    | 352      |
| 43614208          | 3675    | 247808   |
| Reste. . . 111450 | 42875   | 619520   |
|                   |         | 371712   |
|                   |         | 43614208 |

Quelle que soit la racine cherchée, elle a nécessairement plus d'un chiffre, et on peut la regarder comme composée d'unités et de dizaines seulement (les dizaines pouvant être exprimées par un ou plusieurs chiffres).

Or, le cube des dizaines donne au moins des mille; ainsi, il se trouve nécessairement dans la partie à gauche des trois derniers chiffres 658. Je dis maintenant que, si l'on extrait la racine du plus grand cube contenu dans cette partie à gauche, 43725, considérée avec sa valeur absolue, on aura le nombre total des dizaines de la racine; en effet, soit  $a$  la racine de 43725, à une unité près, c'est dire que  $a^3$  et  $(a+1)^3$  comprennent 43725; donc aussi 43725000 est compris entre  $a^3 \times 1000$  et  $(a+1)^3 \times 1000$ ; et comme ces deux derniers nombres diffèrent entre eux de plus de 1000, il s'ensuit que le nombre proposé lui-même, ou 43725658, est compris entre  $a^3 \times 1000$  et  $(a+1)^3 \times 1000$ ; ainsi la racine cherchée est comprise entre celles de  $a^3 \times 1000$  et de  $(a+1)^3 \times 1000$ , c'est-à-dire entre  $a < 10$  et  $(a+1) < 19$ . Donc enfin, elle est composée de  $a$  dizaines, plus d'un certain nombre d'unités moindre que dix.

La question est donc ramenée à extraire la racine cubique de 43725; mais ce nouveau nombre ayant plus de trois chiffres,



sa racine en a plus d'un, c'est-à-dire renferme des dizaines et des unités. Pour obtenir les dizaines, il faut séparer les trois derniers chiffres 725, et extraire la racine du plus grand cube contenu dans 43. (On voit assez ce qu'il faudrait faire si ce nouveau nombre avait plus de trois chiffres.)

Le plus grand cube contenu dans 43 est 27, dont la racine est 3, et ce chiffre exprime alors les dizaines de la racine de 43725 (ou le chiffre des centaines de la racine totale). Retranchant le cube de 3, ou 27, de 43, on obtient 16 pour reste, à côté duquel il faut abaisser le premier chiffre 7 de la tranche 725, ce qui donne 167.

Formant le triple carré des dizaines 3, on trouve 27; et si l'on divise 167 par 27, le quotient 6 est le chiffre des unités de la racine de 43725, ou un chiffre trop fort. Il est aisé de prévoir que ce chiffre est en effet trop grand; ainsi il faut essayer 5, et pour cela, élevons 35 au cube; il vient pour résultat 42875, nombre qui, retranché de 43725, donne pour reste 850, nombre évidemment plus petit que  $3 \times (35)^2 + 3 \times 35 + 1$ . Ainsi 35 est la racine du plus grand cube contenu dans 43725; c'est donc le nombre des dizaines de la racine cherchée.

Pour obtenir les unités, on abaisse à côté du reste 850 le premier chiffre 6 de la dernière tranche 658, ce qui donne 8506; on forme d'ailleurs le triple carré des dizaines 35 (cela est facile, puisque, dans la vérification précédente, on a déjà formé le carré de 35); puis on divise 8506 par ce triple carré, 3675; le quotient est 2, que l'on essaie en élevant 352 au cube; ce qui donne 43614208, résultat plus petit que le nombre proposé; en le soustrayant de celui-ci, on obtient pour reste 111450. Ainsi 352 est la racine cubique de 43725658, à une unité près.

**RÈGLE GÉNÉRALE.** Pour extraire la racine cubique d'un nombre entier, séparez le nombre en tranches de trois chiffres chacune, à partir de la droite, jusqu'à ce que vous parveniez à une tranche d'un, de deux ou de trois chiffres au plus (le nombre des tranches est égal au nombre des chiffres de la racine); extrayez la racine du plus grand cube contenu dans la première tranche, à gauche, et retranchez ce cube de la première tranche; abais-

sez à côté du reste le premier chiffre de la seconde tranche, et divisez le nombre ainsi formé, par le triple carré du chiffre déjà trouvé à la racine; écrivez le quotient à la droite de ce chiffre, et élevez l'ensemble des deux chiffres au cube; si ce cube est plus fort que l'ensemble des deux premières tranches, diminuez le quotient d'une ou de plusieurs unités, jusqu'à ce que vous obteniez un cube qui puisse se retrancher de l'ensemble des deux premières tranches; la soustraction faite, abaissez à côté du reste le premier chiffre de la troisième tranche, puis divisez le nombre ainsi formé, par le triple carré de l'ensemble des deux chiffres déjà trouvés; le quotient, s'il n'est pas trop fort, doit être tel, qu'en l'écrivant à la droite des deux premiers chiffres de la racine, et élevant le nombre qui en résulte, au cube, on puisse retrancher ce produit de l'ensemble des trois premières tranches. Cette nouvelle soustraction faite, abaissez à côté du reste le premier chiffre de la quatrième tranche, et continuez la même série d'opérations, jusqu'à ce que vous ayez abaissé toutes les tranches.

*Remarque.* Souvent, dans le cours des opérations, on soupçonne qu'un des quotiens dont nous venons de parler est beaucoup trop fort, et alors on croit pouvoir le diminuer d'avance de deux ou plusieurs unités; mais en élevant au cube la racine déjà trouvée, suivie de ce chiffre, et retranchant ce cube de l'ensemble des tranches déjà considérées dans le nombre donné, on peut obtenir un reste très grand, qui laisse à penser que le dernier chiffre obtenu à la racine est trop faible. On le reconnaît (n° 157) à ce signe, que le reste égale ou surpasse le triple carré de la racine obtenue, plus le triple de cette même racine, plus un. Dans ce cas, on augmente la racine d'une ou de plusieurs unités de l'ordre du dernier chiffre obtenu.

Voici des exemples sur lesquels on peut s'exercer :

$$\sqrt[3]{483249} = 78 \text{ avec le reste } 8697;$$

$$\sqrt[3]{91632508641} = 4508 \text{ avec le reste } 20644129;$$

$$\sqrt[3]{32977340218432} = 32068 \text{ exactement.}$$

160. *Procédé de la racine n<sup>ème</sup> d'un nombre entier.* Pour généraliser le procédé de l'extraction des racines, désignons par  $N$  le nombre proposé, et par  $n$  le degré de la racine à extraire; si  $N$  n'a pas plus de  $n$  chiffres, sa racine n'a qu'un seul chiffre, et on peut l'obtenir immédiatement, en formant la  $n^{\text{ème}}$  puissance de chacun des nombres entiers compris depuis 1 jusqu'à 10, dont la  $n^{\text{ème}}$  puissance est  $10^n$ , ou le plus petit nombre de  $n + 1$  chiffres.

Si  $N$  est composé de plus de  $n$  chiffres, sa racine a plus d'un chiffre, et peut alors être regardée comme renfermant des dizaines et des unités. Désignant ses dizaines par  $a$  et ses unités par  $b$ , on a (n° 151)

$$N = (a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + n \frac{n-1}{2} a^{n-2}b^2 + \text{etc.};$$

c'est-à-dire que le nombre proposé contient la  $n^{\text{ème}}$  puissance des dizaines, plus  $n$  fois le produit de la  $n - 1^{\text{ème}}$  puissance des dizaines par les unités, plus une suite d'autres parties qu'il est inutile de considérer.

Or, la  $n^{\text{ème}}$  puissance des dizaines ne pouvant donner d'unités d'un ordre inférieur à l'unité suivie de  $n$  zéros, les  $n$  derniers chiffres à droite n'en peuvent faire partie. Il faut donc les séparer et extraire la racine de la plus grande  $n^{\text{ème}}$  puissance contenue dans la partie à gauche; cette racine exprimera les dizaines de la racine cherchée.

Si cette partie à gauche renfermait encore plus de  $n$  chiffres, on serait conduit à en séparer les  $n$  derniers chiffres à droite, et à extraire la racine de la plus grande  $n^{\text{ème}}$  puissance contenue dans la nouvelle partie à gauche, et ainsi de suite.

Après avoir séparé, de cette manière, le nombre  $N$  en tranches de  $n$  chiffres (la dernière tranche à gauche n'ayant que  $n$  chiffres au plus), on extrait la racine de la plus grande  $n^{\text{ème}}$  puissance contenue dans cette première tranche à gauche, ce qui donne le chiffre des unités les plus fortes de la racine totale, ou le chiffre des dizaines de la racine du nombre formé par les deux premières tranches à gauche. Retranchant

la  $n^{\text{ième}}$  puissance de ce chiffre, de la première tranche à gauche, on obtient un reste qui, suivi de la seconde tranche, contient encore  $n$  fois le produit de la  $n - 1^{\text{ième}}$  puissance du chiffre trouvé, par le chiffre suivant, plus une suite d'autres parties. Mais cette première partie ne peut évidemment donner d'unités d'un ordre inférieur à  $10^{n-1}$ ; ainsi, les  $n - 1$  derniers chiffres de la seconde tranche ne peuvent en faire partie. Il suffit donc d'abaisser à côté du reste correspondant à la première tranche, le premier chiffre de la seconde tranche; et si, après avoir formé  $n$  fois la  $n - 1^{\text{ième}}$  puissance du premier chiffre de la racine, on divise par ce résultat le reste suivi du premier chiffre de la seconde tranche, le quotient exprimera le second chiffre de la racine, ou sera un chiffre trop fort. Pour l'essayer, on l'écrira à la droite du premier chiffre, et l'on élèvera l'ensemble de ces deux chiffres à la  $n^{\text{ième}}$  puissance; puis on retranchera le produit obtenu, de l'ensemble des deux premières tranches, ce qui donnera un nouveau reste, à côté duquel on abaissera le premier chiffre de la troisième tranche, puis on divisera le nombre ainsi formé par  $n$  fois la  $n - 1^{\text{ième}}$  puissance de l'ensemble des deux chiffres déjà trouvés à la racine.

On continuera cette série d'opérations jusqu'à ce qu'on ait abaissé toutes les tranches.

Les jeunes gens qui auront bien saisi la marche précédente, pourront en faire l'application à l'extraction de la racine  $4^{\text{e}}$ ,  $5^{\text{e}}$ ,  $6^{\text{e}}$ , ....

161. *Remarque.* Toutes les fois que le degré de la racine à extraire est un nombre multiple de deux ou plusieurs autres, comme 4, 6, ...., la racine peut s'obtenir par une suite d'extraction de racines, de degré plus simple. Pour nous rendre compte de ces simplifications, remarquons que

$$(a^3)^4 = a^3 \times a^3 \times a^3 \times a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{12} = a^{3 \times 4},$$

et qu'en général,  $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times a^m \dots = a^{m \times n}$  (n<sup>o</sup> 16).  
Donc, la  $n^{\text{ième}}$  puissance de la  $m^{\text{ième}}$  puissance d'un nombre est égale à la  $mn^{\text{ième}}$  puissance de ce nombre.

Réciproquement, la racine  $m^{\text{ième}}$  d'un nombre est égale à la racine  $n^{\text{ième}}$  de la racine  $m^{\text{ième}}$  de ce nombre, ou algébrique-

ment, je dis que l'on a.....  $\sqrt[m]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ .

En effet, soit.....  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = a'$ ;

élevons les deux membres à la  $n^{\text{ième}}$  puis-

sance; il vient.....  $\sqrt[m]{a} = a'^n$ ;

[car, d'après la définition d'une racine

(n° 2), on a  $(\sqrt[n]{K})^n = K$ ].

Élevons de nouveau les deux membres

à la  $m^{\text{ième}}$  puissance; on obtient.....  $a = (a'^n)^m = a'^{mn}$ .

Extrayant la racine  $m^{\text{ième}}$  des 2 membres,  $\sqrt[m]{a} = a'$ ;

mais on a déjà  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = a'$ ; donc.....  $\sqrt[m]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ .

On trouvera, d'après ce principe,

$$\sqrt[4]{256} = \sqrt{\sqrt{256}} = \sqrt{16} = 4;$$

$$\sqrt[6]{2985984} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{2985984}} = \sqrt[3]{1728} = 12;$$

$$\sqrt[6]{1771561} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{1771561}} = \sqrt[3]{11};$$

$$\sqrt[8]{1679616} = \sqrt[4]{\sqrt[2]{1679616}} = \sqrt[4]{1296} = 6.$$

N. B. Quoique les racines successives puissent s'extraire dans un ordre quelconque, il est préférable d'extraire d'abord la racine du degré le plus simple, parce qu'alors l'extraction de la racine du degré le plus fort, qui est une opération plus compliquée, porte sur un nombre ayant beaucoup moins de chiffres que le nombre proposé. C'est ce que nous avons fait dans le second et le troisième exemple ci-dessus.

*Extraction des racines par approximation.*

162. Lorsque le nombre entier dont on demande la racine  $n^{\text{ième}}$  n'est pas une *puissance parfaite*, le procédé du n° 160 ne donne que la partie entière de la racine, ou la racine à une unité près. Quant à la fraction qui doit compléter la racine, elle ne peut être obtenue exactement; car la  $n^{\text{ième}}$  puissance d'un nombre fractionnaire irréductible  $\frac{a}{b}$ , étant  $\frac{a^n}{b^n}$ , ce nouveau nombre ne peut se réduire à un nombre entier. Mais on peut déterminer la racine avec tel degré d'approximation que l'on veut.

Soit, en général, proposé d'extraire la racine  $n^{\text{ième}}$  d'un nombre entier  $a$ , à une fraction près,  $\frac{1}{p}$ , c'est-à-dire de manière que l'erreur commise soit moindre que  $\frac{1}{p}$ .

Observons que  $a$  peut se mettre sous la forme  $\frac{a \times p^n}{p^n}$ . Si l'on désigne par  $r$  la racine de  $ap^n$  obtenue à une unité près, le nombre  $\frac{a \times p^n}{p^n}$  ou  $a$ , est alors compris entre  $\frac{r^n}{p^n}$  et  $\frac{(r+1)^n}{p^n}$ . donc aussi,  $\sqrt[n]{a}$  est compris entre les racines de ces deux derniers nombres, c'est-à-dire entre  $\frac{r}{p}$  et  $\frac{r+1}{p}$ . Donc enfin,  $\frac{r}{p}$  est la racine demandée, à une fraction près,  $\frac{1}{p}$ .

Règle générale. Pour extraire la racine  $n^{\text{ième}}$  d'un nombre entier, à une fraction près,  $\frac{1}{p}$ , multipliez le nombre par  $p^n$ ; extraitez du produit, la racine  $n^{\text{ième}}$  à une unité près, puis divisez le résultat par  $p$ .

163. Soit en second lieu  $\frac{a}{b}$  une fraction ou un nombre fractionnaire dont il faut extraire la racine  $n^{\text{ième}}$ .

Multiplions les deux termes de la fraction par  $b^{n-1}$ ; il vient  $\frac{a}{b} = \frac{ab^{n-1}}{b^n}$ . Soit  $r$  la racine  $n^{\text{ième}}$  de  $ab^{n-1}$ , à une unité près;  $\frac{ab^{n-1}}{b^n}$ , ou  $\frac{a}{b}$ , est compris entre  $\frac{r^n}{b^n}$  et  $\frac{(r+1)^n}{b^n}$ ; donc,  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$  est lui-même compris entre  $\frac{r}{b}$  et  $\frac{r+1}{b}$ . Ainsi, après avoir rendu le dénominateur de la fraction une  $n^{\text{ième}}$  puissance parfaite, il faut extraire la racine  $n^{\text{ième}}$  du numérateur, à une unité près, puis diviser le résultat par la racine du nouveau dénominateur.

Si l'on veut avoir un plus grand degré d'approximation que celui qu'indique la fraction  $\frac{1}{b}$ , on extraira la racine de  $ab^{n-1}$ , à une fraction quelconque près,  $\frac{1}{p}$ ; soit  $r' + \frac{m}{p}$  cette racine, alors  $r' + \frac{m}{p}$  désignera la racine demandée à une fraction près, marquée par  $\frac{1}{pb}$ .

Tels sont les principes de l'extraction des racines par approximation, que nous allons appliquer au cas particulier de la racine cubique, parce que c'est l'opération la plus usitée.

164. Soit proposé d'extraire la racine troisième de 15, à  $\frac{1}{12}$  près.

On a  $15 \times 12^3 = 15 \times 1728 = 25920$ . Or, la racine cubique de 25920, à une unité près, est 29; donc, la racine demandée est  $\frac{29}{12}$  ou  $2 \frac{5}{12}$ . (Voyez n° 162.)

Soit à extraire la racine troisième de 47, à  $\frac{1}{20}$  près.

On a  $47 \times 20^3 = 47 \times 8000 = 376000$ . Or la racine cubique

de 376000 à une unité près, est 72; donc  $\sqrt[3]{47} = \frac{72}{20} = 3 \frac{12}{20}$ ,  
à  $\frac{1}{20}$  près.

Soit proposé d'évaluer  $\sqrt[3]{25}$  à 0,001 près.

Il faut multiplier 25 par le cube de 1000, ou par 1000000000, ce qui donne 25000000000. Or, la racine cubique de ce nombre est 2920; donc  $\sqrt[3]{25} = 2,920$  à 0,001 près. (Voyez n° 162.)

En général, pour extraire la racine troisième d'un nombre entier, à une unité décimale près, il faut ajouter trois fois autant de zéros, à la droite du nombre, que l'on veut avoir de chiffres décimaux à la racine; extraire la racine du nouveau nombre, à une unité près, puis séparer vers la droite de cette racine, le nombre de chiffres décimaux demandé.

165. Proposons-nous maintenant d'extraire la racine cubique d'une fraction décimale. On demande, par exemple, la racine cubique de 3,1415.

Comme le dénominateur 10000 de cette fraction n'est pas un cube parfait, il faut le rendre tel, en le multipliant par 100, ce qui revient à ajouter 2 zéros à la droite de la fraction décimale proposée, et l'on a 3,141500. On extrait ensuite à une unité près (n° 163) la racine cubique de 3141500, c'est-à-dire du nombre, abstraction faite de la virgule, ce qui donne 146; puis on divise le résultat par 100 ou  $\sqrt[3]{1000000}$ ; et l'on trouve  $\sqrt[3]{3,1415} = 1,46$  à 0,01 près.

Si l'on veut un plus grand degré d'approximation, on ajoute trois fois autant de zéros de plus, à la suite du nombre, que l'on veut avoir de chiffres décimaux de surplus à la racine.

Pour extraire la racine cubique d'une fraction ordinaire, à une unité décimale près, le moyen le plus simple consiste à réduire le nombre proposé en fraction décimale, et à pousser l'opération jusqu'à ce que l'on ait obtenu le triple du nombre des chiffres décimaux que l'on veut avoir à la racine. La ques-



tion est alors ramenée à extraire la racine cubique d'une fraction décimale.

166. Soit enfin proposé d'extraire la racine sixième de 23 à 0,01 près.

En appliquant à cet exemple la règle du n° 162, il faut multiplier 23 par 100<sup>6</sup>, ou ajouter *douze* zéros à la droite de 23, puis extraire la racine sixième du nombre résultant, à une unité près, et diviser cette racine par 100, ou séparer 2 chiffres décimaux vers la droite.

Mais on a (n° 161)  $\sqrt[6]{23 \times (100)^6} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{23 \times (100)^6}}$ ; ainsi, après avoir extrait la racine carrée de  $23 \times (100)^6$ , à une unité près, on extraira la racine cubique du résultat, puis on divisera le nouveau résultat par 100, ou l'on séparera deux chiffres décimaux vers la droite.

On trouvera par ce moyen,  $\sqrt[6]{23} = 1,68$ , à 0,01 près.

On peut s'exercer sur les exemples suivans :

$$\sqrt[3]{473} \text{ à } \frac{1}{20} \text{ près} = \frac{155}{20}; \sqrt[3]{79} \text{ à } 0,0001 = 4,2908;$$

$$\sqrt[6]{13} \text{ à } 0,01 \text{ près} = 1,53; \sqrt[3]{3,00415} \text{ à } 0,0001 = 1,4429;$$

$$\sqrt[3]{0,00101} \text{ à } 0,01 \text{ près} = 0,10; \sqrt[3]{\frac{14}{25}} \text{ à } 0,001 = 0,824.$$

### § III. Formation des puissances et extraction des racines des quantités algébriques. Calcul des radicaux.

Considérons d'abord les quantités monomes.

167. Soit à former la cinquième puissance de  $2a^3b^4$ ; on a (n° 2)

$$(2a^3b^4)^5 = 2a^3b^4 \times 2a^3b^4 \times 2a^3b^4 \times 2a^3b^4 \times 2a^3b^4;$$

d'où l'on voit, 1°. que le coefficient 2 doit être multiplié par lui-même quatre fois, ou doit être élevé à la cinquième puissance; 2°. que chacun des exposans des lettres doit être ajouté avec lui-même quatre fois, ou multiplié par 5.

Donc enfin,  $(2a^3b^4)^5 = 2^5 \cdot a^{3 \times 5} b^{4 \times 5} = 32a^{15}b^{20}$ .

De même,  $(8a^3b^3c)^3 = 8^3 \cdot a^{3 \times 3} b^{3 \times 3} c^3 = 512a^9b^9c^3$ .

Ainsi, pour élever un monome à une puissance donnée, il faut élever le coefficient à cette puissance, puis multiplier chacun des exposans des lettres par l'exposant de la puissance.

Donc réciproquement, pour extraire une racine de degré quelconque d'une quantité monome, il faut; 1°. extraire la racine du coefficient; 2°. diviser l'exposant de chaque lettre par l'indice de la racine.

Ainsi,  $\sqrt[3]{64a^3b^3c^3} = 4a^1b^1c^1$ ;  $\sqrt[4]{16a^4b^{12}c^4} = 2a^1b^3c^1$ .

On voit, d'après cette règle, que pour qu'un monome soit une puissance parfaite du degré de la racine à extraire, il faut que son coefficient soit une puissance parfaite de ce degré, et que les exposans des lettres soient divisibles par l'exposant ou l'indice de la racine à extraire. Nous verrons plus loin comment on simplifie l'expression de la racine d'une quantité qui n'est pas une puissance parfaite.

168. Jusqu'à présent, nous n'avons pas eu égard au signe dont peut être affecté le monome; mais si l'on observe que, quel que soit le signe d'un monome, son carré est toujours positif, et que toute puissance de degré pair  $2n$ , peut être regardée comme égale à la  $n^{\text{ième}}$  puissance du carré, c'est-à-dire que  $b^{2n} = (a^2)^n$ , on peut conclure que toute puissance de degré pair d'une quantité, soit positive, soit négative, est essentiellement positive.

Ainsi  $(\pm 2a^2b^3c)^4 = + 16a^8b^{12}c^4$ .

Comme d'ailleurs, une puissance de degré impair  $2n + 1$ , est le produit d'une puissance de degré pair  $2n$ , par la première puissance, il s'ensuit que toute puissance de degré impair d'un monome est affectée du même signe que le monome.

Donc  $(+ 4a^2b)^3 = + 64a^6b^3$ ;  $(- 4a^2b)^3 = - 64a^6b^3$ .

Il est évident d'après cela, 1°. que toute racine de degré im-

pair d'une quantité monome, doit être affectée du même signe que la quantité.

Ainsi,  $\sqrt[3]{+8a^3} = +2a$ ;  $\sqrt[3]{-8a^3} = -2a$ ;  $\sqrt[5]{-32a^{10}b^5} = -2a^2b$ .

2°. Que toute racine de degré pair d'un monome positif peut être affectée indifféremment du signe + ou du signe -.

Ainsi,  $\sqrt[4]{81a^4b^{12}} = \pm 3ab^3$ ;  $\sqrt[6]{64a^{18}} = \pm 2a^3$ .

3°. Que toute racine de degré pair d'un monome négatif, est une racine impossible; car il n'existe aucune quantité qui, élevée à une puissance de degré pair, puisse donner un résultat négatif. Ainsi,  $\sqrt[4]{-a}$ ,  $\sqrt{-b}$ ,  $\sqrt[8]{-c}$ , sont des symboles d'opérations inexécutables; ce sont des expressions imaginaires comme  $\sqrt{-a}$ ,  $\sqrt{-b}$ , ... (Voyez n° 85.)

Passons maintenant aux polynomes.

169. Nous avons déjà vu comment on élève un binome  $x + a$  à une puissance de degré quelconque; mais il peut arriver que les termes du binome soient affectés de coefficients et d'exposans.

Soit proposé, pour exemple, de développer  $(2a^2 + 3ab)^3$ ; posons pour le moment,  $2a^2 = x$ ,  $3ab = y$ ; il vient

$$(2a^2 + 3ab)^3 = (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Remettant actuellement  $2a^2$  et  $3ab$  au lieu de  $x$  et de  $y$ ,  
 $(2a^2 + 3ab)^3 = (2a^2)^3 + 3(2a^2)^2 \cdot (3ab) + 3(2a^2) \cdot (3ab)^2 + (3ab)^3$ ;  
ou, effectuant les calculs d'après les règles du n° 167 et de la multiplication des monomes,

$$(2a^2 + 3ab)^3 = 8a^6 + 36a^5b + 54a^4b^2 + 27a^3b^3;$$

on trouvera de même

$$\begin{aligned} (4a^2b - 3abc)^4 &= (x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\ &= (4a^2b)^4 + 4(4a^2b)^3(-3abc) + 6(4a^2b)^2(-3abc)^2 \\ &\quad + 4(4a^2b)(-3abc)^3 + (-3abc)^4 \\ &= 256a^8b^4 - 768a^6b^4c + 864a^6b^4c^2 - 432a^5b^4c^3 + 81a^4b^4c^4. \end{aligned}$$

(Les signes sont alternativement positifs et négatifs.)

Soit maintenant à développer  $(x+y+z)^3$ ; posons d'abord  $x+y=u$ , il vient

$$(u+z)^3 = u^3 + 3zu^2 + 3z^2u + z^3;$$

ou, remplaçant  $u$  par sa valeur  $x+y$ ,

$$(x+y+z)^3 = (x+y)^3 + 3z(x+y)^2 + 3z^2(x+y) + z^3,$$

ou, développant de nouveau les calculs indiqués,

$$(x+y+z)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 3x^2z + 6xyz + 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + z^3.$$

Cette expression se compose des cubes des trois termes, plus des triples carrés de chaque terme par les premières puissances des deux autres, plus du sextuple produit des trois termes. Cette loi serait (n° 86) facile à vérifier pour tout polynôme.

Pour appliquer la formule précédente au développement du cube d'un trinôme dont les termes auraient des coefficients et des exposans, il faudrait, comme pour les binômes, désigner chaque terme par une seule lettre, développer, puis remplacer par leurs valeurs les lettres introduites, et effectuer sous les calculs indiqués.

On trouvera, par ce moyen, tout calcul fait,

$$(2a^2 - 4ab + 3b^2)^3 = 8a^6 - 48a^5b + 132a^4b^2 - 208a^3b^3 + 198a^2b^4 - 108ab^5 + 27b^6.$$

On développerait par des procédés analogues, les puissances quatrième, cinquième, etc., d'un polynôme quelconque.

170. Quant à l'extraction des racines des polynômes, nous nous bornerons à exposer le procédé, pour la racine cubique; il sera facile ensuite de généraliser.

Soient  $N$  le polynôme donné, et  $R$  sa racine cubique. Concevons, comme pour la racine carrée (n° 87), ces deux polynômes ordonnés par rapport à une lettre,  $a$  par exemple. Il résulte de la loi de composition du cube d'un polynôme (n° 169), que le cube de  $R$  renferme deux parties, qui ne peuvent se

réduire avec les autres; ce sont le cube du premier terme et le triple carré du premier terme par le second; car il est évident que ces deux parties renferment la lettre *a* avec un exposant plus grand que dans le triple carré du second terme par le premier, dans le cube du second terme, dans le triple carré du premier terme par le troisième, etc. Donc ces deux parties forment nécessairement le premier et le second terme de *N*. Ainsi, en extrayant la racine cubique du premier terme de *N*, on a le premier terme de *R*; divisant ensuite le second terme de *N* par le triple carré du premier terme de *R* (triple carré que l'on peut former aisément); on a le second terme de *R*. Connaissant les deux premiers termes de *R*, on peut former le cube de ce binôme, et le retrancher de *N*. Le reste *N'* contient encore le produit du triple carré du premier terme de *R* par le troisième, plus une suite d'autres parties renfermant *a* avec un exposant moindre que celui qui entre dans ce produit, lequel est par conséquent le premier terme du reste *N'*. Donc, si l'on divise le premier terme de *N'* par le triple carré du premier terme de *R*, on a nécessairement le troisième terme de *R*. Formant le cube du trinôme déjà trouvé à la racine, et retranchant ce cube de *N*, on a un nouveau reste *N''*, sur lequel on peut opérer comme on a opéré sur le reste *N'*; et ainsi de suite.

Si maintenant on rapproche toutes les parties du raisonnement précédent, qui sont marquées en lettres *italiques*, on en conclura le procédé général de l'extraction de la racine cubique d'un polynôme quelconque, et on pourra l'appliquer aux polynômes développés n° 169.

Nous nous contenterons d'indiquer à ceux qui voudraient découvrir le procédé d'extraction de la racine *n*<sup>ième</sup>, que, si l'on désigne par  $x + y + z + u \dots$  les différens termes d'une racine, l'expression de sa *n*<sup>ième</sup> puissance renferme entre autres parties,  $x^n + nx^{n-1}y + \dots + nx^{n-1}z + \dots + nx^{n-1}u$ ; et ce sont ces parties qui, mises successivement en évidence dans le polynôme proposé, servent à faire retrouver les différens termes de la racine.

*Calcul des radicaux.*

171. Lorsque la quantité monome ou polynome, dont on demande une racine d'un certain degré, n'est pas une puissance parfaite, on ne peut qu'indiquer l'opération, en faisant (n° 2) précéder la quantité proposée du signe  $\sqrt{\phantom{x}}$ , et plaçant en dedans de ce signe, le nombre qui marque le degré de la racine à extraire. Ce nombre s'appelle l'*indice du radical*.

Souvent, on peut faire subir à l'expression radicale quelques simplifications fondées sur un principe analogue à celui du n° 84; c'est que la racine  $n^{\text{ième}}$  d'un produit est égale au produit des racines  $n^{\text{ième}}$  des différens facteurs.

En termes algébriques :

$$\sqrt[n]{abcd\dots} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} \times \sqrt[n]{d}\dots$$

En effet, élevons chacune de ces deux expressions à la  $n^{\text{ième}}$  puissance; on trouve pour la première,

$$(\sqrt[n]{abcd\dots})^n = abcd\dots,$$

et pour la seconde,

$$(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}\dots)^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n \cdot (\sqrt[n]{c})^n \dots = abcd\dots$$

Donc, puisque les  $n^{\text{ième}}$  puissances de ces expressions sont égales, elles doivent l'être elles-mêmes. (Voyez n° 176.)

Cela posé, soit l'expression  $\sqrt[3]{54a^3b^3c^3}$ , qui ne peut être remplacée par un monome rationnel, puisque 54 n'est pas un cube parfait, et que d'ailleurs les exposans de  $a$  et  $c$  ne sont pas divisibles par 3; on a

$$\sqrt[3]{54a^3b^3c^3} = \sqrt[3]{27a^3b^3} \cdot \sqrt[3]{2ac^3} = 3ab\sqrt[3]{2ac^3}.$$

De même,  $\sqrt[3]{8a^3} = 2\sqrt[3]{a^3}$ ;  $\sqrt[4]{48a^6b^8c^6} = 2ab^2c\sqrt[4]{3ac^3}$ ;  
 $\sqrt[6]{192a^7bc^{13}} = \sqrt[6]{64a^6c^{12}} \times \sqrt[6]{3ab} = 2ac\sqrt[6]{3ab}$ .

Dans les expressions,  $3ab\sqrt[3]{2ac^3}$ ,  $2\sqrt[3]{a^3}$ ,  $2ab^2c\sqrt[4]{3ac^3}$ , les quantités qui sont en avant du radical, *en signe de multiplication*, sont appelées les *coefficients* du radical.

172. Le principe démontré n° 161 donne lieu à une autre espèce de simplification.

Que l'on ait, par exemple, l'expression radicale  $\sqrt[6]{4a^3}$  ; comme, en vertu de ce principe,  $\sqrt[6]{4a^3} = \sqrt{\sqrt[3]{4a^3}}$ , et que la quantité soumise au radical  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ , est un carré parfait, on peut effectuer cette extraction de racine carrée, ce qui donne

$$\sqrt[6]{4a^3} = \sqrt[3]{2a}.$$

De même,  $\sqrt[4]{36a^2b^2} = \sqrt{\sqrt[3]{36a^2b^2}} = \sqrt{6ab}$ .

En général,  $\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^n}} = \sqrt[n]{a}$  ; c'est-à-dire lorsque l'indice d'un radical est multiple d'un certain nombre  $n$ , et que la quantité sous le signe radical est une puissance  $n^{\text{ième}}$  exacte, on peut, sans changer la valeur du radical, diviser son indice par  $n$ , et extraire la racine  $n^{\text{ième}}$  de la quantité sous le signe.

Cette proposition est l'inverse d'une autre non moins importante, qui consiste en ce que l'on peut multiplier l'indice d'un radical par un certain nombre, pourvu que l'on élève la quantité sous le signe à une puissance d'un degré marqué par ce nombre.

Ainsi,  $\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}$ . En effet,  $a$  est la même chose que  $\sqrt[n]{a^n}$  ;

donc  $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}} = \sqrt[mn]{a^n}$ .

Ce dernier principe sert à ramener deux ou plusieurs radicaux à avoir le même indice, ce qui est souvent utile.

Soient, par exemple, les deux radicaux  $\sqrt[3]{2a}$  et  $\sqrt[4]{(a+b)}$ , que l'on veut réduire au même indice.

Si l'on multiplie l'indice du premier par 4, indice du second, et que l'on élève la quantité  $2a$  à la quatrième puissance; si, de même, on multiplie l'indice du second par 3, indice du premier, et que l'on élève  $a+b$  au cube, on ne changera point les valeurs des deux radicaux; et il viendra, par ces opérations,

$$\sqrt[3]{2a} = \sqrt[12]{2^4 a^4} = \sqrt[12]{16a^4}; \quad \sqrt[4]{a+b} = \sqrt[12]{(a+b)^3}.$$

**RÈGLE GÉNÉRALE.** *Pour réduire deux ou plusieurs radicaux au même indice, multipliez l'indice de chaque radical par le produit de tous les autres indices, et élevez la quantité sous le signe à une puissance d'un degré marqué par ce produit.*

Cette règle, qui a beaucoup d'analogie avec la réduction des fractions au même dénominateur, est susceptible des mêmes modifications.

Soient, par exemple, les radicaux  $\sqrt[4]{a}$ ,  $\sqrt[6]{5b}$ ,  $\sqrt[8]{a^2+b^2}$ , que l'on veut ramener au même indice.

Comme les nombres 4, 6, 8, ont des facteurs communs, et que 24 est le multiple le plus simple de ces trois nombres, il suffit évidemment de multiplier le premier par 6, le second par 4, et le troisième par 3, pourvu que l'on élève les quantités sous chaque signe radical, aux puissances de degrés marqués respectivement par 6, 4 et 3, ce qui donne

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt[24]{a^6}; \quad \sqrt[6]{5b} = \sqrt[24]{5^4 b^4}, \quad \sqrt[8]{a^2+b^2} = \sqrt[24]{(a^2+b^2)^3}.$$

Ces notions établies, proposons-nous d'exécuter sur les radicaux les opérations de l'Arithmétique, qui sont maintenant au nombre de six, en y comprenant la formation des puissances et l'extraction des racines.



173. *Addition et soustraction des radicaux.* Deux radicaux sont dits *semblables*, lorsqu'ils ont le même indice, et que la quantité sous le signe est aussi la même.

Cela posé, pour ajouter ou soustraire deux radicaux semblables, il faut *ajouter ou soustraire leurs coefficients*, et *placer la somme ou la différence, comme coefficient, en avant du radical commun.*

$$\text{Ainsi, } 3\sqrt[3]{b} + 2\sqrt[3]{b} = 5\sqrt[3]{b}, \quad 3\sqrt[3]{b} - 2\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{b},$$

$$3a\sqrt[4]{b} \pm 2c\sqrt[4]{b} = (3a \pm 2c)\sqrt[4]{b}.$$

Souvent, deux radicaux ne sont pas semblables au premier abord, et peuvent le devenir, lorsqu'on leur a fait subir les simplifications des nos 171 et 172. Par exemple,

$$\sqrt[3]{48ab^3} + b\sqrt[3]{75a} = 4b\sqrt[3]{3a} + 5b\sqrt[3]{3a} = 9b\sqrt[3]{3a};$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8a^3b + 16a^2} - \sqrt[3]{b^3 + 2ab^2} &= 2a\sqrt[3]{b + 2a} - b\sqrt[3]{b + 2a} \\ &= (2a - b)\sqrt[3]{b + 2a}; \end{aligned}$$

$$3\sqrt[6]{4a^3} + 2\sqrt[3]{2a} = 3\sqrt[3]{2a} + 2\sqrt[3]{2a} = 5\sqrt[3]{2a}.$$

Si les radicaux ne sont pas semblables, on ne peut qu'indiquer l'addition ou la soustraction, en interposant les signes + et -.

174. *Multiplication et division.* Considérons d'abord le cas où les radicaux ont le même indice.

Soit  $\sqrt[n]{a}$  à multiplier ou à diviser par  $\sqrt[n]{b}$ . Je dis que l'on a

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \text{ et } \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

En effet, si l'on élève  $\sqrt[n]{a}$ ,  $\sqrt[n]{b}$  et  $\sqrt[n]{ab}$  à la  $n^{\text{ème}}$  puissance, on trouve également pour résultat,  $ab$ ; donc, ces deux expressions sont égales.

De même,  $\sqrt[n]{a}$  et  $\sqrt[n]{b}$  élevées à la  $n^{\text{ième}}$  puissance, donnent  $\frac{a}{b}$ ; ainsi ces deux expressions sont égales.

D'où l'on voit que, pour multiplier ou diviser deux radicaux de même indice, il faut multiplier ou diviser l'une par l'autre les deux quantités sous le signe, et affecter le produit du signe radical commun. S'il y a des coefficients, on commence par les multiplier ou les diviser séparément.

Ainsi,

$$2a \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{c}} \times -3a \sqrt[3]{\frac{(a^3+b^3)^2}{d}} = -6a^2 \sqrt[3]{\frac{(a^3+b^3)^3}{cd}},$$

$$\text{ou simplifiant,} = \frac{-6a^2(a^3+b^3)}{\sqrt[3]{cd}}$$

$$3a \sqrt[4]{8a^3} \times 2b \sqrt[4]{4a^2c} = 6ab \sqrt[4]{32a^5c} = 12a^2b \sqrt[4]{2c};$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^3b^3+b^3}}{\sqrt[3]{a^3-b^3}} = \sqrt[3]{\frac{8b(a^3b^3+b^3)}{a^3-b^3}} = 2b \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}}.$$

Si les radicaux n'ont pas le même indice, il faut les y réduire (n° 172), et opérer comme il vient d'être dit.

$$\text{Par exemple,} \quad 3a \sqrt[6]{b} \times 5b \sqrt[4]{2c} = 15ab \sqrt[12]{8b^4c^3}.$$

#### 175. Formation des puissances et extraction des racines.

Soit d'abord  $\sqrt[m]{a}$  à élever à la  $n^{\text{ième}}$  puissance; on a, . . . . .

$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \dots = \sqrt[m]{a^n}$ , d'après la règle qui vient d'être établie pour la multiplication.

Donc, pour élever une quantité radicale à une puissance donnée; il faut élever la quantité sous le signe à cette puissance, et affecter le résultat, du signe radical avec son indice primitif.

S'il y a un coefficient, on élève séparément ce coefficient à la puissance donnée.

$$\text{Ainsi } (\sqrt[4]{4a})^2 = \sqrt[4]{(4a)^2} = \sqrt[4]{16a^2} = 2a \sqrt[4]{a^2};$$

$$(3\sqrt[3]{2a})^3 = 3^3 \cdot \sqrt[3]{(2a)^3} = 243 \sqrt[3]{32a^3} = 486a \sqrt[3]{4a^3}.$$

Lorsque l'indice du radical est un multiple de l'exposant de la puissance que l'on veut former, on peut simplifier.

Soit, par exemple,  $\sqrt[4]{2a}$  à élever au carré; remarquons que (n° 161),  $\sqrt[4]{2a} = \sqrt{\sqrt[4]{2a}}$ . Or, pour élever cette quantité au carré, il suffit de supprimer le premier signe radical; ainsi l'on a  $(\sqrt[4]{2a})^2 = \sqrt{2a}$ .

Soit encore  $\sqrt[6]{3b}$  à élever au carré, cette expression revient à  $\sqrt[3]{\sqrt[6]{3b}}$ ; donc  $(\sqrt[6]{3b})^2 = \sqrt[3]{3b}$ . C'est-à-dire que, si l'indice du radical est divisible par l'exposant de la puissance, on peut effectuer cette division, en laissant la quantité sous le radical telle qu'elle était.

Quant à l'extraction des racines, il faut multiplier l'indice du radical par l'indice de la racine à extraire, et laisser la quantité sous le signe telle qu'elle était.

$$\text{Ainsi } \sqrt[4]{\sqrt[3]{3c}} = \sqrt[12]{3c}; \sqrt[3]{\sqrt[4]{5c}} = \sqrt[12]{5c}.$$

Cette règle n'est autre chose que le principe du n° 161, énoncé dans un ordre inverse.

Si la quantité sous le signe est une puissance parfaite, de même degré que la racine à extraire, il y a lieu à simplification.

$$\text{Ainsi, } \sqrt[3]{\sqrt[4]{8a^3}} \text{ étant égal à } \sqrt[4]{\sqrt[3]{8a^3}}, \text{ se réduit à } \sqrt[4]{2a}.$$

$$\text{De même, } \sqrt[5]{\sqrt[3]{9a^2}} = \sqrt[15]{9a^2} = \sqrt[3]{3a}.$$

Il est évident d'ailleurs que l'on a  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ ; car l'une et l'autre expressions sont (n° 161) égales à  $\sqrt[n]{a}$ .

176. Les règles qui viennent d'être établies pour le calcul des radicaux, sont fondées principalement sur le principe que la racine  $n^{\text{ième}}$  du produit de plusieurs facteurs est égale au produit des racines  $n^{\text{èmes}}$  de ces différents facteurs; et la démonstration de ce principe repose (n° 171) sur ce que, si les puissances de même degré de deux expressions sont égales, les expressions sont aussi égales. Or, cette dernière proposition, qui est vraie, en tant que l'on ne considère que des nombres absolus, ne l'est pas toujours pour les diverses expressions auxquelles peut conduire l'Algèbre.

Pour vérifier l'exactitude de cette assertion, nous prouverons qu'un même nombre peut avoir, algébriquement, plusieurs racines carrées, plusieurs racines cubiques, plusieurs racines quatrièmes, etc.

Désignons, en effet, par  $x$  l'expression générale de la racine carrée d'un nombre  $a$ , et par  $p$  la valeur numérique ou arithmétique de cette racine carrée; on a l'équation  $x^2 = a$ , ou  $x^2 = p^2$ , de laquelle on tire  $x = \pm p$ . D'où l'on voit que, de quelque signe qu'on affecte la valeur arithmétique  $p$  de la racine carrée de  $a$ , son carré donne également  $a$ , résultat conforme à ce qui a été dit (n° 85).

Soit, en second lieu,  $x$  l'expression générale de la racine cubique de  $a$ , et désignons par  $p$  la valeur numérique de cette racine cubique; on a l'équation  $x^3 = a$  ou  $x^3 = p^3$ .

Cette équation est d'abord satisfaite par  $x = p$ .

Observons maintenant que l'on peut mettre  $x^3 = p^3$  sous la forme  $x^3 - p^3 = 0$ .

Or, on a vu (n° 31) que l'expression  $x^3 - p^3$  est divisible par  $x - p$ , et donne pour quotient exact,  $x^2 + px + p^2$ ; l'équation ci-dessus peut donc être transformée ainsi

$$(x - p)(x^2 + px + p^2) = 0,$$

équation à laquelle on satisfait,

soit en posant  $x - p = 0$ , d'où  $x = p$ ,

soit en posant  $x^2 + px + p^2 = 0$ , d'où  $x = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2} \sqrt{-3}$ ,

ou bien, .....  $x = p \left( \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \right)$ .

On voit donc que la racine cubique de  $a$  admet trois valeurs algébriques différentes, savoir :

$$p, p \left( \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \right) \text{ et } p \left( \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \right).$$

Soit encore à résoudre l'équation  $x^4 = p^4$  ( $p$  désignant la valeur arithmétique de  $\sqrt[4]{a}$ ). Cette équation peut se mettre sous la forme  $x^4 - p^4 = 0$ . Or, l'expression  $x^4 - p^4$  revient (n° 19) à  $(x^2 - p^2)(x^2 + p^2)$ . Donc l'équation revient elle-même à  $(x^2 - p^2)(x^2 + p^2) = 0$ , et l'on peut y satisfaire,

soit en posant  $x^2 - p^2 = 0$ , d'où  $x = \pm p$ ,

soit en posant  $x^2 + p^2 = 0$ , d'où  $x = \pm \sqrt{-p^2} = \pm p \sqrt{-1}$ .

On obtient donc ainsi quatre expressions algébriquement différentes, pour la racine quatrième du nombre  $a$ .

Proposons-nous de résoudre la nouvelle équation  $x^6 = p^6$ , qui peut se mettre sous la forme  $x^6 - p^6 = 0$ .

Or,  $x^6 - p^6$  revient (n° 19) à  $(x^3 - p^3)(x^3 + p^3) = 0$ .

Ainsi l'équation devient  $(x^3 - p^3)(x^3 + p^3) = 0$ .

Déjà, l'équation  $x^3 - p^3 = 0$ , résolue précédemment, a donné

$$x = p \text{ et } x = p \left( \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \right).$$

Considérons actuellement l'équation  $x^3 + p^3 = 0$ , et observons que, si l'on remplace, pour le moment,  $p$  par  $-p'$ , elle devient

$x^3 - p'^3 = 0$ , d'où l'on déduit  $x = p'$  et  $x = p' \left( \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \right)$ ;

ou, remettant à la place de  $p'$  sa valeur  $-p$ ,

$$x = -p, \text{ et } x = -p \left( \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \right).$$

Ainsi, l'équation  $x^6 - p^6 = 0$ , et par conséquent, la racine 6<sup>ième</sup> de  $a$  admet six valeurs :  $p$ ,  $ap$ ,  $a^2p$ ,  $-p$ ,  $-ap$ ,  $-a^2p$ , en posant, pour simplifier,

$$a = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad a' = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Nous pouvons conclure, par analogie (ce qui sera démontré d'ailleurs par la suite, d'une manière plus complète), que toute équation de la forme  $x^m - a = 0$ , ou  $x^m - p^m = 0$ , est susceptible de  $m$  valeurs différentes; c'est-à-dire que la racine  $m^{\text{ième}}$  d'un nombre admet  $m$  valeurs, algébriquement différentes.

177. *Conséquence.* Si dans les équations précédentes, et les résultats qui leur correspondent, on suppose comme cas particulier,  $a = 1$ , d'où  $p = 1$ , on obtiendra les racines carrées, cubiques, quatrièmes, etc., de l'unité. Ainsi,  $+1$  et  $-1$  sont les deux racines carrées de l'unité, car l'équation  $x^2 - 1 = 0$  donne  $x = \pm 1$ .

De même,  $+1$ ,  $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ ,  $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ , sont les trois racines cubiques de l'unité, ou les racines de  $x^3 - 1 = 0$ .

$+1$ ,  $-1$ ,  $+\sqrt{-1}$ ,  $-\sqrt{-1}$ , sont les quatre racines quatrièmes de l'unité, ou les racines de  $x^4 - 1 = 0$ .

178. Il résulte de l'analyse précédente, que les règles du calcul des radicaux, qui sont exactes, en tant que l'on opère sur des nombres absolus, peuvent être susceptibles de quelques modifications, lorsqu'on opère sur des expressions ou symboles purement algébriques; c'est surtout quand on applique ces règles aux expressions imaginaires, que ces modifications sont nécessaires, et elles sont une suite de ce qui a été dit n° 176.

On demande, par exemple, le produit de  $\sqrt{-a}$  par  $\sqrt{-a}$ ;

la règle du n° 174 donne

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{+a}.$$

Or,  $\sqrt{a}$  est égal à  $\pm a$  (n° 176); il y a donc ici, en apparence, incertitude sur le signe dont  $a$  doit être affecté, pour répondre à la question. Cependant, la véritable réponse est  $-a$ , par la raison qu'en général, pour élever  $\sqrt{m}$  au carré, il suffit de supprimer le radical; or,  $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$  revient à  $(\sqrt{-a})^2$ , et, par conséquent, est égal à  $-a$ .

Soit, en second lieu, à former le produit  $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$ ; on aurait, d'après la règle du n° 174.

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{+ab}.$$

Or,  $\sqrt{ab} = \pm p$  (n° 176),  $p$  désignant la valeur arithmétique de la racine carrée de  $ab$ ; mais je dis que le véritable résultat doit être  $-p$  ou  $-\sqrt{ab}$ , en tant que l'on considère les deux radicaux  $\sqrt{-a}$  et  $\sqrt{-b}$  comme précédés l'un et l'autre du signe  $+$ .

En effet, on a

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \text{ et } \sqrt{-b} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1};$$

donc

$$\begin{aligned} \sqrt{-a} \times \sqrt{-b} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{ab} \cdot (\sqrt{-1})^2 \\ &= \sqrt{ab} \times -1 = -\sqrt{ab}. \end{aligned}$$

On trouvera, d'après ces principes, pour les diverses puissances de  $\sqrt{-1}$ ,

$$\begin{aligned} \sqrt{-1} &= \sqrt{-1}, \quad (\sqrt{-1})^2 = -1, \\ (\sqrt{-1})^3 &= (\sqrt{-1})^2 \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

$$(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1})^2 = -1 \times -1 = +1.$$

Comme les quatre puissances suivantes s'obtiendraient en multipliant la quatrième  $+1$ , par la première, la seconde, la troisième et la quatrième, on retrouverait encore pour ces quatre nouvelles puissances,  $+\sqrt{-1}$ ,  $-1$ ,  $-\sqrt{-1}$ ,  $+1$ ;

donc, en général, toutes les puissances de  $\sqrt{-1}$  forment, de quatre en quatre, une période égale à  $\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, +1$ .

Soit encore proposé de déterminer le produit de  $\sqrt[4]{-a}$  par  $\sqrt[4]{-b}$ , qui, d'après la règle, serait  $\sqrt[4]{+ab}$ , et par conséquent (n° 176) donnerait les quatre valeurs

$$+\sqrt[4]{ab}, -\sqrt[4]{ab}, +\sqrt[4]{ab} \cdot \sqrt{-1}, -\sqrt[4]{ab} \cdot \sqrt{-1}.$$

Pour déterminer le véritable produit, observons que

$$\sqrt[4]{-a} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{-1}, \quad \sqrt[4]{-b} = \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{-1};$$

mais  $\sqrt[4]{-1} \times \sqrt[4]{-1} = (\sqrt[4]{-1})^2 = (\sqrt{\sqrt{-1}})^2 = \sqrt{-1};$

donc  $\sqrt[4]{-a} \times \sqrt[4]{-b} = \sqrt[4]{ab} \cdot \sqrt{-1}.$

Appliquons les calculs précédens à la vérification de l'expression  $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ , comme racine de l'équation  $x^3 - 1 = 0$ ,

c'est-à-dire comme *racine cubique* de 1. (Voyez n° 177.)

D'après la formule  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ,

$$\begin{aligned} \text{on a } & \left( \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{(-1)^3 + 3(-1)^2 \cdot \sqrt{-3} + 3(-1) \cdot (\sqrt{-3})^2 + (\sqrt{-3})^3}{8} \\ &= \frac{-1 + 3\sqrt{-3} - 3 \times -3 - 3\sqrt{-3}}{8} = \frac{8}{8} = 1. \end{aligned}$$

On vérifierait de même la seconde valeur,  $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ .

#### § IV. Théorie des exposans de nature quelconque. Notions générales sur les séries.

179. C'est ici le lieu de faire connaître deux nouvelles notations, d'un usage très commode dans les calculs algébriques; ce sont les *exposans fractionnaires* et les *exposans négatifs*; ils



tirent leur origine des règles établies pour l'extraction des racines et la division des monomes.

Que l'on ait à extraire la racine  $n^{\text{ième}}$  d'une quantité telle que  $a^m$ . On a vu (n° 167) que, si  $m$  est multiple de  $n$ , il faut diviser l'exposant  $m$  par l'indice  $n$  de la racine. Mais si  $m$  n'est pas divisible par  $n$ , auquel cas l'extraction de la racine n'est pas possible algébriquement, on peut convenir d'indiquer cette opération, en indiquant la division des deux exposans.

Donc  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ , d'après une convention fondée sur la règle des exposans, pour l'extraction des racines des quantités monomes.

Ainsi,  $\sqrt[3]{a^3} = a^{\frac{3}{3}}; \quad \sqrt[4]{a^7} = a^{\frac{7}{4}}.$

De même, que l'on ait à diviser  $a^m$  par  $a^n$ . On sait qu'il faut (n° 23) retrancher l'exposant du diviseur de celui du dividende, toutes les fois que l'on a  $m > n$ , ce qui donne  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ .

Mais si  $m$  est  $< n$ , auquel cas la division n'est pas possible algébriquement, on peut convenir d'indiquer cette division, en soustrayant toujours l'exposant du diviseur de celui du dividende. Soit  $p$  la différence absolue entre  $n$  et  $m$ ; on a alors  $n = m + p$ , d'où  $\frac{a^m}{a^{m+p}} = a^{-p}$ ; d'ailleurs,  $\frac{a^m}{a^{m+p}}$  se réduit à  $\frac{1}{a^p}$ , par la suppression du facteur  $a^m$  commun aux deux termes. Donc

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

L'expression  $a^{-p}$  est donc le symbole d'une division qui n'a pu s'effectuer; et sa vraie valeur est le quotient de l'unité divisée par la même lettre  $a$ , affectée de l'exposant  $p$  pris positivement. Ainsi  $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ ;  $a^{-6} = \frac{1}{a^6}$ .

La notation de l'exposant négatif a l'avantage de conserver une forme entière aux expressions fractionnaires.

De la combinaison d'une extraction de racine et d'une divi-

sion impossibles, de quantités monomes, résulte une autre notation, c'est l'exposant fractionnaire négatif.

Soit à extraire la racine  $n^{\text{me}}$  de  $\frac{1}{a^m}$ .

D'abord, on a  $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$ ; donc  $\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = a^{-\frac{m}{n}}$ , en remplaçant le signe ordinaire du radical par un exposant fractionnaire.

Les expressions  $a^{\frac{m}{n}}$ ,  $a^{-p}$ ,  $a^{-\frac{m}{n}}$  sont donc, d'après des conventions fondées sur les règles précédemment établies, des notations équivalentes à  $\sqrt[n]{a^m}$ ,  $\frac{1}{a^p}$ ,  $\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}$ . Ainsi, l'on peut, suivant les circonstances, remplacer les premières par celles-ci, et réciproquement.

Comme dans le discours,  $a^p$  s'énonce  $a$  puissance  $p$ ,  $p$  étant un nombre entier positif, de même, par analogie,  $a^{\frac{m}{n}}$ ,  $a^{-p}$ ,  $a^{-\frac{m}{n}}$  s'énoncent  $a$  puissance  $\frac{m}{n}$ ,  $a$  puissance  $-p$ ,  $a$  puissance  $-\frac{m}{n}$ ; ce qui a engagé les algébristes à généraliser le mot *puissance*. Mais il serait peut-être plus convenable de n'employer que les dénominations  $a$  exposant  $\frac{m}{n}$ , exposant  $-p$ , exposant  $-\frac{m}{n}$ , en consacrant uniquement le mot *puissance* à désigner le produit d'un nombre multiplié plusieurs fois par lui-même. (Voyez n° 2.)

180. Ces notions sur l'origine et la signification des quantités affectées d'exposans quelconques étant établies, voyons comment on peut effectuer sur elles les opérations de l'arithmétique, à partir de la multiplication.

*Multiplication.* Soit d'abord  $a^{\frac{1}{2}}$  à multiplier par  $a^{\frac{1}{3}}$ ; je dis

qu'il suffit d'ajouter les deux exposans, et que l'on a

$$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{3}};$$

En effet, on a vu (n° 179) que

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^1}; \quad a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2};$$

donc

$$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^1} \times \sqrt[3]{a^2};$$

ou bien, effectuant la multiplication d'après la règle du n° 174,

$$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^{1 \times 2}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Soit encore à multiplier  $a^{-\frac{1}{3}}$  par  $a^{\frac{5}{3}}$ ; je dis que l'on a

$$a^{-\frac{1}{3}} \times a^{\frac{5}{3}} = a^{-\frac{1}{3} + \frac{5}{3}} = a^{\frac{-1+5}{3}} = a^{\frac{4}{3}};$$

en effet,  $a^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a^1}}$ ,  $a^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{a^5}$ ; donc

$$a^{-\frac{1}{3}} \times a^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a^1}} \times \sqrt[3]{a^5} = \sqrt[3]{\frac{1}{a^1} \times a^5} = \sqrt[3]{\frac{a^5}{a^1}} = \sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{4}{3}}.$$

Soit plus généralement,  $a^{-\frac{m}{n}}$  à multiplier par  $a^{\frac{p}{q}}$ ; on a

$$a^{-\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{\frac{-mq + np}{nq}};$$

car  $a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}$ ,  $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ ; donc

$$a^{-\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} \times \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{\frac{a^{np}}{a^{mq}}} = \sqrt[nq]{a^{np-mq}} = a^{\frac{np-mq}{nq}}.$$

Donc, règle générale, pour multiplier deux monomes affectés d'exposans quelconques, il faut ajouter les deux exposans d'une même lettre; c'est la règle déjà établie n° 16; pour les quantités affectées d'exposans entiers.

On trouvera, d'après cette règle,

$$a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{1}{2}} c^{-1} \times a^2 b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{11}{3}} b^{\frac{5}{2}} c^{\frac{5}{2}};$$

$$3a^{-2} b^{\frac{2}{3}} \times 2a^{-\frac{4}{5}} b^{\frac{1}{4}} c^2 = 6a^{-\frac{14}{5}} b^{\frac{7}{20}} c^2.$$

*Division.* Pour diviser deux quantités monomes affectées d'exposans quelconques, l'une par l'autre, il faut suivre la règle qui a été établie (n° 22) pour les quantités affectées d'exposans entiers et positifs, c'est-à-dire qu'il faut, pour chaque lettre, retrancher l'exposant du diviseur de celui du dividende.

En effet, l'exposant de chaque lettre dans le quotient doit être tel, qu'ajouté à celui de la même lettre dans le diviseur, la somme soit égale à l'exposant du dividende; donc l'exposant du quotient est égal à la différence entre l'exposant du dividende et celui du diviseur.

On trouvera, d'après cette règle,

$$a^{\frac{2}{3}} : a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3} - (-\frac{1}{2})} = a^{\frac{7}{6}};$$

$$a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{3}{4} - \frac{4}{5}} = a^{-\frac{1}{20}}; a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}};$$

$$a^{\frac{2}{5}} b^{\frac{3}{4}} : a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{7}{8}} = a^{\frac{6}{10} - (-\frac{5}{10})} b^{\frac{3}{4} - \frac{7}{8}} = a^{\frac{11}{10}} b^{-\frac{1}{8}}.$$

*Formation des puissances.* Pour élever un monome affecté d'exposans quelconques à la  $n^{\text{ème}}$  puissance, il faut, conformément à la règle du n° 167, multiplier l'exposant de chaque lettre par l'exposant  $m$  de la puissance; car élever la quantité à la  $m^{\text{ème}}$  puissance, c'est la multiplier  $m-1$  fois par elle-même; donc, d'après la règle de la multiplication, il faut ajouter  $m-1$  fois à lui-même l'exposant de chaque lettre, ou le multiplier par  $m$ .

Ainsi,  $(a^{\frac{2}{3}})^5 = a^{\frac{10}{3}}; (a^{\frac{2}{3}})^3 = a^{\frac{6}{3}} = a^2,$

$$(2a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{4}})^6 = 64a^{-3} b^{\frac{9}{2}}; (a^{-\frac{1}{2}})^{10} = a^{-5}.$$

*Extraction des racines.* Pour extraire la racine  $n^{\text{ème}}$  d'un monome, il faut, en suivant la règle du n° 167, diviser l'exposant de chaque lettre par l'indice  $n$  de la racine.

En effet, l'exposant de chaque lettre dans le résultat, doit

être tel que, multiplié par l'indice  $n$  de la racine à extraire, il reproduise l'exposant dont la lettre est affectée dans le monome proposé; donc les exposans, dans le résultat, doivent être respectivement égaux aux quotiens de la division des exposans, dans le monome proposé, par l'indice  $n$  de la racine.

$$\text{Ainsi, } \sqrt[n]{a^{\frac{a}{n}}} = a^{\frac{a}{n^2}}; \quad \sqrt[n]{a^{\frac{b}{n}}} = a^{\frac{b}{n^2}}; \quad \sqrt[n]{a^{-\frac{c}{n}}} = a^{-\frac{c}{n^2}};$$

$$\sqrt[n]{a^{\frac{a}{n}} b^{-\frac{b}{n}}} = a^{\frac{a}{n^2}} b^{-\frac{b}{n^2}} \dots$$

Les trois dernières règles ont été facilement déduites de la règle relative à la multiplication; mais on pourrait les démontrer directement, en remontant à l'origine des quantités affectées d'exposans quelconques.

Nous terminerons par une opération qui renferme implicitement les deux précédentes, quant à la démonstration.

Soit  $a^{\frac{m}{n}}$  à élever à la puissance  $-\frac{r}{s}$ ; il faut prouver que l'on a

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n} \times -\frac{r}{s}} = a^{-\frac{mr}{ns}}.$$

En effet, si l'on remonte à l'origine de ces notations, on trouve que

$$\begin{aligned} \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{r}{s}} &= \sqrt[s]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{r}{s}}} = \sqrt[s]{\frac{1}{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}}}} = \sqrt[s]{\frac{1}{(\sqrt[n]{a^m})^r}} = \sqrt[s]{\frac{1}{\sqrt[n]{a^{mr}}}} \\ &= \sqrt[s]{\sqrt[n]{\frac{1}{a^{mr}}}} = \sqrt[s]{a^{-\frac{mr}{n}}} = a^{-\frac{mr}{ns}}. \end{aligned}$$

L'avantage que présente l'emploi des exposans de nature quelconque, consiste principalement en ce que le calcul de ces sortes d'expressions n'exige pas d'autres règles que celles qui ont été établies pour le calcul des quantités affectées d'exposans entiers.

En outre, ces calculs se réduisent à de simples opérations sur les fractions, opérations avec lesquelles nous sommes déjà très familiers.

181. *Remarque.* Nous serons, dans la suite, conduits par la résolution de certaines questions, à considérer des quantités affectées d'exposans incommensurables. Or, les règles que nous venons d'établir pour le cas où les exposans sont commensurables, sembleraient devoir être aussi démontrées dans le cas d'exposans incommensurables; mais observons qu'un nombre incommensurable, tel que  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt[3]{11}$ , est, par sa nature, composé d'une partie entière et d'une fraction qui ne peut être exprimée exactement, mais dont il est possible d'approcher autant que l'on veut; en sorte que l'on peut toujours concevoir le nombre incommensurable remplacé par un nombre fractionnaire exact, qui n'en diffère que d'une quantité moindre qu'aucune grandeur donnée; et, en appliquant les règles au symbole qui désigne le nombre incommensurable, il faut sous-entendre qu'on les applique au nombre fractionnaire exact qui le représente approximativement. En définitive, dans les applications numériques, on ne peut se former d'idée d'un nombre incommensurable, que lorsqu'il est remplacé par un nombre fractionnaire exact, qui en exprime une valeur plus ou moins approchée.

Ainsi, nous pouvons conclure que les règles précédentes sont applicables, même au cas où les exposans sont incommensurables.

*Démonstration du binôme de Newton, dans le cas d'un exposant quelconque.*

182. Puisque l'on doit étendre au calcul des exposans quelconques les règles du calcul des exposans entiers et positifs, il est assez naturel de penser que la formule du binôme, qui sert à développer la  $n^{\text{ième}}$  puissance d'un binôme,  $m$  étant un exposant entier et positif, peut également servir lorsque  $m$  est un

exposant quelconque. C'est, en effet, ce que les analystes ont reconnu, et ils ont déduit de là des conséquences importantes, tant pour l'extraction des racines par approximation, que pour le développement des expressions algébriques en séries.

Nous donnerons la démonstration d'Euler (un peu modifiée), qui est, sans contredit, la plus remarquable par son élégance et par la simplicité des calculs qu'elle exige.

Avant tout, remarquons que le binôme  $x + a$  peut être mis sous la forme...  $x \left(1 + \frac{a}{x}\right)$ ; d'où il résulte

$$(x + a)^m = x^m \left(1 + \frac{a}{x}\right)^m = x^m (1 + z)^m, \text{ en faisant } \frac{a}{x} = z.$$

Si donc l'exactitude de la formule

$$(1 + z)^m = 1 + mz + m \frac{m-1}{2} z^2 + m \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} z^3 + \text{etc.},$$

peut être constatée, quel que soit  $m$ , comme en y remplaçant  $z$  par  $\frac{a}{x}$ , et multipliant par  $x^m$ , on obtient

$$(x + a)^m = x^m \left(1 + m \frac{a}{x} + m \frac{m-1}{2} \frac{a^2}{x^2} + \text{etc.}\right),$$

ou bien, effectuant les calculs,

$$(x + a)^m = x^m + m a x^{m-1} + m \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} + \dots,$$

on pourra regarder cette dernière formule comme démontrée généralement.

Cela posé, lorsque  $m$  est entier, il est reconnu que l'on a

$$(1 + z)^m = 1 + mz + m \frac{m-1}{2} z^2 + m \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} z^3 + \text{etc.};$$

mais,  $m$  étant un nombre fractionnaire positif  $\frac{p}{q}$ , on ignore de quelle expression algébrique provient le développement

$$1 + mz + m \cdot \frac{m-1}{2} z^2 + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} z^3 + \dots$$

Désignons cette expression inconnue par  $y$ ; on a l'équation

$$y = 1 + mz + m \cdot \frac{m-1}{2} z^2 + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} z^3 + \text{etc.} \dots (1).$$

Soit  $m'$  un autre exposant fractionnaire positif; on aura de même

$$y' = 1 + m'z + m' \cdot \frac{m'-1}{2} z^2 + m' \cdot \frac{m'-1}{2} \cdot \frac{m'-2}{3} z^3 + \dots (2).$$

Multiplions maintenant les égalités (1) et (2) membre à membre; on aura d'abord  $yy'$  pour le premier membre. Quant au second, il serait très difficile d'en obtenir la véritable forme, d'après la règle ordinaire de la multiplication des polynômes, si l'on n'observait que la forme d'un produit (n° 20) ne dépend aucunement des valeurs particulières des lettres qui entrent dans les deux facteurs de la multiplication. Par conséquent, le produit ci-dessus doit avoir la même forme que dans le cas où  $m$  et  $m'$  sont des nombres entiers et positifs. Or, on sait que, dans ce cas, on a

$$1 + mz + m \cdot \frac{m-1}{2} z^2 + \dots = (1+z)^m,$$

$$1 + m'z + m' \cdot \frac{m'-1}{2} z^2 + \dots = (1+z)^{m'},$$

d'où

$$\begin{aligned} & \left(1 + mz + m \cdot \frac{m-1}{2} z^2 + \dots\right) \left(1 + m'z + m' \cdot \frac{m'-1}{2} z^2 + \dots\right) \\ &= (1+z)^{m+m'} = 1 + (m+m')z + (m+m') \cdot \frac{(m+m'-1)}{2} z^2 + \dots; \end{aligned}$$

donc, cette forme que l'on vient d'obtenir convient également au cas où  $m$  et  $m'$  sont quelconques, et l'on a alors

$$yy' = 1 + (m+m')z + (m+m') \cdot \frac{(m+m'-1)}{2} z^2 + \dots (3);$$



Soit  $m$  un troisième exposant, fractionnaire positif, et posons

$$y' = 1 + m'z + m'' \frac{m'-1}{2} z^2 + \dots$$

Multipliant cette équation par la précédente, on trouve de même,

$$yy' = 1 + (m+m'+m'')z + (m+m'+m'') \frac{(m+m'+m''-1)}{2} z^2 + \dots$$

En général, soit  $m = \frac{p}{q}$ , et considérons un nombre  $q$  d'exposants  $m, m', m'', m'''$ , de même espèce; on a, en faisant, pour plus de simplicité,  $r = m + m' + m'' + m''' \dots$ , on a, dis-je,

$$yy'y' \dots = 1 + rz + r \cdot \frac{r-1}{2} z^2 + r \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r-2}{3} z^3 + \dots \quad (4).$$

Supposons actuellement  $m = m' = m'' = m''' \dots$ ; d'où  $r = mq$ ; l'équation (4) devient

$$y^q = 1 + mq \cdot z + mq \cdot \frac{mq-1}{2} z^2 + mq \cdot \frac{mq-1}{2} \cdot \frac{mq-2}{3} z^3 + \dots$$

Or, par hypothèse,  $m = \frac{p}{q}$ , d'où  $mq = p$ ; donc

$$y^q = 1 + pz + p \frac{p-1}{2} z^2 + p \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} z^3 + \dots;$$

mais  $p$  est un nombre entier; ainsi le second membre de cette équation est le développement de  $(1+z)^p$ , ce qui donne la relation

$$y^q = (1+z)^p, \text{ d'où } y = (1+z)^{\frac{p}{q}} = (1+z)^m;$$

donc enfin

$$(1+z)^m = 1 + mz + m \frac{m-1}{2} z^2 + m \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} z^3 + \dots,$$

$m$  étant un nombre fractionnaire positif quelconque.

Pour démontrer cette formule, dans le cas où  $m$  est négatif, entier ou fractionnaire, il suffit de poser dans l'équation (3), obtenue au moyen des équations (1) et (2), de poser, dis-je,  $m' = -m$ , ce qui, à cause de la relation  $m + m' = 0$ , réduit

l'équation (3) à  $yy' = 1$ ; d'où l'on tire  $y = \frac{1}{y'}$ .

Mais puisque, par hypothèse,  $m$  est négatif,  $m'$  ou  $-m$  est nécessairement positif, et l'on a

$$y' = (1+z)^{m'}; \text{ d'où } y = \frac{1}{(1+z)^{m'}} = (1+z)^{-m'} = (1+z)^m,$$

et par conséquent,

$$(1+z)^m = 1 + mz + m \frac{m-1}{2} z^2 + \dots$$

183. *Application de la formule du binôme à l'extraction des racines par approximation.*

Dans la formule

$$(x+a)^m =$$

$$x^m \left( 1 + m \cdot \frac{a}{x} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{a^3}{x^3} + \dots \right),$$

posons  $m = \frac{1}{n}$ ; il vient  $(x+a)^{\frac{1}{n}}$  ou  $\sqrt[n]{x+a} =$

$$x^{\frac{1}{n}} \left( 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{a}{x} + \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{1}{n}-1}{2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{1}{n}-1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{n}-2}{3} \cdot \frac{a^3}{x^3} + \dots \right),$$

ou réduisant,

$$\sqrt[n]{x+a} =$$

$$x^{\frac{1}{n}} \left( 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{a}{x} - \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{3n} \cdot \frac{a^3}{x^3} + \dots \right).$$

( Si l'on voulait former un nouveau terme, il suffirait évi-

demment de multiplier le quatrième par  $\frac{3n-1}{4n}$  et par  $\frac{a}{x}$ , puis de changer le signe, et ainsi de suite.)

Cela posé, soit à extraire la racine cubique de 31. Le plus grand cube contenu dans 31 étant 27, faisons, dans la formule ci-dessus,  $n=3$ ,  $x=27$ , et  $a=4$ , ce qui donne

$$\sqrt[3]{31} = \sqrt[3]{27+4} = 27^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{4}{27}\right)^{\frac{1}{3}};$$

il vient

$$\sqrt[3]{31} = 3 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{27} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{729} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{64}{19683} - \text{etc.}\right);$$

ou bien, effectuant les calculs,

$$\sqrt[3]{31} = 3 + \frac{4}{27} - \frac{16}{2187} + \frac{320}{531441} - \dots$$

Le terme suivant s'obtiendrait, d'après ce qui a été dit ci-dessus, en multipliant  $\frac{320}{531441}$  par  $\frac{3n-1}{4n} \cdot \frac{a}{x}$ , ou  $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{27}$ , et changeant le signe, ce qui donnerait  $-\frac{2560}{43046721}$ .

On trouverait de même, pour le terme qui suit ce dernier,

$$+ \frac{2560}{43046721} \times \frac{4n-1}{5n} \cdot \frac{a}{x} = \frac{2560}{43046721} \times \frac{11}{15} \times \frac{4}{27} = \frac{112640}{17433922005};$$

et ainsi de suite.

Mais ne considérons que les cinq premiers termes de la série, et réduisons en décimales; on obtient d'abord, pour les termes

$$\left. \begin{array}{l} \text{additifs.....} \\ 3 = 3,00000 \\ \frac{4}{27} = 0,14815 \\ \frac{320}{531441} = 0,00060 \end{array} \right\} = 3,14875,$$

et pour la somme des termes soustractifs,

$$\left. \begin{aligned} -\frac{16}{2187} &= -0,00731 \\ -\frac{2560}{43046721} &= -0,00006 \end{aligned} \right\} = -0,00737$$

Donc

$$\sqrt[3]{31} = 3,14138;$$

nous prouverons tout à l'heure que ce résultat est exact à 0,00001 près.

184. *Remarque.* Lorsque l'expression d'un nombre est développée en une suite de termes dont les valeurs numériques vont en décroissant continuellement, on conçoit qu'en général, plus on prend de termes dans la série, plus on approche de la vraie valeur du nombre proposé. Si, en outre, on suppose que les termes soient *alternativement positifs et négatifs*, on peut, en s'arrêtant à un terme de rang quelconque, déterminer d'une manière précise le *degré d'approximation obtenu*.

En effet, soit une suite indéfinie de termes,  $a-b+c-d+e-f+\dots$ , dans laquelle on suppose que  $a, b, c, d, \dots$  sont des quantités absolues de plus en plus petites; et désignons par  $x$  le nombre représenté par cette série.

Je dis d'abord que la valeur numérique de  $x$  est comprise entre deux sommes consécutives quelconques de termes de la série. Car prenons au hasard les deux sommes consécutives

$$a-b+c-d+e-f, \text{ et } a-b+c-d+e-f+g;$$

considérons la première, et observons que les termes qui suivent  $-f$ , sont  $+g-h+k-l+\dots$ ; mais puisque la série est décroissante, les différences partielles  $g-h, k-l, \dots$  sont des nombres positifs; d'où il suit que, pour obtenir la valeur complète de  $x$ , il faut ajouter à la somme  $a-b+c-d+e-f$ , un certain nombre absolu. On a donc déjà

$$a-b+c-d+e-f < x$$

Quant à la seconde, les termes qui suivent  $+g$ , sont,  $\dots -h+k-l+m, \dots$ ; or, les différences partielles  $-h+k,$

$-l+m, \dots$  sont négatives; d'où l'on voit que, pour avoir la vraie valeur de  $x$ , il faut ajouter à la somme  $a-b+c-d+e-f+g$  une quantité négative, c'est-à-dire diminuer cette somme. On a donc

$$a-b+c-d+e-f+g > x.$$

Donc  $x$  est compris entre ces deux sommes.

*Conséquence.* Comme la valeur numérique de la différence entre ces deux sommes est évidemment  $g$ , il s'ensuit que l'erreur commise, lorsqu'on prend un certain nombre de termes  $a-b+c-d+e-f$ , pour la valeur de  $x$ , est NUMÉRIQUEMENT moindre que le terme qui suit immédiatement celui auquel on s'est arrêté.

Ainsi, dans l'application du numéro précédent, tous les termes étant alternativement positifs et négatifs, à partir du second, on peut conclure que la valeur numérique de la somme des cinq premiers termes,

$$3 + \frac{4}{27} - \frac{16}{2187} + \frac{320}{531441} - \frac{2560}{43046721},$$

diffère de  $\sqrt[3]{31}$  d'une quantité moindre que la valeur du 6<sup>e</sup> terme, que l'on a trouvé (n° 183) égal à  $\frac{112640}{17433922005}$ ; or, cette fraction est, d'après sa seule inspection, au-dessous de  $\frac{1}{100000}$ ; donc  $\sqrt[3]{31} = 3,14138$  à 0,00001 près, ce que l'on pourrait vérifier par le procédé (n° 162), mais par des calculs plus laborieux que les précédents.

185. Voici en quoi consiste le procédé pour extraire approximativement la racine  $n^{\text{ième}}$  d'un nombre  $N$ , par le moyen des séries. Décomposez  $N$  en deux parties  $p^a + q$ ,  $p$  étant la racine de  $N$  obtenue à une unité près (n° 160), et faites dans le

développement de  $\sqrt[n]{x+a}$  (n° 183),  $x = p^a$ ,  $a = q$ . Effectuez les calculs, en vous arrêtant au terme dont le suivant soit, d'après son inspection, au-dessous de l'unité de l'ordre décimal qui

détermine l'approximation ; convertissez en décimales tous les termes dont vous avez tenu compte, et opérez la réduction des termes additifs et soustractifs.

Cette méthode n'est bien avantageuse qu'autant que  $\frac{q}{p^n}$  est une fraction assez petite ; car autrement, les termes de la série ne diminueraient pas très rapidement, et il faudrait un grand nombre de termes pour donner le degré d'approximation désiré, ce qui entraînerait dans des calculs extrêmement laborieux.

Il y a même un cas où l'on est obligé de modifier la marche précédente, c'est celui où l'on a  $p^n < q$  ; car alors  $\frac{a}{x}$  ou  $\frac{q}{p^n}$  est plus grand que l'unité, ainsi que toutes les puissances de  $\frac{a}{x}$  qui augmentent de plus en plus, numériquement, à mesure que le degré de la puissance augmente.

Soit, par exemple, 56 le nombre dont on demande la racine 3<sup>me</sup> ; 27 étant le plus grand cube contenu dans 56, on aurait

$$x = 27, \quad a = 29; \quad \text{d'où} \quad \frac{a}{x} = \frac{29}{27};$$

et les termes de la série augmenteraient au lieu de diminuer (nous ne parlerons pas des coefficients, qui sont des fractions peu différentes de l'unité). Mais observons que l'on peut aussi décomposer 56 en  $64 - 8$ , ou  $4^3 - 8$  ; or,  $\frac{8}{64}$  ou  $\frac{1}{8}$ , est une très petite fraction.

D'un autre côté, si dans l'expression de  $\sqrt[n]{x+a}$  (n° 183), on met  $-a$  à la place de  $a$ , il vient

$$\sqrt[n]{x-a} = x^{\frac{1}{n}} \left( 1 - \frac{1}{n} \frac{a}{x} - \frac{1}{n} \frac{n-1}{2n} \frac{a^2}{x^2} - \frac{1}{n} \frac{n-1}{2n} \frac{2n-1}{3n} \frac{a^3}{x^3} - \dots \right)$$

Posant donc  $x = 64$ ,  $a = 8$ , on obtiendra une série de termes qui décroîtront très rapidement.

A la vérité, tous les termes, à l'exception du premier, sont négatifs, et l'on ne peut appliquer à la série ce qui a été dit (n° 184) sur la manière de fixer le degré d'approximation que donne la somme d'un certain nombre de termes. Mais alors, on tient compte d'un nombre de termes tel, que le suivant soit, par exemple, au-dessous du *dixième* de l'unité décimale à laquelle on veut arrêter l'approximation.

On pourra s'exercer sur les exemples suivans :

$$\sqrt[5]{39} = \sqrt[5]{32 + 7} = 2,0807 \text{ à } 0,0001 \text{ près;}$$

$$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{64 + 1} = 4,02073 \text{ à } 0,00001 \text{ près;}$$

$$\sqrt[4]{260} = \sqrt[4]{256 + 4} = 4,01553 \text{ à } 0,00001 \text{ près;}$$

$$\sqrt[7]{108} = \sqrt[7]{128 - 20} = 1,95204 \text{ à } 0,00001 \text{ près.}$$

186. La formule du binôme sert aussi à développer les expressions algébriques en séries.

Soit, pour premier exemple, l'expression  $\frac{1}{1-z}$ ; on a

$$\frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1}.$$

Posons dans la formule  $(1+z)^m = 1 + mz + \text{etc.}$ ,  
 $m = -1$ , et changeons  $z$  en  $-z$ ; il vient

$$\begin{aligned} (1-z)^{-1} &= 1 - 1 \cdot (-z) + 1 \cdot \frac{-1-1}{2} \cdot (-z)^2 \\ &\quad - 1 \cdot \frac{-1-1}{2} \cdot \frac{-1-2}{3} \cdot (-z)^3 + \dots, \end{aligned}$$

ou effectuant les calculs et observant que chaque terme se compose d'un nombre pair de facteurs affectés du signe  $-$ ,

$$(1-z)^{-1} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots$$

On parviendrait au même résultat, en appliquant le procédé de la division algébrique (n° 26).

Voici le tableau des calculs :

|                          |   |         |                                         |
|--------------------------|---|---------|-----------------------------------------|
| 1 <sup>re</sup> reste... | + | $z$     | $1 - z$                                 |
| 2 <sup>e</sup> .....     | + | $z^2$   | $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots$ |
| 3 <sup>e</sup> .....     | + | $z^3$   |                                         |
| 4 <sup>e</sup> .....     | + | $z^4$   |                                         |
|                          | + | $\dots$ |                                         |

Soit encore l'expression  $\frac{2}{(1-z)^3}$  ou  $2(1-z)^{-3}$ .

On a

$$2(1-z)^{-3} = 2[1 - 3(-z) + 3 \cdot \frac{-3-1}{2}(-z)^2 - 3 \cdot \frac{-3-1}{2} \cdot \frac{-3-2}{3}(-z)^3 + \dots];$$

ou effectuant les calculs et réduisant,

$$2(1-z)^{-3} = 2(1 + 3z + 6z^2 + 10z^3 + 15z^4 + \dots).$$

Prenons pour dernier exemple, la quantité  $\sqrt[3]{2z - z^2}$ , qui revient à  $\sqrt[3]{2z} \left(1 - \frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ .

On a d'abord

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \\ & 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{3}-1}{2} \cdot \left(-\frac{z}{2}\right)^2 + \dots = \\ & 1 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{36}z^2 - \frac{5}{648}z^3 - \text{etc.}; \end{aligned}$$

$$\text{donc, } \sqrt[3]{2z - z^2} = \sqrt[3]{2z} \left(1 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{36}z^2 - \frac{5}{648}z^3 - \text{etc.}\right)$$

### § V. Méthode des coefficients indéterminés. Notions sur les séries récurrentes.

187. Les algébristes ont inventé une autre méthode pour développer les expressions algébriques en séries; qui est en général



plus simple que celles dont nous venons de parler, et qui d'ailleurs est beaucoup plus féconde, en ce qu'elle s'applique à des expressions algébriques d'une nature quelconque.

Pour donner une première idée de cette méthode, nous nous proposerons de développer l'expression  $\frac{a}{a' + b'x}$ , en une série qui procède suivant les puissances ascendantes de  $x$ . Il est visible que ce développement est possible; car  $\frac{a}{a' + b'x}$  revient à  $a(a' + b'x)^{-1}$ ; et, en appliquant la formule du binôme, on obtiendrait évidemment une suite de termes procédant suivant les puissances ascendantes de  $x$ . Posons donc

$$\frac{a}{a' + b'x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \dots \quad (1),$$

$A, B, C, D, \dots$  étant des coefficients, fonctions de  $a, a', b'$ , mais indépendans de  $x$ , coefficients qu'il s'agit d'ailleurs de déterminer, et que, par cette raison, l'on appelle *coefficients indéterminés*. (Cette dénomination est impropre, d'après le sens attribué jusqu'ici au mot *indéterminé*; il vaudrait mieux dire *coefficients à déterminer*; mais nous nous conformerons à l'usage.)

Pour parvenir à la détermination de ces coefficients, multiplions les deux membres de l'équation (1) par  $a' + b'x$ ; on trouve, en ordonnant par rapport à  $x$ , et transposant le terme  $a$ ,

$$0 = \left\{ \begin{array}{l|l|l|l|l} \Lambda a' + Ba' & x + Ca' & x^2 + Da' & x^3 + Ea' & x^4 + \dots \\ -a + Ab' & +Bb' & +Cb' & +Db' & \end{array} \right. \quad (2).$$

Remarquons maintenant que, si l'on suppose les valeurs de  $A, B, C, D, \dots$  convenablement déterminées, l'équation (1) doit se vérifier, quelque valeur que l'on donne à  $x$ ; ainsi il en est de même de l'équation (2).

Or, lorsqu'on suppose  $x = 0$ , celle-ci devient  $0 = \Lambda a' - a$ , d'où l'on déduit la valeur de  $A$ ,

$$\Lambda = \frac{a}{a'}.$$

A étant égal à  $\frac{a}{a'}$ , quand on a  $x=0$ , doit conserver la même valeur lorsque  $x$  est quelconque, puisque, par hypothèse, A est indépendant de  $x$ ; ainsi, quel que soit  $x$ , l'équation (2) se réduit à

$$0 = \left\{ \begin{array}{c|c|c} Ba' & x+Ca' & x^2+Da' \\ +Ab' & +Bb' & +Cb' \end{array} \right\} x^3 + \dots, \text{ ou divisant par } x,$$

$$0 = \left\{ \begin{array}{c|c|c} Ba' & +Ca' & x+Da' \\ +Ab' & +Bb' & +Cb' \end{array} \right\} x^2 + \dots \quad (3).$$

Cette équation devant encore se vérifier pour toute valeur de  $x$ , faisons  $x=0$ ; il en résulte  $Ba' + Ab' = 0$ ,  
d'où l'on tire

$$B = -\frac{Ab'}{a'}, \text{ ou bien, } B = \frac{a}{a'} \times -\frac{b'}{a} = -\frac{ab'}{a'}.$$

Comme B doit conserver cette même valeur, quel que soit  $x$ , supprimons dans (3) le premier terme  $Ba' + Ab'$ , qui s'annule par cette valeur de B, et divisons par  $x$ ; il vient

$$0 = \left\{ \begin{array}{c|c|c} Ca' + Da' & x+Ea' & x^2 + \dots \\ +Bb' + Cb' & +Db' & \end{array} \right\}$$

Faisons de nouveau  $x=0$ ; il en résulte  $Ca' + Bb' = 0$ ,

$$\text{d'où l'on déduit } C = -\frac{Bb'}{a'}, \text{ ou bien } C = -\frac{ab'}{a'^2} \times -\frac{b'}{a} = \frac{ab'^2}{a'^3}.$$

On trouverait de même,  $\dots \dots \dots Da' + Cb' = 0$ ,

$$\text{d'où } D = -\frac{Cb'}{a'}, \text{ ou } D = \frac{ab'^2}{a'^3} \times -\frac{b'}{a} = -\frac{ab'^3}{a'^4};$$

et ainsi de suite.

Il est aisé de reconnaître qu'un coefficient quelconque se forme au moyen de celui qui le précède, en le multipliant par  $-\frac{b'}{a}$ ; ainsi l'on a

$$\frac{a}{a' + b'x} = \frac{a}{a'} - \frac{ab'}{a'^2}x + \frac{ab'^2}{a'^3}x^2 - \frac{ab'^3}{a'^4}x^3 + \frac{ab'^4}{a'^5}x^4 - \dots$$

188. En réfléchissant sur les raisonnemens qui précèdent, on voit que le principe fondamental de la méthode des coefficients indéterminés consiste en ce que, *si une équation de la forme*  $0 = M + Nx + Px^2 + Qx^3 + \dots$  ( $M, N, P, \dots$  étant des coefficients indépendans de  $x$ ), *doit se vérifier quelque valeur que l'on donne à  $x$ , il est nécessaire que chacun des coefficients soit séparément égal à 0.*

En effet, puisque ces coefficients sont indépendans de  $x$ , si l'on parvient à les déterminer d'après des hypothèses particulières faites sur  $x$ , ces valeurs seront celles qui leur conviennent, lorsqu'on suppose  $x$  quelconque. Or, en faisant  $x = 0$ , on trouve  $M = 0$ , et l'équation se réduit, après la division par  $x$ , à

$$0 = N + Px + Qx^2 + \dots;$$

faisant, dans cette nouvelle équation,  $x = 0$ , on trouve  $N = 0$ , et l'équation se réduit, lorsqu'on a divisé par  $x$ , à  $0 = P + Qx + \dots$ , et ainsi de suite. On a donc séparément

$$M = 0, N = 0, P = 0, Q = 0. \dots;$$

on obtient par ce moyen autant d'équations qu'il y a de coefficients  $A, B, C, D, \dots$  à déterminer.

Ce principe s'énonce encore d'une autre manière :

*Si une équation de la forme*

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + \dots$$

*doit se vérifier, quelque valeur que l'on donne à  $x$ , les termes affectés d'une même puissance, dans les deux membres, sont respectivement égaux; car, après la transposition de tous les termes dans le second membre, l'équation est de même forme que ci-dessus, d'où l'on peut conclure ensuite*

$$a - a' = 0, b - b' = 0, c - c' = 0. \dots,$$

et par conséquent,

$$a' = a, b' = b, c' = c, d' = d. \dots$$

On donne (n° 42) le nom d'*équation identique* à toute équation

tion dont les termes sont ordonnés par rapport à une certaine lettre, et qui doit se vérifier pour toutes les valeurs attribuées à cette lettre, afin de la distinguer d'une *équation ordinaire*, c'est-à-dire d'une équation qui ne peut être satisfaite que par certaines valeurs attribuées à cette lettre.

189. La méthode des *coefficients indéterminés* exige encore que l'on connaisse *a priori* la forme du développement par rapport aux exposans de  $x$ . Ordinairement, on suppose que le développement procède suivant les diverses puissances ascendantes de  $x$ , à partir de la puissance  $x^0$ ; mais quelquefois cette forme n'est pas convenable, et la suite des calculs le fait reconnaître.

Soit, par exemple, à développer l'expression  $\frac{1}{3x-x^2}$ .

$$\text{Posons } \frac{1}{3x-x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots,$$

d'où, chassant les dénominateurs et ordonnant,

$$0 = -1 + 3Ax + 3B \mid x^2 + 3C \mid x^3 + 3D \mid x^4 + \dots, \\ \quad \quad \quad -A \mid \quad -B \mid \quad -C \mid$$

d'où l'on devrait conclure (n° 188)

$$-1 = 0, \quad 3A = 0, \quad 3B - A = 0, \dots$$

Or la première équation  $-1 = 0$  est absurde, et indique que la forme ci-dessus ne convient pas à l'expression  $\frac{1}{3x-x^2}$ ;

mais si l'on met cette expression sous la forme  $\frac{1}{x} \times \frac{1}{3-x}$ , et que l'on pose

$$\frac{1}{x} \times \frac{1}{3-x} = \frac{1}{x} (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots);$$

il viendra, toute réduction faite,

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} 3A + 3B \mid x + 3C \mid x^2 + 3D \mid x^3 + \dots \\ -1 - A \mid \quad -B \mid \quad -C \mid \end{array} \right.$$

ce qui donne les équations

$$3A - 1 = 0, \quad 3B - A = 0, \quad 3C - B = 0, \dots,$$

d'où l'on tire successivement

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{9}, \quad C = \frac{1}{27}, \quad D = \frac{1}{81} \dots$$

$$\text{Donc, } \frac{1}{3x - x^3} = \frac{1}{x} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{9}x + \frac{1}{27}x^2 + \frac{1}{81}x^3 + \dots \right),$$

$$\text{ou bien, } \frac{1}{3x - x^3} = \frac{1}{3}x^{-1} + \frac{1}{9}x^0 + \frac{1}{27}x^1 + \frac{1}{81}x^2 + \dots,$$

c'est-à-dire que le développement renferme dans son expression un terme affecté d'un exposant négatif.

190. *Démonstration de la formule du binôme par la méthode des coefficients indéterminés.*

Pour faire juger de la fécondité de la méthode des coefficients indéterminés, nous allons donner une démonstration complète de la formule du binôme, fondée sur cette méthode.

Commençons par observer que  $(x + a)^m$  peut se mettre sous la forme  $x^m \left( 1 + \frac{a}{x} \right)^m$ , ou  $x^m(1 + y)^m$ , en faisant  $y = \frac{a}{x}$ ;

ainsi, il suffit de développer  $(1 + y)^m$ , quel que soit  $m$ .

Ceci admis, soit d'abord  $m$  égal à un nombre positif  $\frac{p}{q}$  ( $q$  pouvant être égal à 1, auquel cas l'exposant serait entier).

$$\text{Posons, } (1 + y)^{\frac{p}{q}} = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \dots \quad (1).$$

[On est conduit à donner cette forme au développement par la formation des premières puissances entières, et en observant que pour  $y = 0$ , le premier membre se réduit à 1, d'où il suit que la partie indépendante de  $y$ , dans le second membre, doit être égale à 1.]

Pour déterminer les coefficients  $A, B, C, D, \dots$ , remplaçons, dans l'équation (1),  $y$  par  $z$ ; il vient

$$(1+z)^{\frac{p}{q}} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \dots \quad (2).$$

$A, B, C, \dots$  ont ici évidemment les mêmes valeurs, puisqu'ils sont indépendants de toute valeur attribuée à  $y$ .

Retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on obtient

$$(1+y)^{\frac{p}{q}} - (1+z)^{\frac{p}{q}} = A(y-z) + B(y^2-z^2) + C(y^3-z^3) + D(y^4-z^4) + \dots \quad (3).$$

Faisons pour le moment  $(1+y)^{\frac{p}{q}} = u$ ,  $(1+z)^{\frac{p}{q}} = v$ ; il en résulte  $1+y = u^{\frac{q}{p}}$ ,  $1+z = v^{\frac{q}{p}}$ ; d'où  $y-z = u^{\frac{q}{p}} - v^{\frac{q}{p}}$ , et l'équation (3) devient

$$u^{\frac{p}{q}} - v^{\frac{p}{q}} = A(y-z) + B(y^2-z^2) + C(y^3-z^3) + D(y^4-z^4) + \dots \quad (4),$$

ou, divisant le premier membre par  $u^{\frac{p}{q}} - v^{\frac{p}{q}}$ , et le second par  $y-z$ , qui est égal à  $u^{\frac{q}{p}} - v^{\frac{q}{p}}$ ,

$$\frac{u^{\frac{p}{q}} - v^{\frac{p}{q}}}{u^{\frac{q}{p}} - v^{\frac{q}{p}}} = \frac{A(y-z) + B(y^2-z^2) + C(y^3-z^3) + D(y^4-z^4) + \dots}{y-z}.$$

Or, d'après le théorème (n° 31),  $u^{\frac{p}{q}} - v^{\frac{p}{q}}$  est divisible par  $u - v$ , et donne pour quotient,

$$u^{\frac{p}{q}-1} + v u^{\frac{p}{q}-2} + v^2 u^{\frac{p}{q}-3} + \dots + v^{\frac{p}{q}-1}.$$

De même,  $u^{\frac{q}{p}} - v^{\frac{q}{p}}$ ;  $u - v$  donne

$$u^{\frac{q}{p}-1} + v u^{\frac{q}{p}-2} + v^2 u^{\frac{q}{p}-3} + \dots + v^{\frac{q}{p}-1}.$$

D'un autre côté,  $y-z, y^2-z^2, y^3-z^3, y^4-z^4, \dots$  divisés par  $y-z$ , donnent pour quotients,

$$1, y+z, y^2+yz+z^2, y^3+yz^2+y^2z+z^3, \dots;$$

ainsi, l'équation (4) revient à

$$\frac{u^{\frac{p}{q}-1} + v u^{\frac{p}{q}-2} + v^2 u^{\frac{p}{q}-3} + \dots + v^{\frac{p}{q}-1}}{u^{\frac{q}{p}-1} + v u^{\frac{q}{p}-2} + v^2 u^{\frac{q}{p}-3} + \dots + v^{\frac{q}{p}-1}} = A + B(y+z) + C(y^2+yz+z^2) + D(y^3+yz^2+y^2z+z^3) + \dots$$

Faisons maintenant, dans cette dernière équation,  $y = z$ ,

d'où l'on déduit  $u = v$ , d'après les équations  $(1+y)^u = u$ ,  
 $(1+z)^v = v$ ; le premier membre devient  $\frac{P \cdot u^{p-1}}{q \cdot u^{p-1}}$  ou  $\frac{P \cdot u^p}{q \cdot u^p}$ .

Si l'on remet à la place de  $u$ , sa valeur  $(1+y)^u$ , ou...  
 $1+Ay+By^2+Cy^3+\dots$ , et à la place de  $v$  sa valeur  $1+y$ , ce  
 premier membre devient encore,  $\frac{P \cdot (1+Ay+By^2+Cy^3+\dots)^p}{q \cdot (1+y)^p}$ .

D'ailleurs, le second membre se réduit à

$$A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 + \dots;$$

on a donc la nouvelle équation

$$\frac{P \cdot (1+Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\dots)^p}{q \cdot (1+y)^p} = A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 + \dots$$

Chassant le dénominateur  $1+y$ , et effectuant les calculs,

$$\begin{aligned} \frac{P}{q} + \frac{P}{q} Ay + \frac{P}{q} By^2 + \frac{P}{q} Cy^3 + \frac{P}{q} Dy^4 + \dots = \\ A + 2B \mid y + 3C \mid y^2 + 4D \mid y^3 + 5E \mid y^4 + \dots \\ + A \mid + 2B \mid + 3C \mid + 4D \mid \end{aligned}$$

Comparant (n° 188) les deux membres de cette *équation identique*, terme à terme, on obtient les équations suivantes

$$\frac{P}{q} = A, \text{ d'où } A = \frac{P}{q}$$

$$\frac{P}{q} A = 2B + A, \quad 2B = A \left( \frac{P}{q} - 1 \right); \text{ donc } B = \frac{A \left( \frac{P}{q} - 1 \right)}{2},$$

$$\frac{P}{q} B = 3C + 2B, \quad 3C = B \left( \frac{P}{q} - 2 \right); \text{ donc } C = \frac{B \left( \frac{P}{q} - 2 \right)}{3},$$

$$\frac{P}{q} C = 4D + 3C, \quad 4D = C \left( \frac{P}{q} - 3 \right); \text{ donc } D = \frac{C \left( \frac{P}{q} - 3 \right)}{4};$$

et ainsi de suite.

La loi de formation des coefficients, les uns au moyen des autres, est manifeste. Soit  $N$  le coefficient qui en a  $n$  avant lui, et  $M$  celui qui le précède; on aurait évidemment,

$$\frac{p}{q} M = Nn + (n-1)M; \text{ d'où } N = \frac{M \left( \frac{p}{q} - n + 1 \right)}{n}.$$

En reprenant la démonstration précédente, on s'assurerait facilement qu'elle s'applique au cas où l'on a  $q = 1$ , c'est-à-dire au cas où l'exposant est entier.

Quant au cas où  $m$  est égal à un nombre fractionnaire négatif,  $-\frac{p}{q}$ , on suit absolument la même marche que précédemment; mais, parvenu à l'équation qui correspond à l'équation (4), savoir,

$$u^{-p} - v^{-p} = A(y-z) + B(y^2-z^2) + C(y^3-z^3) + \dots,$$

on remarque que  $u^{-p} - v^{-p} = \frac{1}{u^p} - \frac{1}{v^p} = \frac{v^p - u^p}{u^p v^p} = -\frac{u^p - v^p}{u^p v^p}$ ;

ainsi, en divisant le premier membre par  $u^p - v^p$ , et le second par  $y-z$ , qui est égal à  $u^p - v^p$ , on a

$$-\frac{1}{u^p v^p} \cdot \frac{u^p - v^p}{u^p - v^p} = \frac{A(y-z) + B(y^2-z^2) + \dots}{y-z},$$

ou, supprimant le facteur  $u-v$  et le facteur  $y-z$ ,

$$-\frac{1}{u^p v^p} \cdot \frac{u^{p-1} + v u^{p-2} + \dots + v^{p-1}}{u^{p-1} + v u^{p-2} + \dots + v^{p-1}} = A + B(y+z) + \dots;$$

faisant ensuite  $y=z$ , d'où  $u=v$ , on obtient

$$-\frac{1}{u^p} \cdot \frac{p u^{p-1}}{q u^{p-1}} = -\frac{p}{q} \cdot \frac{u^{-p}}{u^1} = A + 2By + 3Cy^2 + \dots$$

Le reste du calcul est absolument semblable à celui du cas précédent.

191. *Des séries récurrentes.* Le développement des frac-



tions algébriques rationnelles, par la méthode des coefficients indéterminés, donne lieu à des séries d'une nature particulière, connues sous le nom de *séries récurrentes*.

Nous avons déjà vu (n° 187) que l'expression  $\frac{a}{a'+b'x}$  a pour développement,  $\frac{a}{a'} - \frac{ab'}{a'^2}x + \frac{ab'^2}{a'^3}x^2 - \frac{ab'^3}{a'^4}x^3 + \dots$ , série dans laquelle on forme chaque terme au moyen du précédent, en multipliant celui-ci par  $-\frac{b'}{a'}x$ .

Cette propriété n'est pas particulière à la fraction proposée; elle appartient à toutes les fractions algébriques rationnelles, et elle consiste en ce que, toute fraction rationnelle en  $x$  réduite en série, donne lieu à une suite de termes dont chacun est égal à la somme algébrique d'un certain nombre de termes précédents, multipliés respectivement par certaines quantités qui sont constamment les mêmes dans toute l'étendue de la série.

L'ensemble des quantités constantes par lesquelles on doit multiplier un certain nombre de termes précédents, pour former un terme quelconque, s'appelle l'*échelle de relation* de la série.

Dans la série précédente, l'*échelle de relation* est  $-\frac{b'}{a'}x$ , et la série est dite une *série récurrente du premier ordre*.

Soit à développer en série l'expression  $\frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3}$ .

Posons  $\frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3} = A+Bx+Cx^2+Ex^3+Ex^4+\dots$ ;

d'où, chassant les dénominateurs et transposant,

$$0 = \begin{pmatrix} Aa' + Ba' & x + Ca' & x^2 + Da' & x^3 + Ea' & x^4 + \dots \\ -a + Ab' & + Bb' & + Cb' & + Db' & \\ -b & + Ac' & + Bc' & + Cc' & \\ & -c & + Ad' & + Bd' & \end{pmatrix}$$

ce qui donne les équations

$$Aa' - a = 0, \quad \text{d'où } A = \frac{a}{a'},$$

$$Ba' + Ab' - b = 0, \quad B = -\frac{b'}{a'}A + \frac{1}{a'}b = \frac{-ab' + ba'}{a'^2},$$

$$Ca' + Bb' + Ac' - c = 0, \quad C = -\frac{b'}{a'}B - \frac{c'}{a'}A + \frac{1}{a'}c,$$

$$\text{ou} \quad C = \frac{ab'^2 - ba'b' - aa'c' + ca'^2}{a'^3},$$

$$Da' + Cb' + Bc' + Ad' = 0, \quad D = -\frac{b'}{a'}C - \frac{c'}{a'}B - \frac{d'}{a'}A,$$

$$Ea' + Db' + Cc' + Bd' = 0, \quad E = -\frac{b'}{a'}D - \frac{c'}{a'}C - \frac{d'}{a'}B,$$

D'où l'on voit que les trois premiers coefficients s'obtiennent d'abord sans aucune loi; mais à partir du quatrième, chaque coefficient se forme de la somme des trois coefficients qui le précèdent, multipliés respectivement par  $-\frac{b'}{a'}$ ,  $-\frac{c'}{a'}$ ,  $-\frac{d'}{a'}$ , savoir,  $-\frac{b'}{a'}$  pour le coefficient qui précède immédiatement,

$-\frac{c'}{a'}$  pour celui qui précède de deux rangs, et  $-\frac{d'}{a'}$  pour celui qui précède de trois rangs; ainsi les coefficients A, B, C, D... forment déjà entre eux une *série récurrente* dont l'*échelle de relation* se compose de  $\left(-\frac{b'}{a'}, -\frac{c'}{a'}, -\frac{d'}{a'}\right)$ .

Il résulte de cette loi de formation des coefficients, que le quatrième terme de la série,  $Dx^3$ , est égal à

$$-\frac{b'}{a'}Cx^3 - \frac{c'}{a'}Bx^2 - \frac{d'}{a'}Ax^3,$$

$$\text{ou bien,} \quad -\frac{b'}{a'}x.Cx^2 - \frac{c'}{a'}x^2.Bx - \frac{d'}{a'}x^3.A.$$

On a de même, pour le terme  $Ex^4$ ,

$$-\frac{b'}{a'} Dx^4 - \frac{c'}{a'} Cx^4 - \frac{d'}{a'} Bx^4,$$

ou bien, 
$$-\frac{b'}{a'} x \cdot Dx^3 - \frac{c'}{a'} x^2 \cdot Cx^2 - \frac{d'}{a'} x^3 \cdot Bx;$$

et ainsi de suite.

Donc, chaque terme de la série demandée, à partir du quatrième, est égal à la somme des trois termes précédents, multipliés respectivement par  $\left(-\frac{b'}{a'} x, -\frac{c'}{a'} x^2, -\frac{d'}{a'} x^3\right)$ .

Quant aux trois premiers termes  $A + Bx + Cx^2$ , on les obtient en remplaçant  $A, B, C$  par leurs valeurs obtenues ci-dessus.

192 On divise les séries récurrentes en différents ordres, et l'ordre s'estime par le nombre de termes nécessaires pour former un terme quelconque. Ainsi, l'expression  $\frac{a}{a' + b'x}$  donne lieu à une série récurrente *du premier ordre*, dont l'échelle de relation est  $-\frac{b'}{a'} x$ .

L'expression  $\frac{a + bx}{a' + b'x + c'x^2}$  donnerait lieu à une série récurrente *du second ordre*, dont l'échelle de relation serait

$$\left(-\frac{b'}{a'} x, -\frac{c'}{a'} x^2\right).$$

La série obtenue dans le n° précédent est du troisième ordre. En général, une expression de la forme  $\frac{a + bx + cx^2 + \dots + kx^{n-1}}{a' + b'x + c'x^2 + \dots + k'x^n}$  donne naissance à une série récurrente *du n<sup>ième</sup> ordre*, dont l'échelle de relation est  $\left(-\frac{b'}{a'} x, -\frac{c'}{a'} x^2, \dots, -\frac{k'}{a'} x^n\right)$ .

N. B. Nous supposons ici que le degré de  $x$  soit moindre au numérateur qu'au dénominateur. S'il en était autrement, il faudrait d'abord faire la division, en ordonnant par rapport

aux puissances ascendantes de  $x$ , ce qui donnerait un certain quotient entier par rapport à  $x$ , plus une fraction semblable à la fraction ci-dessus.

Ainsi, soit l'expression  $\frac{1-x-3x^2+4x^3+x^4}{2-5x+3x^2-x^3}$ ,

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 - 3x^2 - x + 1 \\ + 7x^3 - 8x^2 + x \\ \hline + 13x^3 - 34x^2 + 15 \end{array} \left\} \begin{array}{l} -x^3 + 3x^2 - 5x + 2 \\ -x - 7 \end{array} \right.$$

En effectuant la division, on trouve pour quotient,  $-x-7$ , et pour fraction complétant ce quotient,

$$\frac{13x^3 - 34x^2 + 15}{-x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2}, \text{ ou } \frac{15 - 34x + 13x^2}{2 - 5x + 3x^2 - x^3}.$$

La propriété énoncée (n° 191) souffrirait d'ailleurs des modifications, si le numérateur était d'un degré plus élevé que celui du dénominateur.

Nous reviendrons, plus loin, sur ces sortes de séries, qui offrent plusieurs questions intéressantes.

## CHAPITRE VI.

### *Théories des Progressions et des Logarithmes.*

Ce nouveau chapitre se lie naturellement à celui qui précède, tant, parce que le premier paragraphe a pour objet l'examen des propriétés de deux espèces de séries, que parce qu'il offre une application immédiate de la théorie des exposans d'une nature quelconque; il complète aussi les connaissances algébriques absolument indispensables pour l'étude de la *Trigonométrie* et de l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie*.

## § 1<sup>er</sup>. Des Progressions par différence et par quotient.

### *Progressions par différence.*

193. On appelle *progression arithmétique* ou *par différence*, une suite de termes dont chacun surpasse celui qui le précède, ou en est surpassé d'une quantité constante, que l'on appelle *raison* ou *différence* de la progression.

Ainsi, soient les deux suites

$$\begin{array}{l} 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, \dots \\ 60, 56, 52, 48, 44, 40, 36, 32, 28, \dots \end{array}$$

La première est dite une *progression croissante*, dont la *raison* est 3, et la seconde une *progression décroissante*, dont la *raison* est 4.

Désignons en général par  $a, b, c, d, e, f, \dots$  les termes d'une progression par différence; on est convenu de l'écrire ainsi :

$$\div a.b.c.d.e.f.g.h.i.k. \dots$$

et on l'énonce de cette manière,  $a$  est à  $b$  comme  $b$  est à  $c$ , comme  $c$  est à  $d$ , comme  $d$  est à  $e$ . . . , ou, pour abrégér,  $a$  est à  $b$  est à  $c$  est à  $d$  est à  $e$ . . . C'est une suite d'*équidifférences continues*, dans laquelle chaque terme est à la fois conséquent et antécédent, à l'exception du premier terme, qui n'est qu'*antécédent*, et du dernier, qui n'est que *conséquent*.

194. Appelons  $r$  la *raison* de la progression, que nous supposerons croissante, dans tout ce qui va suivre. (Si elle était décroissante, il suffirait de changer  $r$  en  $-r$  dans les résultats.)

Cela posé, on a évidemment, d'après la définition de la progression,

$$b = a + r, c = b + r = a + 2r, d = c + r = a + 3r, \dots;$$

et, en général, un terme de rang quelconque est égal au premier, plus autant de fois la *raison* qu'il y a de termes avant

celui que l'on considère. Ainsi, soient  $l$  ce terme et  $n$  le nombre total des termes, jusqu'à celui-ci inclusivement; on a pour l'expression de ce terme général,  $l = a + (n - 1)r$ .

En effet, si l'on suppose successivement  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ , on retrouve le premier, second, troisième..... terme de la progression.

Si la progression était décroissante, on aurait au contraire

$$l = a - (n - 1)r.$$

La formule  $l = a + (n - 1)r$  sert à donner l'expression d'un terme de rang quelconque, sans que l'on soit obligé de déterminer tous ceux qui le précèdent.

Ainsi, que l'on demande le 50<sup>e</sup> terme de la progression

$$\div 1.4.7.10.13.16.19. \dots$$

On a, en faisant  $n = 50$ ,  $l = 1 + 49.3 = 148$ .

195. Une progression par différence étant donnée, on peut se proposer de déterminer la somme d'un certain nombre de termes.

Soit la progression  $\div a.b.c.d.e.f. \dots i.k.l$ , prolongée jusqu'au terme  $l$  inclusivement, et soient  $n$  le nombre des termes,  $r$  la raison.

Commençons par observer que, si  $x$  désigne un terme qui en a  $p$  avant lui, et  $y$  un terme qui en a  $p$  après lui, on a,

$$\begin{aligned} \text{d'après ce qui vient d'être dit, les égalités} \quad x &= a + p \times r, \\ y &= l - p \times r; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en les ajoutant.  $\dots x + y = a + l$ ;

ce qui démontre que, dans toute progression, la somme de deux termes quelconques pris à égale distance des extrêmes est égale à la somme des extrêmes; ou bien encore, les deux extrêmes, et deux termes pris à égale distance de ces extrêmes, forment une équidifférence (dans l'ordre où ils sont écrits).

Ceci admis, concevons que l'on ait écrit la progression au-dessous d'elle-même, mais dans un ordre inverse, en sorte que l'on ait

$$\div a.b.c.d.e.f. \dots i.k.l,$$

$$\div l.k.i. \dots \dots \dots c.b.a.$$

Appelons  $S$  la somme des termes de la première progression,  $2S$  sera la somme des termes des deux progressions; et l'on aura, en réunissant les termes, par colonne verticale,

$$2S = (a + l) + (b + k) + (c + i) + \dots + (i + c) + (k + b) + (l + a);$$

ou bien, comme toutes les parties  $a + l$ ,  $b + k$ ,  $c + i \dots$ , sont égales et en nombre  $n$ ,

$$2S = (a + l)n; \text{ donc enfin } S = \frac{(a + l)n}{2};$$

c'est-à-dire que la somme des termes d'une progression par différence est égale au produit de la somme des extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes.

Si, dans cette formule, on remplace  $l$  par sa valeur  $a + (n-1)r$ , on obtient encore

$$S = \frac{[2a + (n-1)r]n}{2};$$

mais la première expression est la plus usitée.

*Applications.* On demande la somme des cinquante premiers termes de la progression 2.9.16.23.30. . . ?

On a d'abord pour le 50<sup>me</sup> terme,  $l = 2 + 49 \cdot 7 = 345$ ;

$$\text{donc } S = \frac{(2 + 345) \cdot 50}{2} = 347 \times 25 = 8675.$$

On trouverait de même pour le 100<sup>me</sup> terme,  $l = 2 + 99 \cdot 7 = 695$ ;  
et pour la somme des 100 premiers termes,  $S = \frac{(2 + 695)100}{2} = 34850.$

196. Les formules  $l = a + (n - 1)r$ ,  $S = \frac{(a + l)n}{2}$ , renferment cinq quantités,  $a$ ,  $r$ ,  $n$ ,  $l$  et  $S$ , et par conséquent, donnent lieu à ce problème général : *Trois quelconques de ces cinq quantités étant données, déterminer les deux autres.* Ce problème se subdivise en autant de problèmes particuliers que l'on peut avec cinq lettres former de combinaisons différentes trois à trois ou deux à deux. Or, on a trouvé (n° 150) pour les nombres de combinaisons 2 à 2 et 3 à 3,

$$\frac{m(m-1)}{2} \text{ et } \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}.$$

Faisant dans ces formules  $m = 5$ , on trouve  $\frac{5 \times 4}{2}$  ou 10 et  $\frac{5 \times 4 \times 3}{2 \cdot 3}$  ou 10; d'où l'on voit que 5 lettres, combinées 3 à 3, donnent le même nombre de combinaisons que 5 lettres combinées 2 à 2. (Ce résultat s'accorde avec la conséquence du n° 153, en vertu de laquelle le nombre des combinaisons de  $m$  lettres  $p$  à  $p$ , est égal au nombre des combinaisons  $m - p$  à  $m - p$ .)

On voit donc que le problème ci-dessus se subdivise en 10 problèmes particuliers, dont voici les énoncés :

- Étant donnés, 1°.  $a$ ,  $r$ ,  $n$ , trouver  $l$  et  $S$ ;  
 2°.  $a$ ,  $r$ ,  $l$ , .....  $n$  et  $S$ ;  
 3°.  $a$ ,  $r$ ,  $S$ , .....  $n$  et  $l$ ;  
 4°.  $a$ ,  $n$ ,  $l$ , .....  $r$  et  $S$ ;  
 5°.  $a$ ,  $n$ ,  $S$ , .....  $r$  et  $l$ ;  
 6°.  $a$ ,  $l$ ,  $S$ , .....  $r$  et  $n$ ;  
 7°.  $r$ ,  $n$ ,  $l$ , .....  $a$  et  $S$ ;  
 8°.  $r$ ,  $n$ ,  $S$ , .....  $a$  et  $l$ ;  
 9°.  $r$ ,  $l$ ,  $S$ , .....  $a$  et  $n$ ;  
 10°.  $n$ ,  $l$ ,  $S$ , .....  $a$  et  $r$ .

Le premier problème est déjà résolu, car les deux formules donnent immédiatement  $l$  et  $S$  en fonction de  $a$ ,  $r$ ,  $n$ . Quant aux autres problèmes, leur résolution n'offre aucune difficulté;



mais nous engageons les commençans à les traiter successivement, cet exercice étant très propre à les familiariser avec la résolution des équations du premier et du second degré ; car il est bon de remarquer que, quoique les quantités  $a$ ,  $r$ ,  $n$ ,  $l$  et  $S$  n'entrent qu'au premier degré dans les deux formules, on est cependant conduit à résoudre une équation du second degré, lorsque  $a$  et  $n$ , ou bien  $l$  et  $n$ , sont inconnus, parce que  $a$  et  $n$  ou  $l$  et  $n$  entrent à la fois dans les deux équations, et sont multipliées entre elles dans la seconde.

197. Nous nous bornerons à résoudre le quatrième problème ; c'est le cas où, *connaissant  $a$ ,  $n$  et  $l$ , il s'agit de déterminer  $r$  et  $S$ .*

La formule  $l = a + (n - 1)r$  donne  $r = \frac{l - a}{n - 1}$ ,

et la formule,  $S = \frac{(a + l)n}{2}$ , fait connaître immédiatement la valeur de  $S$ .

De la première expression,  $r = \frac{l - a}{n - 1}$ , on déduit la solution de cette question : *insérer entre deux nombres donnés  $a$  et  $b$  un nombre  $n$  de MOYENS DIFFÉRENTIELS* (on appelle ainsi des nombres compris entre  $a$  et  $b$ , et formant avec ceux-ci une progression par différence).

Pour résoudre cette dernière question, il suffit de déterminer la raison ; or, en remplaçant, dans la formule ci-dessus,  $l$  par  $b$ , et  $n$  par  $m + 2$ , qui exprime actuellement le nombre total des termes, on trouve  $r = \frac{b - a}{m + 2 - 1}$ , ou  $r = \frac{b - a}{m + 1}$  ; c'est-à-dire que *la raison de la progression cherchée s'obtient en divisant la différence des deux nombres donnés  $a$  et  $b$  par le nombre des termes à insérer, plus un.*

La raison une fois obtenue, on forme le second terme de la progression, ou le *premier moyen différentiel*, en ajoutant  $r$ , ou  $\frac{b - a}{m + 1}$ , au premier terme  $a$  ; le *second moyen* s'obtient en ajoutant celui-ci de  $r$ , et ainsi de suite.

Soit, par exemple, à insérer 12 moyens différentiels entre 12

et 77. On a  $r = \frac{77 - 12}{13} = \frac{65}{13} = 5$ , ce qui donne la progression  $\div 12, 17, 22, 27, 32, 37, \dots, 72, 77$ .

**CONSEQUENCE.** Si entre tous les termes d'une progression, considérés deux à deux, on insère un même nombre de moyens différentiels, ces termes et les moyens différentiels réunis ne forment qu'une seule et même progression.

En effet, soit  $\div a, b, c, d, e, f, \dots$  la progression proposée, et soit  $m$  le nombre des moyens que l'on veut insérer entre  $a$  et  $b$ , entre  $b$  et  $c$ ,  $c$  et  $d$ ,...

La raison de chaque progression partielle sera, d'après ce qui vient d'être dit, exprimée par  $\frac{b-a}{m+1}, \frac{c-b}{m+1}, \frac{d-c}{m+1}, \dots$ , quantités toutes égales, puisque  $a, b, c, \dots$  sont en progression; ainsi la raison est la même dans chacune des progressions partielles; et comme d'ailleurs le dernier terme de la première forme le premier terme de la seconde, et ainsi de suite, on peut conclure que toutes ces progressions partielles constituent une progression unique.

198. Voici les énoncés de quelques problèmes :

**PREMIÈRE QUESTION.** Déterminer le premier et le nombre des termes d'une progression par différence, dont la raison est 6, le dernier terme 185 et la somme 2945?

(Réponse. Premier terme = 5, nombre des termes = 31.)

**SECONDE QUESTION.** Insérer entre tous les termes de la progression  $\div 2, 5, 8, 11, 14, \dots$ , NEUF moyens différentiels?

(Réponse. Raison ou  $r = 0,3$ .)

**TROISIÈME QUESTION.** Trouver le nombre d'hommes contenus dans un bataillon triangulaire dont le premier rang est 1, le second est 2, le troisième est 3, et le  $n^{\text{me}}$  est  $n$ . En d'autres termes, trouver l'expression de la somme des nombres naturels 1, 2, 3..., depuis 1 jusqu'à  $n$ ?

(Réponse.  $S = \frac{n(n+1)}{2}$ .)

QUATRIÈME QUESTION. *Trouver la somme des n premiers termes de la progression des nombres impairs, 1, 3, 5, 7, 9...*

(Réponse.  $S = n^2$ , ou le carré du nombre des termes.)

CINQUIÈME QUESTION. *Un monceau de sable est distant d'une allée d'arbres de 40 mètres; elle exige, pour être sablée, 100 voitures, à 6 mètres d'intervalle l'une de l'autre. On demande le chemin que le voiturier doit faire, la première voiture étant déposée à 40 mètres du monceau de sable, et la voiture devant, à la fin, revenir à l'endroit d'où elle est partie?*

Réponse, 67400 mètres.

SIXIÈME QUESTION. *Un fantassin fait 10 lieues par jour; un cavalier part en même temps, et ne fait que 3 lieues le premier jour, mais, chaque jour suivant, il fait 2 lieues de plus que le précédent. On demande en combien de jours le cavalier atteindra le fantassin, et combien ils auront fait de chemin chacun?*

(Nombre de jours, 8; chemin, 80 lieues.)

### *Des progressions par quotient.*

199. On appelle *progression géométrique* ou *par quotient*, une suite de termes dont chacun est égal au produit de celui qui le précède, par un nombre constant que l'on nomme *raison* de la progression; ainsi les deux suites

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots, \\ 64, 16, 4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots,$$

dont la première est telle, que chaque terme contient celui qui le précède, deux fois, ou est égal au double de celui qui le précède, et dont la seconde est telle, que chaque terme est contenu dans celui qui le précède, quatre fois, ou est égal au quart de celui qui le précède, sont dites des *progressions par quotient*; la raison est 2 pour la première et  $\frac{1}{4}$  pour la seconde.

Soient  $a, b, c, d, e, f, \dots$  des nombres en progression par quotient; on l'écrit ainsi,  $\div a : b : c : d : e : f : g, \dots$ , et on l'énonce comme une progression par différence, quoiqu'il y ait cette distinction à faire, que l'une est une suite de différences égales, et l'autre une suite de quotiens ou rapports égaux, dans lesquels *chaque terme est à la fois antécédent et conséquent, excepté le premier qui n'est qu'antécédent, et le dernier qui n'est que conséquent.*

200. Désignons par  $q$  la raison de la progression. ....  
 $\div a : b : c : d, \dots$ ,  $q$  étant  $> 1$ , lorsque la progression est *croissante*, et  $< 1$ , si la progression est *décroissante*; on déduit de la définition même, la série des égalités

$$b = aq, \quad c = bq = aq^2, \quad d = cq = aq^3, \quad e = dq = aq^4, \dots,$$

et en général, un terme de rang quelconque  $n$ , c'est à-dire qui en  $n - 1$  avant lui, a pour expression  $aq^{n-1}$ .

Soit  $l$  ce terme; on a la formule  $l = aq^{n-1}$ , au moyen de laquelle on peut obtenir la valeur d'un terme quelconque, sans passer par tous les termes qui précèdent. Par exemple, le 8<sup>e</sup> terme de la progression  $\div 2 : 6 : 18 : 54 : \dots$ , est égal à  $2 \times 3^7 = 2 \times 2187 = 4374$ .

De même, le 12<sup>e</sup> terme de la progression .....  
 $\div 64 : 16 : 4 : 1 : \frac{1}{4} \dots$ , est égal à

$$64 \left(\frac{1}{4}\right)^{11} = \frac{4^3}{4^{11}} = \frac{1}{4^8} = \frac{1}{65536}.$$

201. Soit maintenant proposé de déterminer la somme des  $n$  premiers termes de la progression

$$\div a : b : c : d : e : f : \dots i : k : l,$$

$l$  désignant le  $n^{\text{ième}}$  terme.

On a ( $n^{\circ}$  199) les équations

$$b = aq, \quad c = bq, \quad d = cq, \quad e = dq, \dots k = iq, \quad l = k \times q,$$

d'où l'on déduit, en les ajoutant membre à membre,

$$b + c + d + e + \dots + k + l = (a + b + c + d + \dots + i + k)q,$$

ou bien, représentant par  $S$  la somme demandée,

$$S - a = (S - l)q = Sq - lq,$$

$$\text{ou } Sq - S = lq - a; \quad \text{donc } S = \frac{lq - a}{q - 1};$$

c'est-à-dire que, pour obtenir la somme d'un nombre déterminé de termes d'une progression par quotient, il faut multiplier le dernier terme par la raison, retrancher du produit le premier terme, et diviser la différence par la raison diminuée d'une unité.

Lorsque la progression est décroissante, on a  $q < 1$ ,  $l < a$ ; et il convient de mettre la formule ci-dessus sous la forme

$$S = \frac{a - lq}{1 - q}, \text{ afin que les deux termes de la fraction soient positifs.}$$

Les deux expressions de  $S$  deviennent encore, par la substitution de  $aq^{n-1}$  à la place de  $l$ ,  $S = \frac{aq^n - a}{q - 1}$ , et  $S = \frac{a - aq^n}{1 - q}$ .

On trouvera, d'après les formules précédentes;

1°. Pour la somme des 8 premiers termes de la progression

$$\div 2 : 6 : 18 : 54 \dots : 2 \times 3^7 \text{ ou } 4374,$$

$$S = \frac{lq - a}{q - 1} = \frac{13122 - 2}{2} = 6560;$$

2°. Pour la somme des 12 premiers termes de la progression

$$\div 64 : 16 : 4 : 1 : \frac{1}{4} : \dots : 64 \left(\frac{1}{4}\right)^{11} \text{ ou } \frac{1}{65536},$$

$$S = \frac{64 - \frac{1}{65536} \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{256 - \frac{1}{65536}}{3} = 85 + \frac{65535}{196608}.$$

On voit que la difficulté principale consiste à déterminer la valeur numérique du dernier terme, opération très laborieuse, lorsque le nombre des termes est considérable.

202. *Remarque.* Si dans la formule  $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ ,

on suppose  $q = 1$ , elle devient  $S = \frac{0}{0}$ .

Ce résultat, qui quelquefois est le symbole de l'indétermination, provient souvent aussi (n° 72) de l'existence d'un facteur commun, qui devient nul, par une hypothèse particulière faite sur les données de la question. C'est en effet ce qui a lieu dans cette circonstance; car on sait (n° 31) que l'expression  $q^n - 1$  est divisible par  $q - 1$ , et donne pour quotient, .....  $q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \dots + q + 1$ ; si l'on effectue cette division, la valeur de  $S$  prend la forme

$$S = aq^{n-1} + aq^{n-2} + aq^{n-3} + \dots + aq + a;$$

d'où faisant maintenant  $q = 1$ ,  $S = a + a + a \dots + a = na$ .

On peut parvenir au même résultat, en remontant à la progression proposée  $\div a : b : c : \dots : l$ , qui, dans le cas particulier de  $q = 1$ , se réduit à  $\div a : a : a : a : \dots : a$ , série dont la somme est égale à  $na$ .

Le résultat  $\frac{0}{0}$  que donne la formule, pourrait encore être regardé comme marquant une *insuffisance* de cette formule, pour donner l'expression de la somme, dans ce cas particulier. En effet, la progression se composant de termes tous égaux entre eux, n'est pas plutôt une progression par quotient qu'une progression par différence. Ainsi, en cherchant la somme d'un certain nombre de termes, il n'y a pas plus de raison pour se servir de la formule  $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ , que de la formule  $S = \frac{(a + l)n}{2}$ , relatives aux progressions par différence.

203. *Des progressions infinies par quotient.* Soit une progression décroissante  $\div a : b : c : d : e : f : \dots$  d'un nombre

indéfini de termes; si l'on considère la formule  $S = \frac{a - aq^n}{1 - q}$ , qui donne la somme d'un nombre  $n$  de termes, elle peut être mise sous la forme  $S = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}$ .

Or, puisque la progression est décroissante,  $q$  est une fraction;  $q^n$  est aussi une fraction, qui sera d'autant plus petite que  $n$  sera plus grand; ainsi, plus on prendra de termes dans la progression, plus  $\frac{a}{1 - q} \times q^n$  diminuera; plus, par conséquent, la somme partielle de ces termes approchera de devenir égale à la première partie de  $S$ , c'est-à-dire à  $\frac{a}{1 - q}$ . Enfin, si l'on prend pour  $n$  un nombre plus grand qu'aucune grandeur donnée, ou si l'on suppose  $n = \infty$ ,  $\frac{a}{1 - q} \times q^n$  sera moindre qu'aucune grandeur donnée, ou deviendra égale à 0; et l'expression  $\frac{a}{1 - q}$  représentera la valeur de toute la série.

D'où l'on peut conclure que la somme des termes d'une progression décroissante à l'infini, a pour expression

$$S = \frac{a}{1 - q}.$$

C'est, à proprement parler, la limite vers laquelle tendent sans cesse toutes les sommes partielles que l'on obtient, en prenant un nombre de termes de plus en plus grand dans la progression. La différence entre ces sommes et  $\frac{a}{1 - q}$ , peut devenir aussi petite que l'on veut, et ne devient tout-à-fait nulle que lorsque l'on prend un nombre infini de termes.

*Applications.* Soit la progression décroissante à l'infini

$$1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \frac{1}{81} : \dots$$

On a, pour l'expression de la somme des termes,

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

L'erreur que l'on commet, en prenant cette expression pour la valeur de la somme des  $n$  premiers termes, est marquée par

$$\frac{a}{1-q} \cdot q^n = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Soit d'abord  $n = 5$ , il vient  $\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{2 \cdot 3^4} = \frac{1}{162}.$

Pour  $n = 6$ , on trouve  $\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{162} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{486}.$

D'où l'on voit que l'erreur commise, lorsqu'on prend  $\frac{3}{2}$  pour la somme d'un certain nombre de termes, est d'autant plus petite que ce nombre est plus grand.

Soit encore la progression

$$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \dots$$

On a  $S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

L'expression  $S = \frac{a}{1-q}$  peut être obtenue directement d'après la progression  $\div a : b : c : d : e : f : g : \dots$

Reprenons les équations  $b = aq$ ,  $c = bq$ ,  $d = cq$ ,  $e = dq \dots$  dont le nombre est ici indéfini, et ajoutons-les membre à membre; il vient  $b + c + d + e + \dots = (a + b + c + d + \dots)q.$

Or, le premier membre est évidemment la série proposée, diminuée du premier terme  $a$ , et, par conséquent, il a pour expression  $S - a$ ; le second membre est égal à  $q$  multiplié par la série tout entière, puisqu'il n'y a pas de dernier terme, ou que ce dernier terme est nul; l'expression de ce second membre est



donc  $qS$ , et l'égalité ci-dessus devient

$$S - a = qS, \text{ d'où l'on déduit } S = \frac{a}{1-q}.$$

En effet, si l'on développe  $\frac{a}{1-q}$  en série, par le procédé de la division, on trouve pour résultat,  $a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$ , qui n'est autre chose que la série proposée, lorsqu'on y remplace  $b, c, d, \dots$  par leurs valeurs en fonction de  $a$ .

*Autrement encore :* Soit la progression  $\div a : aq : aq^2 : aq^3 \dots$  et posons  $S = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \dots$ ; d'où, multipliant les deux membres par  $q$ ,

$$qS = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \dots$$

Retranchons ces deux équations membre à membre; il vient

$$S - qS = a; \text{ donc enfin, } S = \frac{a}{1-q}.$$

204. Lorsque la série est croissante, l'expression  $S = \frac{a}{1-q}$  ne peut plus être regardée comme une *limite des sommes partielles*; car la somme d'un nombre déterminé de termes étant (n° 201)  $S = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$ , la seconde partie  $\frac{aq^n}{1-q}$  augmente de plus en plus numériquement à mesure que  $n$  augmente; c'est-à-dire qu'au contraire, plus on prend de termes, plus l'expression de la somme de ces termes diffère numériquement de  $\frac{a}{1-q}$ .

La formule  $S = \frac{a}{1-q}$  est seulement, dans ce cas, l'expression algébrique qui, par son développement, donne lieu à la série  $a + aq + aq^2 + aq^3 \dots$

Il se présente ici une circonstance fort singulière au premier abord. Puisque  $\frac{a}{1-q}$  est la fraction génératrice de la série dont

nous venons de parler, on doit avoir

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \dots$$

Or, en faisant dans cette égalité,  $a=1$ ,  $q=2$ , on trouve

$$\frac{1}{1-2} \quad \text{ou} \quad -1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots,$$

équation dont le premier membre est négatif, tandis que le second est positif et d'autant plus grand, que  $q$  est lui-même plus grand.

Pour interpréter ce résultat, observons que, lorsque dans l'équation  $\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + \dots$ , on arrête la série à un certain terme, il faut, pour que l'égalité subsiste, compléter le quotient. Ainsi, en s'arrêtant, par exemple, au quatrième terme,  $aq^3$ ,

$$\begin{array}{lcl} & a & \\ 1^{\text{er}} \text{ reste} & + aq & \left| \frac{1-q}{a + aq + aq^2 + aq^3 + \frac{aq^4}{1-q}} \right. \\ 2^{\text{e}} & + aq^2 & \\ 3^{\text{e}} & + aq^3 & \\ 4^{\text{e}} & + aq^4 & \end{array}$$

il faut ajouter au quotient obtenu l'expression fractionnaire  $\frac{aq^4}{1-q}$ , ce qui donne rigoureusement

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \frac{aq^4}{1-q}.$$

Si maintenant, on fait dans cette équation exacte,  $a=1$ ,  $q=2$ ,

il vient  $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \frac{16}{-1} = 1 + 2 + 4 + 8 - 16$ ;

égalité qui se vérifie d'elle-même.

En général, lorsqu'une expression en  $x$ , que nous désignerons par  $f(x)$ , et qui s'énonce *fonction* de  $x$ , est développée

en une série de la forme  $a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$ , on n'a rigoureusement  $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$ , qu'autant que l'on conçoit, en s'arrêtant à un certain terme dans le second membre, la série complétée par une certaine expression en  $x$ .

Si, dans des applications particulières, la série est *décroissante*, cette expression, qui sert à compléter, peut être conçue aussi petite que l'on veut, lorsqu'on prolonge la série convenablement; mais le contraire a lieu, et il n'est pas permis de la négliger, si la série est *croissante*. Voilà pourquoi les séries croissantes ne peuvent pas servir à l'évaluation approchée des nombres. C'est encore pour cette raison que les algébristes appellent *convergentes* les séries dont les termes vont en diminuant, et *divergentes* les séries dont les termes vont en augmentant. Dans les premières, plus on prend de termes et plus la somme approche numériquement de l'expression dont la série est le développement; tandis qu'au contraire, dans les autres, plus on prend de termes et plus leur somme diffère de la valeur numérique de l'expression réduite en série.

205. *Remarque.* Nous terminerons les principes relatifs aux progressions infinies, par l'observation suivante: il résulte de la définition des progressions par quotient (n° 199), qu'on peut les regarder comme des séries récurrentes du premier ordre, dont l'échelle de relation est la raison de la progression. (Voyez n° 191.) Ce rapprochement est propre à faire connaître l'origine des progressions prolongées à l'infini. Elles doivent, comme les séries récurrentes en général, leur naissance au développement d'une fraction algébrique en série. Nous avons donné (n° 202 et 203) les moyens de trouver cette fraction génératrice pour les progressions en particulier. Nous verrons plus loin les moyens de résoudre la même question pour toutes les séries récurrentes.

206. La considération des cinq quantités,  $a, q, n, l$  et  $S$ , qui entrent dans les deux formules  $l = aq^{n-1}$ ,  $S = \frac{lq - a}{q - 1}$ , obtenues n° 200 et 201, donne encore lieu à dix problèmes par-

ticuliers dont les énoncés ne diffèrent des énoncés relatifs aux progressions par différence (n° 196), qu'en ce que la lettre  $r$  est remplacée par  $q$ . Mais nous nous proposerons, comme pour les progressions par différence, de déterminer  $q$  et  $S$ , connaissant  $a$ ,  $l$  et  $n$ .

Or, la première formule donne  $q^{n-1} = \frac{l}{a}$ , d'où  $q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$ ; en reportant cette valeur dans la seconde formule, on obtiendrait la valeur de  $S$ .

L'expression  $q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$ , donne le moyen de résoudre cette question: *Insérer entre deux nombres donnés  $a$  et  $b$  un nombre  $m$  de MOYENS PROPORTIONNELS, c'est-à-dire un nombre  $m$  de quantités qui forment avec  $a$  et  $b$ , considérés comme extrêmes, une progression par quotient.*

Il suffit, pour cela, de connaître la raison; or, le nombre des termes à insérer étant  $m$ , le nombre total des termes,  $n$ , est égal à  $m + 2$ ; on a d'ailleurs  $l = b$ , ainsi la valeur de  $q$  devient

$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$ ; c'est-à-dire qu'il faut diviser les deux nombres donnés  $b$  et  $a$  l'un par l'autre, puis extraire du quotient une racine d'un degré marqué par le nombre des termes à insérer, plus un.

La progression est alors

$$\therefore a : a \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} : a \sqrt[m+1]{\frac{b^2}{a^2}} : a \sqrt[m+1]{\frac{b^3}{a^3}} : \dots : b.$$

Ainsi, soit à insérer six moyens proportionnels entre les nombres 3 et 384.

$$\text{On a } m = 6, \text{ d'où } q = \sqrt[7]{\frac{384}{3}} = \sqrt[7]{128} = 2;$$

d'où l'on déduit la progression

$$\therefore 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384.$$

Nous ferons bientôt connaître des moyens plus expéditifs, dans les applications numériques, de calculer le nombre exprimé par

$$q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}.$$

Nous ne nous arrêterons point à démontrer que si, entre tous les termes d'une progression par quotient, considérés deux à deux, on insère un même nombre de moyens proportionnels, toutes les progressions ainsi formées constituent une progression unique. La démonstration est analogue à celle du n° 197.

207. Des dix problèmes principaux que l'on peut se proposer sur les progressions, quatre sont susceptibles d'être résolus facilement. En voici les énoncés, avec les formules qui y sont relatives :

1°.  $a, q, n$ , étant donnés, trouver  $l$  et  $S$ .

$$l = aq^{n-1}; \quad S = \frac{lq - a}{q - 1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

2°.  $a, n, l$ , étant donnés, trouver  $q$  et  $S$ .

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}; \quad S = \frac{\sqrt[n-1]{l^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l} - \sqrt[n-1]{a}}.$$

3°.  $q, n, l$ , étant donnés, trouver  $a$  et  $S$ .

$$a = \frac{l}{q^{n-1}}; \quad S = \frac{l(q^n - 1)}{q^{n-1}(q - 1)}.$$

4°.  $q, n, S$ , étant donnés, trouver  $a$  et  $l$ .

$$a = \frac{S(q-1)}{q^n - 1}; \quad l = \frac{Sq^{n-1}(q-1)}{q^n - 1}.$$

Deux autres problèmes dépendent de la résolution d'équations d'un degré supérieur au second ; ce sont ceux où l'on suppose inconnues les quantités  $a$  et  $q$ , ou bien  $l$  et  $q$ .

En effet, de la seconde formule on déduit  $a = lq - Sq + S$ ; d'où, substituant cette valeur de  $a$  dans la première  $l = aq^{n-1}$ ,

$$l = (lq - Sq + S)q^{n-1},$$

ou bien,  $(S - l)q^n - Sq^{n-1} + l = 0,$

équation du degré  $n$  que nous n'avons point encore appris à résoudre.

Il en serait de même, si l'on voulait déterminer  $l$  et  $q$ ; on parviendrait à l'équation  $aq^n - Sq + S - a = 0$ .

208. Enfin, les quatre autres problèmes conduisent à la résolution d'équations d'une nature toute particulière; ce sont ceux où  $n$  est inconnu, ainsi que l'une des quatre autres quantités.

D'abord, la seconde formule donne aisément la valeur de l'une des quantités  $a$ ,  $q$ ,  $l$  et  $S$ , en fonction des trois autres; ainsi, tout se réduit à déterminer  $n$  au moyen de la formule  $l = aq^{n-1}$ .

Or, cette égalité revient à  $q^n = \frac{lq}{a}$ , équation de la forme  $a^x = b$ ,  $a$  et  $b$  étant des quantités connues. On appelle ces sortes d'équations, *équations exponentielles*, pour les distinguer de celles que nous avons considérées jusqu'à présent, et dans lesquelles l'inconnue est élevée à des puissances marquées par des nombres connus.

Occupons-nous donc de la résolution de ces équations, auxquelles se rattache une des théories les plus importantes des Mathématiques, la théorie des logarithmes.

## § II. Théorie des quantités exponentielles et des logarithmes.

209. *Résolution de l'équation  $a^x = b$ .* La question consiste à trouver l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever un nombre donné  $a$ , pour produire un autre nombre donné  $b$ .

Considérons d'abord quelques cas particuliers.

Soit à résoudre l'équation  $2^x = 64$ . En élevant 2 à ses différentes puissances, on reconnaît bientôt que  $2^6 = 64$ ; donc  $x = 6$  satisfait à l'équation.

Soit encore l'équation  $3^x = 243$ . On a pour solution,  $x = 5$ . En un mot, tant que le second membre  $b$  sera une *puissance parfaite* du nombre donné  $a$ ,  $x$  sera un nombre entier que l'on obtiendra par l'élevation de  $a$  à ses puissances successives, à partir du degré 0.

Soit maintenant à résoudre l'équation  $2^x = 6$ . En faisant  $x = 2$  et  $x = 3$ , on trouve  $2^2 = 4$  et  $2^3 = 8$ ; d'où l'on voit que  $x$  a une valeur comprise entre 2 et 3.

Posons donc  $x = 2 + \frac{1}{x'}$ .... ( $x'$  est alors  $> 1$ ).

On a, en substituant cette valeur dans la proposée,

$$2^{2 + \frac{1}{x'}} = 6 \quad \text{ou} \quad (n^o 180) \quad 2^2 \times 2^{\frac{1}{x'}} = 6; \text{ donc } 2^{\frac{1}{x'}} = \frac{3}{2},$$

ou élevant les deux membres à la puissance  $x'$ ,  $\left(\frac{3}{2}\right)^{x'} = 2$ .

Pour déterminer  $x'$ , faisons successivement  $x' = 1$ ,  $x' = 2$ ; on trouve  $\left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2}$ , nombre plus petit que 2, et.....

$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ , nombre plus grand que 2; ainsi,  $x'$  est compris entre 1 et 2.

Posons donc  $x' = 1 + \frac{1}{x''}$ .... ( $x''$  est aussi  $> 1$ ).

On obtient, en substituant dans l'équation exponentielle en  $x'$ ,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1 + \frac{1}{x''}} = 2, \quad \text{ou} \quad \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x''}} = 2,$$

ou réduisant,  $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x''}} = \frac{3}{2}$ .

Les deux hypothèses  $x'' = 1$  et  $x'' = 2$ , donnent  $\left(\frac{4}{3}\right)^1 = \frac{4}{3}$ ,

nombre plus petit que  $\frac{3}{2}$ , et  $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} = 1 + \frac{7}{9}$ , nombre plus grand que  $\frac{3}{2}$ ; ainsi,  $x''$  est compris entre 1 et 2.

Soit donc  $x'' = 1 + \frac{1}{x''}$ ; il en résulte

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1+\frac{1}{x''}} = \frac{3}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{4}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x''}} = \frac{3}{2};$$

d'où réduisant,  $\left(\frac{9}{8}\right)^{x''} = \frac{4}{3}$ .

Si l'on fait successivement  $x'' = 1, 2, 3$ , on trouve, pour les deux dernières hypothèses,  $\left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{81}{64} = 1 + \frac{17}{64}$ , nombre  $< 1 + \frac{1}{3}$ , et  $\left(\frac{9}{8}\right)^3 = \frac{729}{512} = 1 + \frac{217}{512}$ , nombre  $> 1 + \frac{1}{3}$ ; ainsi,  $x''$  est compris entre 2 et 3.

Soit  $x'' = 2 + \frac{1}{x''}$ ; l'équation en  $x''$  devient

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{2+\frac{1}{x''}} = \frac{4}{3}, \quad \text{ou} \quad \frac{81}{64} \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{x''}} = \frac{4}{3};$$

et par conséquent,  $\left(\frac{256}{243}\right)^{x''} = \frac{9}{8}$ .

En opérant sur cette équation exponentielle comme sur les précédentes, on trouverait deux nombres entiers  $k$  et  $k+1$ , entre lesquels  $x''$  serait compris. Posant  $x'' = k + \frac{1}{x''}$ , on déterminerait  $x''$  comme on a déterminé  $x''$ ; et ainsi de suite.

Rapprochons actuellement les équations

$$x = 2 + \frac{1}{x}, \quad x' = 1 + \frac{1}{x'}, \quad x'' = 1 + \frac{1}{x''}, \quad x''' = 2 + \frac{1}{x'''} \dots;$$



on obtient la valeur de  $x$  sous la forme d'une fraction continue

$$x = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x^{14}}}}}$$

Or on sait (*Arith.*, n° 175) que, dans une fraction continue, plus on prend de fractions intégrantes, plus on approche de la valeur du nombre réduit en fraction continue; ainsi, l'on pourra, par ce moyen, trouver la valeur de  $x$  propre à vérifier l'équation  $2^x = 6$ , sinon exactement, du moins avec tel degré d'approximation que l'on voudra.

Par exemple, en formant les quatre premières réduites d'après la loi établie (*Arith.*, n° 169), on trouve

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{13}{5},$$

et la réduite  $\frac{13}{5}$  ne diffère (*Arith.*, n° 174) de la valeur de  $x$  que d'une quantité moindre que  $\frac{1}{(5)^2}$  ou  $\frac{1}{25}$ . Mais l'approximation est encore plus grande; car si l'on calcule la valeur de  $x^{14}$ ; d'après l'équation  $\left(\frac{256}{243}\right)^{x^{14}} = \frac{9}{8}$ , on reconnaitra que  $x^{14}$  est compris entre 2 et 3; ainsi  $x^{14} = 2 + \frac{1}{x^7}$ ; donc la 5<sup>e</sup> réduite est  $\frac{13 \times 2 + 5}{5 \times 2 + 2}$ , ou  $\frac{31}{12}$ . Ainsi,  $\frac{13}{5}$  diffère de la valeur de  $x$ , d'une quantité moindre que  $\frac{1}{12 \times 5}$ , ou  $\frac{1}{60}$ . La réduite  $\frac{31}{12}$  en diffère de moins que  $\frac{1}{(12)^2}$ , ou  $\frac{1}{144}$ .

Voici la méthode générale: Soit  $a^x = b$  l'équation à résoudre.

En formant les puissances successives de  $a$ , on trouve que  $b$  est compris entre  $a^n$  et  $a^{n+1}$ ; alors on fait  $x = n + \frac{1}{x'}$ ; substituant cette valeur dans l'équation, on obtient  $a^{n+\frac{1}{x'}} = b$ , équation qui revient à  $a^n \times a^{\frac{1}{x'}} = b$ , d'où  $\left(\frac{b}{a^n}\right)^{x'} = a$ , ou posant, pour plus de simplicité,  $\frac{b}{a^n} = c, \dots c^{x'} = a$ .

Opérant sur cette équation comme sur la proposée, on reconnaîtra que  $x'$  est compris entre  $n'$  et  $n' + 1$ , ce qui donnera  $x' = n' + \frac{1}{x''}$ ; substituant cette valeur dans l'équation en  $x'$ , on sera encore conduit à résoudre une équation de la forme  $d^{x''} = c$  ( $d$  ayant pour valeur  $\frac{a}{c^{n'}}$ ), et ainsi de suite. Donc enfin, l'on obtiendra pour la valeur de  $x$ , une expression de la forme

$$x = n + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \frac{1}{n'''} + \dots$$

En poussant la suite des opérations convenablement, on aura la valeur de  $x$  avec tel degré d'approximation que l'on voudra; et ce degré pourra toujours s'estimer, puisqu'il est marqué (Arith., n° 174) par le quotient de l'unité divisée par le carré du dénominateur de la dernière réduite à laquelle on sera parvenu.

210. *Remarques.* 1°. Si l'on suppose, dans l'équation  $a^x = b$ ,  $b < a$ , comme on a  $a^0 = 1$  (n° 24) et  $a^1 = a$ , il s'ensuit que  $x$  est compris entre 0 et 1; il faut poser alors  $x = \frac{1}{x'}$ .

2°. Si  $b$  est une fraction et que  $a$  soit plus grand que l'unité, il faut poser dans l'équation  $a^x = b$ ,  $x = -y$ , ce qui donne  $a^{-y} = b$ , d'où (n° 179),  $a^y = \frac{1}{b}$ ; et comme  $\frac{1}{b}$  est  $> 1$ , on déter-

minera y d'après la méthode ci-dessus, et la valeur correspondante de x sera égale à celle de y, prise *négativement*.

Au moyen de ces remarques, l'application de la méthode n'offre aucune difficulté. Seulement les calculs, pour obtenir un grand degré d'approximation, sont assez laborieux.

On peut, au reste, s'exercer sur les exemples suivans :

$$\begin{aligned} 3^x &= 15 \dots x = 2,46 \text{ à } 0,01 \text{ près,} \\ 10^x &= 3 \dots x = 0,477 \text{ à } 0,001 \text{ près,} \\ 5^x &= \frac{2}{3} \dots x = -0,25 \text{ à } 0,01 \text{ près,} \\ \left(\frac{7}{12}\right)^x &= \frac{3}{4} \dots x = 0,53 \text{ à } 0,01 \text{ près.} \end{aligned}$$

On suppose ici que l'on ait converti en fractions décimales, les réduites fournies par la méthode.

211. On peut demander si, en suivant la méthode précédente, on sera conduit à une fraction continue d'un nombre limité de fractions intégrantes, ce qui donnera pour x un nombre *commensurable* et égal à la dernière réduite de la fraction continue; ou bien, si le nombre des fractions intégrantes doit être illimité, auquel cas x sera *incommensurable*.

Pour répondre à cette question, supposons dans l'équation  $a^x = b$ , x égal à un nombre commensurable  $\frac{m}{n}$ , et voyons quelle relation il doit exister entre les nombres a et b, pour que cette valeur puisse être admise, c'est-à-dire pour que x soit *commensurable*.

Soient en premier lieu a et b deux nombres entiers; on a l'équation  $a^{\frac{m}{n}} = b$ , que l'on peut mettre sous la forme  $a^m = b^n$ .

Il est d'abord évident que cette égalité ne peut subsister qu'autant que a et b sont composés des mêmes facteurs premiers; car, si l'on suppose dans b un facteur premier qui ne se trouve pas dans a, et qu'on divise les deux membres par ce facteur, le second membre sera un nombre entier, et le premier un nombre fractionnaire, ce qui est absurde; donc, si l'on a,

par exemple,  $a = a^p c^q \gamma^r \delta^s$ ,

on doit avoir aussi  $a = \gamma'^{p'} \delta'^{q'}$ .

Substituant ces valeurs dans l'équation  $a^m = b^n$ , on la change en celle-ci,  $a^{mp} c^{mq} \gamma^{mr} \delta^{ms} = a^{np'} c^{nq'} \gamma^{n'r'} \delta^{n's'}$ .

Cette nouvelle égalité ne peut évidemment subsister qu'autant que les puissances d'un même facteur premier sont égales dans les deux membres; car, si elles étaient inégales, en divisant les deux membres par la plus haute puissance, on serait encore conduit à ce résultat absurde: *un nombre entier égal à un nombre fractionnaire*.

Ainsi, l'on doit avoir séparément

$$mp = np', \quad mq = nq', \quad mr = nr', \quad ms = ns',$$

d'où l'on déduit 
$$\frac{m}{n} = \frac{p'}{p} = \frac{q'}{q} = \frac{r'}{r} = \frac{s'}{s}.$$

Done, pour que la valeur de  $x$  soit commensurable, il faut et il suffit que  $a$  et  $b$  soient composés des mêmes facteurs premiers, et que les exposans de ces facteurs forment entre eux une suite de rapports égaux. Si ces deux conditions sont satisfaites, la valeur de  $x$  est égale au rapport constant qui existe entre les exposans.

Supposons, en second lieu, que  $a$  et  $b$  soient fractionnaires et égaux à  $\frac{h}{h'}$ ,  $\frac{k}{k'}$ ; l'équation  $a^m = b^n$  devient

$$\left(\frac{h}{h'}\right)^m = \left(\frac{k}{k'}\right)^n, \quad \text{d'où} \quad h^m k'^n = h'^m k^n.$$

Or,  $h$  et  $h'$ ,  $k$  et  $k'$  pouvant toujours être regardés comme premiers entre eux, il en est de même de  $h^m$  et  $h'^m$ ,  $k^n$  et  $k'^n$ ; ainsi, pour que l'égalité précédente subsiste, il faut que l'on ait séparément  $h^m = k^n$ ,  $h'^m = k'^n$ , ce qui conduit à des conditions semblables à celles ci-dessus, entre les numérateurs et les dénominateurs, respectivement comparés entre eux.

212. *Cas particuliers.* 1°. Si  $a$  et  $b$ , étant des nombres en-

tiers, ne renferment qu'un seul facteur premier,  $x$  est nécessairement commensurable.

Soit l'équation  $4^x = 32$ , qui revient à  $2^{2x} = 2^5$ ;

il en résulte  $2x = 5$ , d'où  $x = \frac{5}{2}$ .

Soit encore  $27^x = 2187$ , ou  $3^{3x} = 3^7$ , on a  $x = \frac{7}{3}$ .

2°. Si  $a$  n'est composé que de facteurs premiers élevés à la première puissance, il faut que  $b$  soit une puissance parfaite de  $a$ , pour que  $x$  soit commensurable; en sorte que  $x$  est, dans ce cas, un nombre entier, ou bien, il est incommensurable.

En effet, soit  $a = \alpha \zeta \gamma \delta$ , d'où  $b = \alpha^{p'} \zeta^{q'} \gamma^{r'} \delta^{s'}$ ; l'équation  $a^m = b^n$  devient  $\alpha^m \zeta^m \gamma^m \delta^m = \alpha^{p'n} \zeta^{q'n} \gamma^{r'n} \delta^{s'n}$ ; d'où l'on déduit  $m = p'n = q'n = r'n = s'n$ ; ou bien, .....  $p' = q' = r' = s'$ ; donc  $b = \alpha^{p'} \zeta^{p'} \gamma^{p'} \delta^{p'} = (\alpha \zeta \gamma \delta)^{p'} = a^{p'}$ , et par conséquent  $x = p'$ .

Ainsi, soit  $a = 10 = 2 \times 5$ ; il faut que  $b$  soit une puissance parfaite de 10, pour que  $x$  puisse être commensurable.

### *Théorie des logarithmes.*

213. *Introduction.* Si l'on suppose que dans l'équation  $a^x = y$ ,  $a$  conservant toujours la même valeur, on remplace  $y$  par tous les nombres absolus possibles, on pourra, pour chaque valeur de  $y$ , déterminer, par la méthode du n° 210, la valeur de  $x$ , sinon exactement, du moins avec un aussi grand degré d'approximation que l'on voudra.

Supposons d'abord  $a > 1$ .

Si l'on fait successivement  $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ , il en résulte  $y = a^x$ , ou  $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, \dots$ ; donc, toutes les valeurs de  $y$  plus grandes que l'unité sont produites par des puissances de  $a$ , dont les exposants sont positifs, entiers ou fractionnaires; et la valeur de  $x$  est d'autant plus grande que celle de  $y$  est elle-même plus grande.

Faisons ensuite  $x = 0, -1, -2, -3, -4, -5, \dots$ ,

il en résulte  $y = a^0$ , ou  $1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^5}, \dots$

donc, toutes les valeurs de  $y$ , plus petites que l'unité, sont produites par des puissances de  $a$ , dont les exposans sont NÉGATIFS; et la valeur de  $x$  est d'autant plus grande, négativement, que la valeur de  $y$  se rapproche plus de 0.

Soit au contraire,  $a < 1$  et égal à une fraction  $\frac{1}{a'}$ ; en faisant  $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ ,

on trouve  $y = \left(\frac{1}{a'}\right)^0$ , ou  $1, \frac{1}{a'}, \frac{1}{a'^2}, \frac{1}{a'^3}, \frac{1}{a'^4}, \frac{1}{a'^5}, \dots$

et, si l'on fait  $x = 0, -1, -2, -3, -4, -5, \dots$ ,

on obtient  $y = \left(\frac{1}{a'}\right)^0$  ou  $1, a', a'^2, a'^3, a'^4, a'^5, \dots$ ;

c'est-à-dire que, dans l'hypothèse de  $a < 1$ , tous les nombres sont engendrés avec les diverses puissances de  $a$ , dans un ordre inverse de celui où ils le sont lorsqu'on suppose  $a > 1$ .

Mais il n'en résulte pas moins cette conséquence générale, que tous les nombres absolus possibles peuvent être engendrés avec un nombre absolu quelconque, mais constant, en l'élevant à des puissances convenables.

N. B. Il faut toutefois supposer  $a$  différent de l'unité, car l'on sait que toutes les puissances de 1 sont égales à 1.

214. Cela posé, concevons que l'on ait formé une table renfermant, d'une part, tous les nombres entiers, et à côté de ces nombres, les exposans des puissances auxquelles il faudrait élever un nombre invariable, pour former tous ces nombres; on aura l'idée d'une table de logarithmes.

On appelle en général, logarithme d'un nombre, l'exposant de la puissance à laquelle il a fallu élever un certain nombre invariable, pour produire le premier nombre.

Le nombre invariable peut d'abord être pris tout-à-fait arbitrairement (pourvu qu'il soit  $>$  ou  $<$  1); mais une fois choisi, il doit rester le même pour la formation de tous les nombres, et porter le nom de *base* du système de logarithmes.

Quelle que soit la base que l'on a choisie, *le logarithme de la base est l'unité, et le logarithme de 1 est 0.*

En effet, on a 1°.  $a^1 = a$ , d'où  $\log a = 1$ ,

2°.  $a^0 = 1$ , d'où  $\log 1 = 0$ .

(On désigne ordinairement, pour abréger, le mot logarithme par les trois premières lettres *log*, ou simplement par la première lettre *L*, que l'on fait suivre d'un point et du nombre que l'on considère.)

Voyons actuellement de quelles propriétés jouit une table de logarithmes, par rapport aux calculs numériques.

215. *Multiplication et division arithmétiques.* Soit d'abord, une suite de nombres  $y, y', y'', y'''$ ... à multiplier entre eux. Désignons par  $a$  la base d'un système de logarithmes (qu'on suppose déjà calculés), et par  $x, x', x'', x'''$ ... les logarithmes de  $y, y', y'', y'''$ ...

On a, d'après la définition (n° 214), la suite d'équations

$$y = a^x, \quad y' = a^{x'}, \quad y'' = a^{x''}, \quad y''' = a^{x'''} \dots$$

Multipliant ces équations membre à membre, et appliquant la règle des exposans établie n° 180, on trouve

$$yy'y''y''' \dots = a^{x+x'+x''+x'''+\dots}$$

Donc,  $\log yy'y''y''' \dots = x+x'+x''+x'''+\dots = \log y + \log y' + \log y'' + \dots$ ; c'est-à-dire que *le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs de ce produit.*

Soient en second lieu deux nombres  $y$  et  $y'$  à diviser l'un par l'autre,  $x$  et  $x'$  leurs logarithmes, on a encore les équations

$$y = a^x, \quad y' = a^{x'}; \quad \text{d'où l'on déduit (n° 180)} \quad \frac{y}{y'} = a^{x-x'}.$$

Donc, 
$$\log \frac{y}{y'} = x - x' = \log y - \log y';$$

c'est-à-dire que le logarithme du quotient d'une division est égal à la différence entre le logarithme du dividende et le logarithme du diviseur.

*Conséquences de ces deux propriétés.* Si l'on a une multiplication à effectuer, en prenant dans la table les logarithmes des facteurs et faisant la somme de ces logarithmes, on aura le logarithme du produit; donc, en cherchant ce nouveau logarithme dans la table, et prenant le nombre qui lui correspond, on obtiendra le produit demandé. Ainsi, par une simple addition, on trouve le résultat d'une multiplication.

Dé même, si l'on a à diviser un nombre par un autre, on retranche le logarithme du diviseur de celui du dividende, puis on cherche à quel nombre correspond la différence; c'est le quotient cherché. Ainsi, par une simple soustraction, on obtient le quotient d'une division.

216. *Formation des puissances et extraction des racines.* Soit, en général, un nombre  $y$  à élever à la puissance  $\frac{m}{n}$ ; désignant toujours par  $a$  la base, et par  $x$  le logarithme de  $y$ , on a l'équation

$$y = a^x,$$

d'où, élevant les deux membres à la puissance  $\frac{m}{n}$ ,

$$y^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n} \cdot x}.$$

Donc, 
$$\log y^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x = \frac{m}{n} \cdot \log y;$$

c'est-à-dire que le logarithme d'une puissance quelconque d'un nombre est égal au produit du logarithme du nombre par l'exposant de la puissance.

Soit, comme cas particulier,  $n = 1$ ; il en résulte.....  
 $\log y^m = m \cdot \log y$ , équation susceptible d'un énoncé analogue au précédent.



Soit maintenant  $m = 1$ ,  $n$  étant quelconque; il en résulte

$$\log y^{\frac{1}{n}} \text{ ou } \log \sqrt[n]{y} = \frac{1}{n} \cdot \log y;$$

c'est-à-dire que le logarithme d'une racine de degré quelconque d'un nombre est égal au quotient du logarithme de ce nombre, divisé par l'indice de la racine.

*Conséquence.* Pour former une puissance quelconque d'un nombre, il suffit de prendre le logarithme de ce nombre dans la table, de le multiplier par l'exposant de la puissance, puis de chercher le nombre correspondant à ce produit. On a ainsi la puissance demandée.

De même, pour extraire une racine, il suffit de diviser le logarithme du nombre proposé par l'indice de la racine, puis de chercher à quel nombre correspond le quotient; on a la racine demandée. Ainsi, par une simple multiplication et une simple division, on trouve le résultat d'une formation de puissance et d'une extraction de racine, opérations dont les procédés ordinaires sont, comme on l'a vu, très laborieux.

217. Les propriétés que l'on vient de démontrer sont indépendantes de toute espèce de système de logarithmes; mais les conséquences qui en ont été déduites, c'est-à-dire l'usage qu'on en peut faire dans les calculs numériques, supposent la construction d'une table, renfermant d'un côté tous les nombres, et de l'autre les logarithmes de ces nombres, calculés d'après une base donnée. Or, pour former cette table, il faut, comme nous l'avons déjà dit, en considérant l'équation  $a^x = y$ , faire passer  $y$  par tous les états de grandeur possibles, et déterminer la valeur de  $x$  correspondante à chacune des valeurs de  $y$ , d'après la méthode du n° 209.

Les tables dont on se sert ordinairement sont celles dont la base est égale à 10, et leur construction se réduit à la résolution de l'équation  $10^x = y$ . En faisant successivement  $y$  égal à la suite des nombres naturels, 1, 2, 3, 4, 5, 6..., on a à résoudre les équations

$$10^x = 1, \quad 10^x = 2, \quad 10^x = 3, \quad 10^x = 4, \dots$$

Observons d'ailleurs qu'il suffit de calculer directement, d'après la méthode du n° 209, les logarithmes des nombres premiers 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17...; car tous les autres nombres entiers résultant de la multiplication de ces différents facteurs, leurs logarithmes peuvent (n° 215) s'obtenir par l'addition des logarithmes des nombres premiers.

C'est ainsi que, 6 étant décomposable en  $2 \times 3$ , on a

$$\log 6 = \log 2 + \log 3;$$

de même,  $24 = 2^3 \times 3$ ; donc  $\log 24 = 3 \log 2 + \log 3$ .

Soit encore  $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ ; il en résulte

$$\log 360 = 3 \log 2 + 2 \log 3 + \log 5.$$

Il suffisait également de placer dans les tables les logarithmes des nombres entiers; car, en vertu de la propriété (n° 215) relative à la division, on obtient le logarithme d'un nombre fractionnaire, en retranchant le logarithme du diviseur de celui du dividende.

218. En supposant déjà construite une première table de logarithmes, il est facile d'en construire tant d'autres que l'on veut, au moyen de celle-là.

Soient en effet  $a$  la base d'un premier système déjà formé,  $b$  la base d'un nouveau système à construire; désignons par  $N$  un nombre quelconque, par  $\log N$  et  $X$ , ses deux logarithmes calculés d'après les bases  $a$  et  $b$ ; on a l'équation  $b^X = N$ .

D'où, en prenant les logarithmes des deux membres, dans le système dont la base est  $a$ ,

$$X, \log b = \log N.$$

Donc

$$X = \frac{\log N}{\log b}.$$

Ce qui prouve que, connaissant le logarithme d'un nombre dans un premier système, pour avoir le logarithme du même nombre dans un second système, il faut diviser le logarithme du nombre calculé dans le premier système, par le logarithme de la nouvelle base, calculé aussi dans l'ancien système.

Ainsi le logarithme de 4, dans le système dont la base est 3, a pour valeur  $\frac{\log 4}{\log 3}$ ,  $\log 4$  et  $\log 3$  étant deux logarithmes calculés dans le système connu dont la base est 10.

Soient  $N, N', N'' \dots$  une suite de nombres,  $a$  la base d'un système déjà formé,  $b$  celle d'un système à construire; on a la série d'équations,

$$X = \frac{\log N}{\log b} = \frac{1}{\log b} \cdot \log N; X' = \frac{1}{\log b} \cdot \log N'; X'' = \frac{1}{\log b} \cdot \log N'' \dots;$$

d'où l'on voit qu'une première table étant déjà formée, si l'on veut en construire une nouvelle, il n'y a qu'à multiplier les logarithmes du premier système par la quantité constante  $\frac{1}{\log b}$ . Cette quantité constante, qui sert à passer d'une table à une autre, s'appelle *module* de la nouvelle table par rapport à l'ancienne.

### § III. Disposition et usage des tables ordinaires.

Quoique, dans toutes les tables connues, on ait placé en tête de l'ouvrage une explication sur la manière dont elles sont disposées, et sur l'usage qu'on peut en faire, nous croyons devoir entrer dans quelques détails à ce sujet, parce que nous nous sommes aperçu, dans nos cours, que les élèves qui entendaient fort bien la théorie des logarithmes, étaient néanmoins embarrassés dans les applications les plus simples de cette théorie, faute de secours suffisants pour effectuer ces applications.

Nous supposons que l'on ait entre les mains les tables de Callet, parce qu'au moyen de tables moins étendues, il est impossible d'obtenir des résultats suffisamment exacts. Les principes que nous allons établir n'en seront pas moins applicables à ces autres tables.

219. On a déjà vu (n° 212) que, dans le système dont la base est 10, il n'y a que les puissances parfaites de 10, telles que

100, 1000, 10000... qui puissent avoir des logarithmes *commensurables*. Tous les autres nombres entiers ont des logarithmes *incommensurables*, que l'on n'a pu obtenir qu'avec un certain degré d'approximation.

Les *tables de Callet* donnent ces logarithmes exprimés en fractions décimales, et exacts jusqu'au 7<sup>e</sup> chiffre décimal inclusivement.

Cela posé, voici quelques notions importantes sur la composition des logarithmes ordinaires.

Si l'on fait dans l'équation  $10^x = y$ ,

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots n-1, n,$$

il en résulte  $y = 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 \dots 10^{n-1}, 10^n$ .

Posant ensuite  $x = 0, -1, -2, -3, -4 \dots -(n-1), -n$ ,

on trouve  $y = 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{10^{n-1}}, \dots, \frac{1}{10^n}$ .

Donc, 1°. les logarithmes de tous les nombres plus grands que l'unité sont *positifs* et croissent depuis 0 jusqu'à l'infini; les logarithmes des fractions sont *négatifs*, mais ils ont une valeur absolue d'autant plus grande, que la fraction est plus petite, en sorte que, si l'on considère une fraction moindre que toute grandeur donnée, son logarithme est *négatif*, mais sa valeur absolue est *infinitement grande*, ce que l'on exprime d'une manière abrégée, en disant : *zéro a pour logarithme l'infini négatif*, ou  $\log 0 = -\infty$ .

2°. En considérant un nombre entier d'un, de deux, de trois..., et en général de  $n$  chiffres, comme ce nombre est compris entre 1 et 10, 10 et 100..., 100 et 1000, et en général entre  $10^{n-1}$  et  $10^n$ , il s'ensuit que la partie entière de son logarithme est égale à 0, 1, 2, 3...  $n-1$ ; c'est-à-dire que cette partie entière renferme *autant d'unités moins une* qu'il y a de chiffres dans le nombre. Ainsi 3749, par exemple, étant compris entre 1000 et 10000, ou  $10^3$  et  $10^4$ , son logarithme a 3 pour partie entière; quant à la fraction, elle est,

comme nous l'avons déjà dit, réduite ordinairement en décimales.

On a donné le nom de *caractéristique* à la partie entière du logarithme d'un nombre, parce que l'on voit, à sa seule inspection, entre quels ordres d'unités tombe le nombre qui correspond à ce logarithme. Par exemple, que la *caractéristique* soit égale à 5; on peut conclure que le nombre correspondant est compris entre  $10^5$  et  $10^6$ , ou est composé de *six* chiffres. La *caractéristique se compose d'autant d'unités moins une qu'il y a de chiffres dans le nombre.*

220. Connaissant le logarithme d'un nombre quelconque, on obtient, par l'addition de 1, 2, 3... unités à la *caractéristique seule*, le logarithme d'un nombre 10, 100, 1000... fois plus grand. En effet, on a (n° 215)

$$\log(a \times 10^n) = \log a + \log 10^n = \log a + n;$$

ce qui prouve qu'il suffit d'ajouter  $n$  unités à  $\log a$ , pour avoir celui d'un nombre  $10^n$  fois plus grand que  $a$ ; or, cette addition ne peut porter que sur la *caractéristique*.

Réciproquement, on a (n° 215)

$$\log \frac{a}{10^n} = \log a - \log 10^n = \log a - n;$$

ainsi, il suffit de retrancher  $n$  unités de  $\log a$ , pour avoir celui d'un nombre  $10^n$  fois plus petit que  $a$ ; et cette soustraction peut se faire sur la *caractéristique seule*.

C'est là ce qui rend le système dont la base est 10 plus avantageux que tout autre. Comme on a souvent besoin de multiplier ou diviser par 10, 100, 1000... ces opérations se réduisent à de simples additions ou soustractions d'unités. Les *logarithmes des fractions décimales* sont, à la *caractéristique* près, les mêmes que ceux des nombres que l'on obtient en faisant abstraction de la virgule.

*Usage des tables.*

Comme il était impossible de placer dans les tables les logarithmes de tous les nombres, on y a inséré seulement les logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à une certaine limite (celles de Callet vont jusqu'à 108000); mais si, pour effectuer un calcul numérique, on veut employer le secours des logarithmes, il est indispensable de savoir résoudre ces deux questions: 1°. un nombre quelconque étant donné, déterminer son logarithme; 2°. un logarithme étant donné, déterminer le nombre qui lui appartient.

Voici le moyen de résoudre ces deux questions:

**221. Un nombre étant donné, déterminer son logarithme?**

Considérons d'abord un nombre entier.

Si le nombre proposé n'exécède pas 108000, on cherche ce nombre dans la colonne des tables, marquée N, et l'on trouve immédiatement à côté son logarithme.

Soit maintenant le nombre 34735879, qui excède les limites des tables.

Ce nombre ayant 8 chiffres, la caractéristique de son logarithme est égale à 7; ainsi la question se réduit à trouver la partie décimale de ce logarithme.

Or, il résulte de ce qui a été dit n° 220, que cette partie décimale est la même que celle de  $\log 34735,879$ .

Par cette préparation, qui consiste à *séparer vers la droite du nombre assez de chiffres pour que la partie à gauche se trouve dans la table*, on obtient un nombre compris entre 34735 et 34736; ainsi son logarithme est égal à  $\log 34735$ , plus une partie de la différence qui existe entre  $\log 34736$  et  $\log 34735$ . Or, on a, d'après la table,  $\log 34735 = 5407673$ . (Il est inutile de considérer la caractéristique.)

La table donne aussi pour différence entre  $\log 34736$  et  $\log 34735$ , ... 125 unités de l'ordre du 7<sup>e</sup> chiffre décimal.

Cela posé, pour obtenir la partie de cette différence qui, ajoutée à 5407673, donne  $\log 34735,879$ , on établit cette

proportion : Si, pour une unité de différence entre les deux nombres 34736 et 34735, on a 125 dix-millionièmes de différence entre leurs logarithmes, combien pour 0,879 entre 34735,879 et 34735, aura-t-on de différence entre leurs logarithmes ? ou bien,

$$1 : 125 :: 0,879 : x = 125 \times 0,879 = 109,875;$$

et ce produit 109,875, ou plutôt 110 dix-millionièmes, exprime la quantité à ajouter à 5407673, ce qui donne 5407783. Donc enfin, le logarithme du nombre proposé est 7,5407783.

Dans la pratique, on dispose ainsi les calculs :

$$\begin{array}{r} \text{Nombre proposé, } 34735879; \\ \text{séparant trois chiffres vers la droite, } 34735,879 \\ \log 34735 = 5407673 \end{array}$$

Différence entre les deux logarithmes

$$\text{consécutifs.} \dots\dots\dots 125$$

$$\text{Différence des nombres} \dots\dots\dots 0,879$$

$$\text{Produit.} \dots\dots\dots 109,875$$

$$\text{à ajouter à } \log 34735 \dots\dots\dots 110$$

$$\text{Somme} = 5407783;$$

donc,  $\log 34735879 = 7,5407783$ .

Soit, pour second exemple, 7054039;

séparant seulement deux chiffres, 70540,39,

$$\log 70540 = 8484355;$$

$$\text{différence de la table.} \dots\dots\dots 62$$

$$\text{différence des nombres.} \dots\dots\dots 0,39$$

$$\text{Produit.} \dots\dots\dots 24,18$$

$$\text{à ajouter à } \log 70540 \dots\dots\dots 24$$

$$\text{Somme} = 8484379.$$

mais le nombre proposé a sept chiffres, donc

$$\log 7054039 = 6,8484379.$$

On trouverait de même, l. 70004739 = 7,8451274.

*Remarque.* Pour résoudre la question précédente, on a établi une proportion entre les différences des nombres et les différences de leurs logarithmes. Nous démontrerons (n° 237) que cette proportion n'est jamais exacte; mais elle approche d'autant plus de l'exactitude, que les nombres pour lesquels on l'établit sont plus grands. Nous ferons voir que, lorsqu'on fait usage des tables de Callet, l'erreur n'influe pas sur le 7<sup>e</sup> chiffre décimal du logarithme, tant que les nombres sont au-dessus de 1000. Voilà pourquoi, quand un nombre excède les limites des tables, on doit séparer vers sa droite le moins de chiffres possible.

Supposons que le nombre soit fractionnaire.

Si le nombre est composé d'un entier et d'une fraction, on réduit d'abord l'entier en fraction, puis on retranche le logarithme du dénominateur, de celui du numérateur.

Ainsi,

$$\log 359\frac{27}{43} = \log \frac{15467}{43} = 4,1893218 - 1,6334685 = 2,5558533.$$

Si le nombre est une fraction, le logarithme est négatif, et on l'obtient en retranchant le logarithme du numérateur de celui du dénominateur et affectant le résultat du signe —;

$$\text{ainsi, } \log \frac{7}{9} = -(\log 9 - \log 7) = -0,10914447.$$

Si le nombre est une fraction décimale, on fait d'abord abstraction de la virgule; puis, après avoir obtenu le logarithme du nouveau nombre, on retranche de ce logarithme autant d'unités qu'il y avait de chiffres décimaux.

$$\begin{aligned} \text{Exemples: } \log 75,47325 &= \log 7547325 - 5 = 1,8777931; \\ \log 0,0739 &= \log 739 - 4 = -(4 - \log 739) = -1,1313556; \\ \log 0,004734 &= \log 4734 - 6 = -(6 - \log 4734) = -2,3477327. \end{aligned}$$



Si le nombre est une fraction décimale périodique, on commence par la convertir en fraction ordinaire, et on agit comme ci-dessus; ainsi,

$$\log 37,375375\dots = \log 37 \frac{375}{999} = 1,5725856.$$

De même,

$$\log 3,1430783078\dots = \log \frac{3142764}{999900} = 1,4973551.$$

222. Un logarithme étant donné, trouver le nombre qui lui correspond?

Il se présente deux cas principaux: ou le logarithme donné est positif, ou il est négatif.

*Premièrement*, s'il est positif et que sa caractéristique soit 4, qui est la plus forte des tables, on cherche ce logarithme parmi ceux des nombres de cinq chiffres; et il peut arriver qu'il soit dans la table, auquel cas on trouve à côté le nombre correspondant.

Ou bien, ce logarithme tombe entre deux logarithmes consécutifs, et dans ce cas, le nombre cherché est égal au plus petit des deux nombres qui correspondent à ces logarithmes, plus une certaine fraction, qu'il faut déterminer, du moins *approximativement*.

Désignons par L le logarithme proposé, par log N le plus petit des deux logarithmes consécutifs qui le comprennent. Soient d'ailleurs  $\delta$  la différence (donnée par la table) entre les deux logarithmes consécutifs, et  $\delta'$  la différence entre L et log N; pour obtenir la fraction cherchée, on établit la proportion:

*Si pour  $\delta$ , différence entre deux logarithmes consécutifs, log N et log (N + 1), on a une unité de différence entre les nombres, combien pour  $\delta'$ , différence entre L et log N, doit-on avoir de différence entre les nombres?*

ou bien,  $\delta : 1 :: \delta' : x = \frac{\delta'}{\delta}$

et la valeur de ce quatrième terme est ce qu'il faut ajouter à  $N$  pour avoir le nombre demandé.

Il sera démontré plus loin que l'erreur commise lorsqu'on établit cette proportion, n'influe pas sur les centièmes du nombre cherché, pourvu que le nombre soit au-dessus de 10000.

*Exemples.* Soit proposé le logarithme . . . . 4,7325679.

On trouve dans la table, pour le plus petit des deux logarithmes qui le comprennent. . . . . 4,7325626

Différence. . . . . 53.

Le nombre qui correspond à 4,7325626 est 54021;  
la différence entre log 54022 et log 54021 est 81.

Proportion,  $81 : 1 :: 53 : x = \frac{53}{81} = 0,65$ , à 0,01 près;

done  $4,7325679 = \log 54021,65$ .

On trouverait de même,  $4,0794685 = \log 12007,94$ , à 0,01 près.

Si, le logarithme étant positif, sa caractéristique est moindre que 4, on commence par s'assurer s'il est tout entier dans la table, auquel cas on aurait de suite le nombre correspondant.

S'il n'y est pas tout entier, on rend d'abord la caractéristique égale à 4, par l'addition d'un nombre convenable d'unités (afin de pouvoir établir la proportion, qui, comme nous l'avons déjà dit, n'est suffisamment rigoureuse que lorsque les nombres sont au-dessus de 10000); on recherche le nombre qui correspond à ce nouveau logarithme, après quoi l'on divise ce nombre par 10, 100, 1000...., suivant que l'on a été obligé d'ajouter 1, 2, 3.... unités à la caractéristique.

Ainsi, soit proposé le logarithme 2,4567398.

Ce logarithme n'est pas tout entier dans la table; mais en lui ajoutant 2 unités, on trouve  $4,4567398 = \log 28624,63$ , à 0,01 près; donc (n° 220).

On trouverait pareillement  $0,3472586 = \log 2,224634$ , résultat exact à 0,000001 près.

Si la caractéristique excède 4, on la rend égale à 4, par la soustraction d'un nombre convenable d'unités; on détermine le nombre correspondant à ce nouveau logarithme, puis on multiplie ce nombre par 10, 100, 1000....., suivant que l'on a soustrait, 1, 2, 3....., unités de la caractéristique.

Ainsi, soit 7,6840567 le logarithme proposé. En soustrayant 3 unités, on trouve  $4,6840567 = \log 48312,19$ ; donc.....  
 $7,6840567 = \log 48312190$  à une dizaine près. (Les tables ne peuvent donner ici un plus grand degré d'approximation.)

Soit encore 13,7412769; on a  $4,7412769 = \log 55115,90$ , donc  $13,7412769 = \log 5511590000000$ , à une dizaine de millions près.

Secondement, si le logarithme donné est négatif, le nombre qui lui correspond est une fraction que l'on peut obtenir avec un très grand degré d'approximation.

Soit, par exemple,  $-2,4537875$ , le logarithme proposé; on voit déjà, d'après l'inspection de ce logarithme, que le nombre cherché est compris entre 0,01 et 0,001. (Voyez n° 219.)

Pour l'obtenir, commençons par ajouter 7 unités à ce logarithme, ce qui revient à le retrancher de 7,0000000 (cette préparation a pour but de rendre la caractéristique égale à 4). On obtient  $+7 - 2,4537875 = 4,5462125 = \log 35173,25$ ; mais, en ajoutant 7 unités à la caractéristique, on a (n° 220) multiplié le nombre par 10000000; ainsi, pour obtenir la vraie valeur du nombre cherché, il faut avancer la virgule de 7 rangs vers la gauche, ce qui donne

$$-2,4537875 = \log 0,003517325, \text{ à } 0,000000001 \text{ près.}$$

N. B. Le plus souvent, lorsqu'on cherche le nombre correspondant à un logarithme négatif, on n'a pas besoin d'établir la proportion, parce que le nombre entier que l'on trouve d'après la table, donne déjà le degré d'approximation désiré.

On trouvera d'après ces principes,

$$-0,9817496 = \log 0,1042918,$$

$$-3,2781036 = \log 0,00052710.$$

Il est encore un autre moyen de déterminer le nombre correspondant à un logarithme négatif; mais ce moyen conduit ordinairement à un résultat moins exact que le précédent.

Reprenons le logarithme,  $-2,4537875$ , qui revient à  $\log 1 - 2,4537875$  (puisque l'on a  $\log 1 = 0$ ).

Si l'on appelle  $x$  le nombre correspondant à  $2,4537875$ , il vient  $\log 1 - 2,4537875 = \log 1 - \log x = \log \frac{1}{x}$ ; d'où il suit que, pour trouver le nombre demandé, il suffit de diviser l'unité par le nombre qui correspond au logarithme proposé, abstraction faite de son signe.

Mais comme  $x$  ne peut être obtenu qu'avec un degré d'approximation qui est souvent très borné, le quotient de l'unité par ce nombre n'a souvent lui-même qu'une approximation très limitée; en outre, on ne peut déterminer d'une manière précise le degré d'approximation, puisque le dénominateur de la fraction  $\frac{1}{x}$  n'est pas exact; cependant on emploie quelquefois ce moyen, surtout dans les questions qui ne demandent pas une grande exactitude, parce qu'il est le plus expéditif.

223. *Des compléments arithmétiques.* Il arrive fréquemment, dans les applications logarithmiques, que l'on a à déterminer le résultat de l'addition et de la soustraction de plusieurs logarithmes. Or, on a imaginé de ramener cette suite d'opérations à une seule addition, par le moyen des *compléments arithmétiques*.

On appelle *complément arithmétique* d'un logarithme, ce qui manque à ce logarithme, pour valoir 10 unités entières, ou, ce qui revient au même, le résultat que l'on obtient en retranchant le logarithme proposé, de 10.

Ainsi, compl.  $3,4725843 = 10 - 3,4725843 = 6,5274157$ ,  
compl.  $2,7325490 = 10 - 2,7325490 = 7,2674510$ .

On obtient un complément, en retranchant le premier chiffre

à droite, s'il est significatif, de 10, et tous les autres de 9. Ce complément peut donc être formé, pour ainsi dire, d'après l'inspection d'un logarithme, ou d'après sa dictée. Cela posé, voici l'usage des complémens arithmétiques.

Que l'on ait à trouver le résultat numérique de l'expression  $l - l' + l'' - l''' + l'''' - l'''' + \text{etc.}$  . . . ,  $l, l', l'', \dots$  étant des logarithmes à ajouter et à soustraire entre eux.

On observera que l'expression peut se mettre sous la forme

$$l + l' + l'' + \overline{10 - l'} + \overline{10 - l''} + \overline{10 - l'''} - 30,$$

ou bien

$$l + l' + l'' + \text{comp. } l' + \text{comp. } l'' + \text{comp. } l''' - 30;$$

c'est-à-dire que, pour avoir le résultat cherché, il faut faire la somme des logarithmes additifs et des complémens des logarithmes soustractifs, puis retrancher de cette somme, autant de fois 10, que l'on a pris de complémens.

Par le moyen ordinaire, il faudrait faire la somme des termes additifs, celle des termes soustractifs, puis soustraire la plus petite somme de la plus grande, ce qui entraînerait dans deux additions et une soustraction; tandis que par celui-ci, on n'a qu'une seule addition à effectuer, sauf les opérations qui consistent à prendre les complémens; et qui sont trop simples pour entrer en ligne de compte.

224. L'emploi des complémens donne naissance à une espèce de logarithmes qui est assez commode dans la pratique.

Soit proposé de trouver le logarithme de  $\frac{7}{15}$ .

$$\text{On a } \log \frac{7}{15} = \log 7 - \log 15 = \log 7 + \text{comp. } \log 15 - 10,$$

$$\log 7 = 0,84509804$$

$$\text{comp. } \log 15 = 8,82390874$$

$$\hline 9,66900678$$

$$\text{retranchant } 10, \dots - 0,33099322$$

$$\text{ou bien, } \dots - 1,66900678.$$

Le résultat de l'addition de comp. log. 15 avec log 7 étant 9,66900678, il faut en retrancher 10, ce qui peut se faire de deux manières : ou bien, en soustrayant ce résultat de 10, et prenant le reste avec le signe —, ce qui donne —0,33099322, ou bien, retranchant seulement 10 de la caractéristique 9, sans toucher à la partie décimale, ce qui donne —1.66900678, c'est-à-dire un logarithme dont la caractéristique est négative, et la partie décimale positive.

On a soin, pour distinguer ce logarithme d'un logarithme entièrement négatif, de mettre un point au lieu d'une virgule. Il serait peut-être plus convenable de l'écrire ainsi : ..... —1+0,66900678, car voilà sa véritable signification; mais l'autre manière de l'écrire est plus abrégée.

On obtient encore cette espèce de logarithmes, en cherchant le logarithme d'une fraction décimale. Par exemple, on trouverait que

$$\log 0,00534 = \log 534 - 5 = 2,72754126 - 5 = -3,72754126.$$

L'usage de ces logarithmes présente quelques avantages sur celui des logarithmes entièrement négatifs : nous le verrons bientôt.

Nous nous bornerons, pour le moment, à observer,

1°. Que, si l'on avait à déterminer le nombre qui correspond à un logarithme de cette espèce, une simple addition d'un nombre convenable d'unités à sa caractéristique, suffirait pour la préparation du logarithme.

Soit, par exemple, —3.4720563 le logarithme proposé; en ajoutant 7 unités à la caractéristique, il vient 4,4720563, logarithme entièrement positif, et le nombre correspondant s'obtiendrait comme il a été dit, n° 222; après quoi, l'on diviserait le nombre par 10000000, ou par 10<sup>7</sup>.

2°. Que, si l'on a à multiplier le logarithme — 3.4720563, par un nombre quelconque, 8 par exemple, on obtient d'abord pour la partie décimale.

|               |  |
|---------------|--|
| 8             |  |
| 3,7764504     |  |
| — 24          |  |
| — 21 7764504. |  |

et pour la caractéristique.....

ce qui donne pour résultat.....

3°. Que, si l'on a à diviser ce même logarithme par 8, on commence par ajouter à la caractéristique assez d'unités *négligées* pour qu'on puisse en prendre le 8<sup>e</sup> exactement; c'est-à-dire qu'on mette le logarithme  $-3.4720553$  sous la forme  $-8 + 5,4720563$ . Prenant le 8<sup>e</sup> de cette nouvelle expression, on trouve  $-1.6840070$ .

Dans les n<sup>os</sup> suivans, nous verrons l'usage de ces opérations.

#### § IV. Applications de la théorie des logarithmes.

225. *Multiplication et division.* On demande la valeur approchée du produit  $\frac{31}{75} \times \frac{13}{12} \times \frac{47}{48}$ .

Appelons  $x$  ce produit, on a (n<sup>o</sup> 215),

$$\log x = \log 31 - \log 75 + \log 13 - \log 12 + \log 47 - \log 48.$$

$$\log 31 = 1,49136169,$$

$$\log 13 = 1,11394335,$$

$$\log 47 = 1,67209786,$$

$$\text{comp. log } 75 = 8,12493874,$$

$$\text{comp. log } 12 = 8,92081875,$$

$$\text{comp. log } 48 = 8,31875876,$$

$$- 1.64191915 = 29,64191915 - 30;$$

$$\text{ajoutant } \dots\dots\dots 5$$

$$\text{on obtient } \dots\dots\dots 4,6419191$$

$$4,6419120 = \log 43844.$$

$$\text{Différence } \dots\dots\dots 89$$

$$89 \mid 89 = 0,90.$$

$$\text{Différence tabulaire } \dots\dots\dots 99$$

$$99 \mid 99$$

$$\text{Donc } \dots\dots\dots 4,6419191 = \log 43844,90;$$

ainsi, le produit demandé est 0,4384490 à 0,0000001 près.

*Formation des puissances.* Observons avant tout que, comme pour obtenir le résultat d'une élévation aux puissances, il faut multiplier le logarithme du nombre par l'exposant de la puissance, on doit prendre d'abord le logarithme du nombre proposé avec plus de 7 décimales, si l'on veut avoir un produit

exact jusqu'à la 7<sup>e</sup> décimale inclusivement. Or, l'on trouve dans l'ouvrage de Callet, à la suite des tables ordinaires, une autre table qui donne les logarithmes avec 20 décimales; ainsi l'on peut toujours prendre ces logarithmes avec deux ou trois décimales de plus que dans les tables ordinaires.

Cela posé, soit à former la 5<sup>e</sup> puissance de 29; on a (n° 216)

$$\log (29)^5 = 5 \log 29;$$

$$\text{or} \quad \log 29 = 1,462397998,$$

$$\text{d'où} \quad 5 \log 29 = 7,311989990,$$

$$\text{ôtant 3 unités.....} \quad 4,3119900$$

$$4,3119868 = \log 20511.$$

$$\text{Différence.....} \quad \begin{array}{r|l} 82 & \frac{32}{212} = 0,15; \end{array}$$

$$\text{Différence tabulaire.....} \quad \begin{array}{r|l} 212 & \frac{32}{212} = 0,15; \end{array}$$

donc 20511150 est le nombre cherché à une dizaine près.

Soit encore proposé d'évaluer (2)<sup>64</sup>.

$$\text{On a} \quad \log 3 = 0,3010299956;$$

$$\text{d'où} \quad 64 \log 2 = 19,2649197184$$

$$\text{ôtant 15 unités,} \quad 4,2659197$$

$$4,2659022 = \log 18446$$

$$\text{Différence.....} \quad \begin{array}{r|l} 175 & \frac{175}{235} = 0,74. \end{array}$$

$$\text{Différence tabulaire.} \quad \begin{array}{r|l} 235 & \frac{175}{235} = 0,74. \end{array}$$

$$\text{Ainsi} \quad 4,2659197 = \log 18446,74.$$

Donc le nombre cherché est 18.446.740.000.000.000.000, à dix trillions près; c'est-à-dire que les treize derniers chiffres ne peuvent être donnés par les tables; mais on est censé, dans ces sortes d'exemples, n'avoir pour but que de se former une idée de la grandeur du nombre; et l'on voit avec quelle promptitude on y parvient.

Soit, pour nouvel exemple, à évaluer  $\left(\frac{2}{3}\right)^{11}$ .

Voici le tableau des calculs, en employant les compléments et sans les employer :



*Par compléments.*

$$\begin{array}{rcl}
 \log 2 & = & 0,3010299956 \\
 \text{c. log } 3 & = & 9,5228787453 \\
 \hline
 \log \frac{2}{3} & = & -1,8239087409 \\
 \text{11 log } \frac{2}{3} & = & -2,0629961499 \\
 \text{ajoutant } 6 & & \\
 \hline
 \text{on obtient } 4,0629961.
 \end{array}$$

Le nombre correspondant à ce logarithme est 11561,02; donc 0,01156102 est le nombre demandé, à 0,0000001 près.

*Sans compléments.*

$$\begin{array}{rcl}
 \log 3 & = & 0,4771212547 \\
 \log 2 & = & 0,3010299956 \\
 \hline
 \log \frac{2}{3} & = & -0,1760912591 \\
 \text{11 log } \frac{2}{3} & = & -1,9370038510 \\
 \text{ajoutant } + 6 & & \\
 \hline
 \text{on obtient } 4,0629961.
 \end{array}$$

Le reste du calcul est le même que ci à côté.

*Extraction des racines.* Il suffit, pour cette opération, de prendre les logarithmes avec sept décimales.

On demande la racine 7<sup>ème</sup> de 1162049.

$$\text{On a (n° 216), } \log \sqrt[7]{1162049} = \frac{1}{7} \log 1162049.$$

|                                        |                            |                |        |
|----------------------------------------|----------------------------|----------------|--------|
|                                        | $\log 11620 = 0652061$     | Diff. tabul.   | 374    |
| $\log 11620,49 - \log 11620 =$         | 183                        | Diff. de nomb. | 0,49   |
|                                        | $\log 11620,49 = 0652244$  |                | 3366   |
| Donc $\log 1162049 = 6,0652254$        |                            |                | 1496   |
| $\frac{1}{7} \log 1162049 = 0,8664606$ |                            |                | 183,26 |
| ajoutant 4,                            | 4,8664606                  |                |        |
|                                        | 4,8664587 = $\log 73529$ . |                |        |

Différence..... 19

Différence tabulaire... 59 |  $\frac{19}{59} = 0,32;$

donc  $4,8664606 = \log 73529,32$ .

Ainsi 7,352932 est la racine demandée à 0,000001 près

Soit à évaluer  $\sqrt[11]{\frac{13}{27}}$ ; on a l.  $\sqrt[11]{\frac{13}{27}} = \frac{1}{11} (\log 13 - \log 27)$ .

*Par compléments.*

$$\begin{array}{rcl} \text{l. } 13 & = & 1,11394335 \\ \text{compl. l. } 27 & = & 8,56863624 \end{array}$$

$$\text{l. } \frac{13}{27} = -1,68257959 = 11 + 10,68257959$$

$$\frac{1}{11} \text{ l. } \frac{13}{27} = -1,97114360;$$

$$\begin{array}{rcl} \text{ajoutant} & 5 & \\ \text{on trouve} & 4,97114360 & = \log 93571,49 \end{array}$$

Donc la racine demandée est 0,9357149, à 0,0000001 près.

On trouvera pareillement

$$\sqrt[7]{\left(\frac{11}{9}\right)^5} = 1,154118; (73)^7 = 11047390000000;$$

$$(0,0457)^{18} = 0,0000000000000000002984.$$

226. *Calcul des expressions algébriques par logarithmes.*

Supposons que l'on ait trouvé pour la valeur de l'inconnue d'un

problème, l'expression  $x = \frac{\sqrt[3]{(a^2 - b^2) \cdot 3a}}{\sqrt{(a+b)} \cdot \sqrt{cd}}$ , et qu'en donnant

à  $a, b, c, d$  des valeurs particulières, on veuille obtenir la valeur numérique correspondante de cette expression; on peut, par le moyen des logarithmes, ramener la question à n'avoir que des additions et soustractions, de simples multiplications et divisions à effectuer.

On a, en effet, d'après les propriétés nos 215 et 216,

$$\text{l. } x = \text{l. } \sqrt[3]{(a^2 - b^2) \cdot 3a} - \text{l. } \sqrt{(a+b)} - \text{l. } \sqrt{cd}.$$

Maïs  $\sqrt[3]{(a-b) \cdot 3a} = \frac{1}{3} [l. (a+b) + l. (a-b) + l. 3 + l. a]$

et  $\sqrt{(a+b)\sqrt{cd}} = \frac{1}{2} [l. (a+b) + \frac{1}{2} l. c + \frac{1}{2} l. d];$

donc

$$l. x = \frac{1}{3} [l. (a+b) + l. (a-b) + l. 3 + l. a] \\ - \frac{1}{2} [l. (a+b) + \frac{1}{2} l. c + \frac{1}{2} l. d],$$

expression qui n'offrira plus que des additions, soustractions et de simples divisions à effectuer, lorsque  $a, b, c, d$  seront donnés numériquement.

Soient, par exemple,  $a=60, b=15, c=16, d=9$ ; l'expression devient

$$l. x = \frac{1}{3} [l. 75 + l. 45 + l. 3 + l. 60] - \frac{1}{2} [l. 75 + \frac{1}{2} l. 16 + \frac{1}{2} l. 9];$$

calculant séparément la somme qui est entre les deux premiers crochets et la somme qui est entre les deux autres, puis prenant le tiers de la première et la moitié de la seconde, on trouvera

$$l. x = 1,92784875 - 1,47712125,$$

ou  $l. x = 0,4507275;$

donc  $x = 2,823108.$

Soit encore l'expression  $x = \frac{2a^4 - 3ab^3 + b^4}{a^3 - 3a^2b + 4b^2c}.$

On peut d'abord, en mettant en évidence le facteur  $a^3$  au numérateur, et le facteur  $a^3$  au dénominateur, présenter l'expression sous la forme

$$x = \frac{a^3 \left( 2a - \frac{3b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^3} \right)}{a^3 \left( a - 3b + \frac{4b^2c}{a^3} \right)} = \frac{a \left( 2a - \frac{3b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^3} \right)}{a - 3b + \frac{4b^2c}{a^3}}.$$

Posons maintenant  $m = \frac{4b^2c}{a^2}$ ,  $n = \frac{3b^3}{a^2}$ ,  $p = \frac{b^4}{a^2}$ ;

l'expression devient  $x = \frac{a(2a - n + p)}{a - 3b + m}$ ,

ou, appliquant les logarithmes,

$$l. x = l. a + l. (2a - n + p) - l. (a - 3b + m),$$

expression facile à calculer, dès que l'on aura trouvé les valeurs

de  $m, n, p$ . Or, les équations  $m = \frac{4b^2c}{a^2}$ ,  $n = \frac{3b^3}{a^2}$ ,  $p = \frac{b^4}{a^2}$ ,

donnent

$$l. m = l. 4 + 2l. b + l. c - 2l. a, \quad l. n = l. 3 + 3l. b - 2l. a, \\ l. p = 4l. b - 3l. a.$$

L'artifice de ces transformations consiste à ramener l'expression fractionnaire à une autre, dont tous les termes soient *linéaires* ou du premier degré, en calculant séparément d'autres expressions qui ne renferment que des multiplications, divisions, formations de puissances à effectuer.

On trouvera de même

$$l. \frac{a^2 - b^2}{bd} = l. (a + b) + l. (a - b) + \text{comp. } l. b + \text{comp. } l. d - 20,$$

$$l. \frac{a^3 - 2ba^2 + bc^2}{a^3 - ba + 4cd} = l. a + l. (a - 2b + h) + \text{comp. } l. (a - b + h') - 10,$$

$h$  et  $h'$  étant calculés d'après les formules

$$l. h = l. b + 2l. c - 2l. a,$$

$$l. h' = l. 4 + l. c + l. d - l. a.$$

227. *Équations exponentielles.* Nous avons exposé (n° 209) une méthode pour résoudre l'équation  $a^x = b$ , et nous en avons déduit la théorie des logarithmes; mais actuellement que les tables sont construites, rien n'empêche d'en faire usage pour résoudre ces sortes d'équations.

Or, si l'on prend les logarithmes des deux membres de l'équation  $a^x = b$ , il vient (n° 216)  $x \times 1.a = 1.b$ ; d'où  $x = \frac{1.b}{1.a}$ .

Reprenons, par exemple, l'équation  $3^x = 15$ , qui, par la méthode du n° 209, a donné  $x = 2,465$ , à 0,001 près; on déduit de cette équation,

$$x = \frac{1.15}{1.3} = \frac{1,17609126}{0,47712125} = 2,465, \dots$$

L'équation  $a^x = b$ , est dite une *équation exponentielle du premier ordre*; mais on peut avoir des équations de la forme  $a^{b^x} = c$ ;  $a^{b^{c^x}} = d, \dots$ ; on les appelle *équations exponentielles du deuxième, troisième, ... ordre*.

Pour se former une idée de l'expression  $a^{b^x}$ , il faut concevoir que  $b$  soit élevé à une puissance d'un degré marqué par  $x$ , et que  $a$  soit ensuite élevé à une puissance d'un degré marqué par  $b^x$ .

Dé même,  $a^{b^{c^x}}$  indique qu'après avoir élevé  $c$  à la puissance d'un degré marqué par  $x$ , on a ensuite élevé  $b$  à la puissance d'un degré marqué par  $c^x$ , et enfin que  $a$  est élevé à une puissance d'un degré marqué par  $b^{c^x}$ .

D'après ces notions, prenons les logarithmes des deux membres de l'équation  $a^{b^x} = c$ ; il vient  $b^x \times 1.a = 1.c$ ; d'où  $b^x = 1. \frac{1.c}{1.a}$ , ou, prenant de nouveau les logarithmes,

$$x \times 1.b = 1. \frac{1.c}{1.a} = 1.1.c - 1.1.a; \text{ donc } x = \frac{1.1.c - 1.1.a}{1.b}$$

[1.c étant une fraction décimale, on peut en déterminer le logarithme d'après les tables, comme on détermine le logarithme d'un tout autre nombre.]

Soit encore à résoudre l'équation  $a^{b^{c^x}} = d$ .

Prenant les logarithmes, on a  $b^{c^x} \times \log a = \log d$ ;

d'où  $b^c = \frac{1. d}{1. a}$ ; prenant de nouveau les logarithmes,  $c = \frac{1.1. d - 1.1. a}{1. b}$ ; et opérant sur cette équation comme sur les précédentes,

$$x \times 1. c = 1. \frac{1.1. d - 1.1. a}{1. b} = 1. (1.1. d - 1.1. a) - 1.1. b;$$

donc 
$$x = \frac{1. (1.1. d - 1.1. a) - 1.1. b}{1. c}.$$

On résoudrait, par un procédé semblable, les équations exponentielles d'un ordre plus élevé. Ces formules sont exactes, considérées algébriquement; mais, dans les applications, il est aisé de voir qu'elles donneraient des valeurs peu approchées, et l'on ne pourrait même se former une idée bien juste du degré d'approximation.

228. *Remarque.* Il peut arriver que, dans le calcul des expressions algébriques, on soit conduit à prendre le logarithme d'un nombre négatif.

Soit, par exemple, à calculer l'expression  $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$ ;

on a  $1. x = 1. (a + b) + 1. (a - b) - 1. c.$

Si l'on suppose  $a < b$ ,  $1. (a - b)$  devient  $1. (-m)$ .

Comment faut-il interpréter ce résultat?

Commençons par faire observer que, dans tout système de logarithmes, les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes. En effet, si la base est positive, il n'existe (n° 213) aucune puissance de cette base qui puisse produire un nombre négatif; mais on ne peut prendre une base négative; car cette quantité élevée à ses diverses puissances produirait des nombres, les uns positifs, les autres négatifs; or, le caractère d'une base, c'est de pouvoir produire tous les nombres consécutifs, lorsqu'on l'élève à des puissances qui croissent progressivement.

Ainsi, il en est du logarithme d'un nombre négatif comme

de sa racine carrée, quatrième. . . ,  $\text{l.}(-m)$  est une expression absurde ou *imaginaire*.

En vain chercherait-on à infirmer cette proposition par le raisonnement suivant;

On sait que  $(-m)^2 = m^2$ ; donc, en prenant les logarithmes de part et d'autre,  $2\text{l.}(-m) = 2\text{l.}m$ , d'où  $\text{l.}(-m) = \text{l.}m$ . Ce raisonnement pèche en ce point, que l'on pose. . . , . . .  $\text{l.}(-m)^2 = 2\text{l.}(-m)$ , d'après la propriété du n° 216; or, cette propriété suppose que l'on puisse avoir l'équation,  $-m = a^x$ ,  $a$  étant positif, ce qui est impossible.

Revenons à notre objet. Il peut se présenter deux circonstances :

*Ou bien*, les logarithmes ne sont employés que comme un moyen plus simple de trouver la valeur numérique de l'expression, c'est-à-dire que le calcul par logarithmes est alors un calcul purement *auxiliaire*, et son emploi n'est pas indispensable. Tel est le cas où se trouve l'expression  $x = \frac{a^b - b^a}{c}$ ,

qui pourrait être calculée directement, sans le secours des logarithmes. Elle est négative, puisqu'on a supposé  $a < b$ ; mais si l'on veut absolument calculer sa valeur par logarithmes, on doit commencer par en changer le signe, ce qui donne

$$\frac{b^a - a^b}{c}; \text{ d'où } \text{l.} \frac{(b^a - a^b)}{c} = \text{l.}(b+a) + \text{l.}(b-a) - \text{l.}c,$$

expression qui ne renferme plus que des logarithmes de nombres absolus; et lorsqu'on a obtenu la valeur numérique de  $\frac{b^a - a^b}{c}$ ,

il suffit de prendre le résultat avec le signe —.

*Ou bien*, l'emploi des logarithmes est indispensable pour trouver la valeur d'une inconnue, et alors  $\text{l.}(-m)$  dénote une absurdité ou une impossibilité de la question.

Soit, par exemple, l'équation  $3^x = -9$ .

En appliquant les logarithmes, on trouve  $x \text{ l.} 3 = \text{l.} -9$ , équation absurde; et en effet, à quelque puissance que l'on élève 3, il est impossible de produire  $-9$ .

*Résumons* : Toutes les fois qu'en employant les logarithmes, on a pour but de trouver plus simplement la valeur numérique d'une expression proposée, l. (—*m*) indique seulement un ou plusieurs changemens de signe à faire subir aux quantités qui entrent dans l'expression proposée, avant qu'on ne lui applique le calcul logarithmique.

Mais si, pour résoudre une équation, on est obligé d'avoir recours aux logarithmes, l'expression l. (—*m*) est un symbole d'absurdité analogue aux racines de degré pair des quantités négatives.

### 229 Proportions et progressions par quotient.

Soit d'abord la proportion  $a : b :: c : x$ ; on en déduit  $x = \frac{bc}{a}$ ,  
d'où, en appliquant les logarithmes,  $\text{l. } x = \text{l. } b + \text{l. } c - \text{l. } a$ ,  
ou .....  $\text{l. } a. \text{l. } b : \text{l. } c. \text{l. } x$ ,

ce qui prouve que, si quatre nombres forment une proportion, leurs logarithmes forment une équidifférence, dont le 4<sup>e</sup> terme est le logarithme du 4<sup>e</sup> terme de la proportion.

Soit maintenant une progression par quotient

$$\div a : b : c : d : e : f : g : h : \dots$$

Il résulte de la définition (n° 199), qu'on peut l'écrire ainsi:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{f} = \frac{f}{g} = \dots,$$

d'où, prenant les logarithmes de part et d'autre,

$$\text{l. } \frac{a}{b} = \text{l. } \frac{b}{c} = \text{l. } \frac{c}{d} = \text{l. } \frac{d}{e} = \text{l. } \frac{e}{f} = \dots,$$

ou bien,

$$\text{l. } a - \text{l. } b = \text{l. } b - \text{l. } c = \text{l. } c - \text{l. } d = \text{l. } d - \text{l. } e = \text{l. } e - \text{l. } f,$$

ou bien enfin,  $\div \text{l. } a. \text{l. } b. \text{l. } c. \text{l. } d. \text{l. } e \dots;$

donc, si des nombres  $a, b, c, d, \dots$  sont en progression par quo-



tient, leurs logarithmes sont en progression par différence. La réciproque est évidente.

Cette proposition rapproche la définition algébrique des logarithmes (n° 214) de la définition que l'on en donne en Arithmétique : *les logarithmes sont des nombres en progression par différence, correspondant terme pour terme à des nombres en progression par quotient.*

N. B. Nous avons déjà fait connaître ce rapprochement dans notre Traité d'Arithmétique (n° 280.)

C'est surtout dans la résolution des questions relatives aux progressions par quotient que l'emploi des logarithmes est utile.

1°. Si nous appelons  $u$  le dernier terme d'une progression par quotient, on a (n° 200)

$$u = aq^{n-1}, \text{ d'où } l.u = l.a + (n-1) l.q.$$

Soit, par exemple, proposé de trouver le 20<sup>e</sup> terme de la progression  $1 : \frac{3}{2} : \frac{9}{4} : \frac{27}{8} : \dots$

La formule devient

$$l.u = l.1 + 19(l.3 - l.2) = 19(l.3 - l.2), \text{ [car } l.1 = 0],$$

et l'on obtient, tout calcul fait,

$$l.u = 3,3457339 = l.2216,84;$$

d'où

$$u = 2216,84 \text{ à } 0,01 \text{ près.}$$

2°. Si l'on veut insérer entre deux nombres donnés  $a$  et  $b$  un nombre  $m$  de moyens proportionnels, on a pour déterminer la raison (n° 206), la formule

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}, \text{ d'où } l.q = \frac{l.b - l.a}{m+1}.$$

$$\text{Soit } a = 2, b = 15, m = 50; \text{ il vient } l.q = \frac{l.15 - l.2}{51},$$

et l'on obtient, tout calcul fait,  $l.q = 0,0171581 = l.1,040299;$

donc

$$q = 1,040299.$$

Veut-on calculer directement le 20<sup>e</sup> moyen proportionnel, qui est le 21<sup>e</sup> terme de la progression ; l'on a

$$x = 2 \left( \sqrt[51]{\frac{15}{2}} \right)^{20}; \text{ d'où } \log x = 1.2 + \frac{20 (\log 15 - 1.2)}{51},$$

ou, tout calcul fait,  $\log x = 0.6441913 = 1.4, 407489$ ; ainsi le 20<sup>e</sup> moyen proportionnel est 4,407489.

3°. On a trouvé, n° 201, pour l'expression de la somme des termes,

$$S = \frac{1q-a}{q-1} = \frac{a(q^n-1)}{q-1}; \text{ d'où } 1.S = 1.a + 1.(q^n-1) - 1.(q-1).$$

On voit, d'après cette formule, qu'il faut commencer par calculer l'expression  $q^n$ , en posant  $1.q^n = n.1.q$ , après quoi l'on en conclut aisément  $q^n-1$ , et par suite,  $1.(q^n-1)$ . Nous aurons bientôt occasion d'appliquer cette formule.

4°. Connaissant  $a$ ,  $q$  et  $u$  dans la formule  $u = aq^{n-1}$ , on peut demander la valeur de  $n$ . Or, on a

$$1.u = 1.a + (n-1) 1.q; \text{ d'où } n = 1 + \frac{1.u - 1.a}{1.q}.$$

Soit à trouver le nombre des termes de la progression dont le premier terme est 3, la raison 2, et le dernier 6144. On a

$$n = 1 + \frac{1.6144 - 1.3}{1.2} = 1 + \frac{3,31132995}{0,30102999} = 1 + 11 = 12;$$

(le quotient  $\frac{331132995}{30102999}$  est égal à  $11 + \frac{6}{30102999}$ ; mais on néglige la fraction, comme provenant de l'emploi des logarithmes).

230. Questions relatives à l'intérêt composé. Une des applications les plus importantes des logarithmes, est celle qu'on en fait aux questions sur l'intérêt de l'argent.

Première question générale. Une somme quelconque étant placée pendant un certain temps, à un taux d'intérêt déterminé, et en intérêt composé, c'est-à-dire dans la supposition que l'intérêt de chaque année s'accumule avec le capital de l'année

précédente, on demande ce que doit devenir cette somme au bout du temps donné?

Désignons par  $a$  la somme placée, par  $n$  le nombre d'années, et par  $r$  l'intérêt que rapporte 1 fr. par an (ce n'est autre chose que le 100<sup>e</sup> du taux de l'intérêt de 100 fr.).

Puisque 1 fr. rapporte  $r$ , une somme  $a$  rapportera  $ar$ , au bout d'un an; ainsi, à la fin de la première année, le capital  $a$  sera devenu  $a + ar$ , ou  $a(1 + r)$ .

Soit  $a(1 + r) = a'$ ; ce nouveau capital deviendra, au bout de la seconde année,  $a'(1 + r)$ ; donc le capital primitif, ou  $a$ , sera devenu lui-même  $a'(1 + r)$ , ou  $a(1 + r)^2$ .

On obtiendrait de même, au bout de la 3<sup>e</sup> année,  $a(1 + r)^3$ , et en général, au bout de la  $n^{\text{ième}}$  année,  $a(1 + r)^n$ .  
Donc, en exprimant par  $A$  cette valeur, on aura l'équation

$$A = a(1 + r)^n, \text{ d'où } l. A = l. a + n \times l. (1 + r).$$

*Application.* On demande ce qu'une somme de 30 000 fr., placée en intérêt composé, à raison de 5 pour 100, doit rapporter au bout de 30 ans?

Il suffit de faire, dans la formule précédente,

$$a = 30\,000, \quad n = 30, \quad r = \frac{5}{100} = 0,05;$$

ce qui donne

$$l. A = l. 30000 + 30 l. (1,05).$$

$$l. 1,05 = 0,021189299;$$

$$30 l. 1,05 = 0,63567897$$

$$l. 30000 = 4,47712125$$

$$l. A = 5,11280022 = l. 129658,27.$$

Donc

$$A = 129958^f, 27.$$

La formule  $A = a(1 + r)^n$ , renfermant quatre quantités  $a$ ,  $r$ ,  $n$ ,  $A$ , donne la solution de quatre problèmes différents:

1<sup>er</sup>. Déterminer  $A$ , connaissant  $a$ ,  $r$  et  $n$ ; c'est la question que l'on vient de résoudre.

2<sup>e</sup>. Déterminer la somme qu'il faudrait placer actuelle-

ment, pour retirer, au bout de  $n$  années, une somme  $A$ , en supposant le capital placé en intérêt composé, à raison de  $r$  pour 1 fr.

Or, de l'équation  $A = a(1+r)^n$ , on déduit

$$1. a = 1. A - n 1. (1+r);$$

et cette nouvelle formule donnera la valeur de  $a$ .

Cette seconde question constitue la règle d'escompte composée; car elle revient à trouver la valeur actuelle d'une somme  $A$  payable dans  $n$  années, en ayant égard à l'intérêt de la somme et aux intérêts des intérêts.

3°. Déterminer le taux d'intérêt auquel on doit placer une somme  $a$ , pour retirer, au bout de  $n$  années, en intérêt composé, une autre somme  $A$ .

$$\text{La formule serait } 1+r = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}, \text{ d'où } 1.(1+r) = \frac{1.A - 1.a}{n}.$$

Connaissant  $1+r$ , on en déduirait facilement  $r$ , et, par suite, le taux d'intérêt pour 100 fr.

4°. Enfin, déterminer le temps pendant lequel une somme  $a$  doit être placée en intérêt composé, à raison de  $r$  pour 1 fr., pour rapporter une somme  $A$ .

$$\text{La formule serait } n = \frac{1.A - 1.a}{1.(1+r)}.$$

Si l'on voulait que  $A$  fût double, triple, quadruple.... de  $a$ , la formule se simplifierait.

Soit en effet  $A = k.a$ ; la formule  $A = a(1+r)^n$ , se réduit à  $ka = a(1+r)^n$ , d'où  $n = \frac{1.k}{1.(1+r)}$ ;

c'est-à-dire que la valeur de  $n$  est indépendante du capital placé primitivement.

SECONDE QUESTION GÉNÉRALE. Déterminer quelle somme il faudrait placer actuellement pour recevoir, à la fin de chaque année, une somme déterminée  $b$ , de manière à être entièrement remboursé du capital, des intérêts du capital et des

intérêts des intérêts, après un nombre  $n$  d'années, l'intérêt étant à  $r$  pour 1 fr. par an?

Soit  $a$  la somme cherchée, ce capital deviendrait, au bout de  $n$  années,

$$a(1+r)^n.$$

Il faut donc qu'en déterminant ce que les sommes payées chaque année, deviennent au bout de la  $n^{\text{ième}}$ , la somme des résultats soit égale à

$$a(1+r)^n.$$

Or,  $b$  donné à la fin de la première année, ou au commencement de la seconde, devient, au bout de la  $n^{\text{ième}}$ ,  $b(1+r)^{n-1}$ .

De même,  $b$  donné à la fin de la seconde année, ou au commencement de la troisième, devient, au bout de la  $n^{\text{ième}}$ ,

$$b(1+r)^{n-2}.$$

On trouverait de même  $b(1+r)^{n-3}$ ,  $b(1+r)^{n-4}$ , ...,  $b(1+r)$ ,  $b$ , pour les valeurs des autres sommes  $b$ , au bout de la  $n^{\text{ième}}$  année. On a donc l'équation

$$a(1+r)^n =$$

$$b(1+r)^{n-1} + b(1+r)^{n-2} + b(1+r)^{n-3} + \dots + b(1+r) + b;$$

mais le second membre de cette équation, considéré dans un ordre inverse, est évidemment la somme des termes d'une progression par quotient, dont le premier terme est  $b$ , la raison  $1+r$ , et le nombre des termes  $n$ .

Ainsi, cette somme a pour expression ( $n^{\circ} 201$ ),

$$\frac{b(1+r)^n - b}{1+r-1} \quad \text{ou} \quad \frac{b[(1+r)^n - 1]}{r},$$

donc enfin, l'on a l'équation

$$a(1+r)^n = \frac{b[(1+r)^n - 1]}{r}, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{b[(1+r)^n - 1]}{r(1+r)^n},$$

ou, appliquant les logarithmes,

$$1. a = 1. b + 1. [(1+r)^n - 1] - 1. r - n 1. (1+r).$$

Cette nouvelle formule renfermant quatre quantités  $a$ ,  $b$ ,  $r$ ,  $n$ , donne aussi lieu à quatre problèmes différents.

Voici les énoncés de plusieurs questions qui se rattachent aux précédentes.

On demande pour combien d'années on doit placer une somme  $a$ , en intérêt composé, à 5 et à 10 pour 100, pour doubler cette somme?

(Rép. à 5 p.  $\frac{5}{100}$ ,  $14^{\text{ans}}$   $2^{\text{mois}}$ ; à 10 p.  $\frac{5}{100}$ ,  $7^{\text{ans}}$   $3^{\text{mois}}$ .)

On demande la somme que l'on doit placer à présent, pour retirer pendant 12 ans et à la fin de chaque année, une somme de 1500 fr., de manière à être remboursé entièrement du capital et des intérêts au bout de ces douze années, l'intérêt étant 7 $\frac{50}{100}$  p.  $\frac{5}{100}$  par an?

(Rép. 11602,91.)

Un particulier a acheté un bien de 100000 fr., qui doit être payé en 15 paiemens égaux, en ayant égard aux intérêts des intérêts; le taux pour chaque intervalle de paiement est de 5 p.  $\frac{5}{100}$ . On demande de combien sera chaque paiement, ou la quotité de chaque paiement?

(Rép. 9634,22.)

Un nombre donné d'hommes  $a$ , augmente tous les ans de la centième partie de ce qu'il était l'année précédente; combien faut-il d'années pour que ce nombre devienne 10 fois plus grand?

(Rép. 231 $^{\text{ans}}$  environ.)

On tire chaque jour d'un baril de 100 pintes de vin, une pinte qu'on remplace au fur et à mesure, par une pinte d'eau; déterminer, 1 $^{\circ}$ . combien de vin il restera dans le baril, lorsqu'on aura remplacé la 50 $^{\text{e}}$  pinte; 2 $^{\circ}$ . dans combien de jours le vin sera réduit à la moitié, au tiers ou au quart?

( Réponse à la première partie de la question,  $60^{\text{pintes}} \frac{1}{2}$ .  
 Réponse à la seconde partie,  $69^{\text{jours}}$  pour la moitié,  $109^{\text{jours}}$   
 pour le tiers, et  $138^{\text{jours}}$  pour le quart. )

§ V. *Séries logarithmiques et exponentielles.*

La méthode exposée n° 209, pour résoudre l'équation  $a^x = b$ , suffisait pour donner une idée de la construction des tables de logarithmes; mais cette méthode est très laborieuse et même impraticable, lorsqu'on veut déterminer la valeur de  $x$  avec un grand degré d'approximation. Les analystes ont découvert des méthodes beaucoup plus expéditives, soit pour construire de nouvelles tables, soit pour vérifier celles qui existent déjà. Ces méthodes consistent dans le développement des logarithmes en série.

231. Soit  $y$  un nombre dont on demande le logarithme développé en série; et appliquons la méthode des coefficients indéterminés (n° 189).

Il est d'abord visible que l'on ne peut supposer

$$l. y = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \text{etc.}$$

car si l'on fait  $y = 0$ , le premier membre se réduit (n° 219) à l'infini négatif ou à l'infini positif, suivant que la base est plus grande ou plus petite que 1; tandis que le second membre se réduit à  $A$ , qui devrait alors être de même nature.

On ne peut supposer  $l. y = Ay + By^2 + \dots$ ,

puisque  $y = 0$  donne  $l. 0$  ou  $-\infty = 0$ ;

mais si l'on met  $y$  sous la forme  $1 + x$ , et qu'on pose

$$l.(1 + x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \dots (1),$$

en faisant  $x = 0$ , l'équation  $l. 1 = 0$ , qu'on obtient, ne présente plus aucun caractère d'absurdité.

Tâchons donc de déterminer les coefficients  $A, B, C, \dots$

Pour cela, imitons le procédé suivi (n° 190), et remplaçons  $x$  par  $z$ ; il vient

$$1.(1+z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \dots (2).$$

Retranchons l'équation (2) de l'équation (1); on obtient

$$1.(1+x) - 1.(1+z) = A(x-z) + B(x^2-z^2) + C(x^3-z^3) + \dots (3).$$

Le second membre de cette équation est divisible par  $x-z$ ; voyons si, par quelque artifice, on ne pourrait pas mettre ce facteur en évidence dans le premier.

$$\text{Or, on a } 1.(1+x) - 1.(1+z) = 1. \frac{1+x}{1+z} = 1. \left(1 + \frac{x-z}{1+z}\right);$$

mais  $\frac{x-z}{1+z}$  pouvant être regardé comme un seul nombre  $u$ , on peut développer  $1.(1+u)$  ou  $1.\left(1 + \frac{x-z}{1+z}\right)$ , comme  $1.(1+x)$ , ce qui donne,

$$1.\left(1 + \frac{x-z}{1+z}\right) = A. \frac{x-z}{1+z} + B.\left(\frac{x-z}{1+z}\right)^2 + C.\left(\frac{x-z}{1+z}\right)^3 + \dots$$

Substituons ce développement à la place de  $1.(1+x) - 1.(1+z)$ , dans l'équation (3), et divisons les deux membres par  $x-z$ ; il vient

$$A. \frac{1}{1+z} + B. \frac{x-z}{(1+z)^2} + C. \frac{(x-z)^2}{(1+z)^3} \dots$$

$$= A + B(x+z) + C(x^2+xz+z^2) + \dots$$

Puisque cette équation doit, ainsi que les précédentes, se vérifier, quels que soient  $x$  et  $z$ , posons  $x=z$ ; il en résulte

$$\frac{A}{1+x} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \dots;$$

d'où, chassant les dénominateurs et transposant,

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l} 0 = A + 2B & x + 3C & x^2 + 4D & x^3 + 5E & x^4 + \dots \\ -A + A & + 2B & + 3C & + 4D & \end{array}$$

Égalant chacun des coefficients des diverses puissances de  $x$  à



zéro, on obtient la série d'équations

$$A - A = 0, 2B + A = 0, 3C + 2B = 0, 4D + 3C = 0, \dots$$

d'où

$$A = A, B = -\frac{A}{2}, C = -\frac{2B}{3} = +\frac{A}{3}, D = -\frac{3C}{4} = -\frac{A}{4} \dots$$

La loi de la série est évidente: le coefficient du  $n^{\text{ième}}$  terme est égal à  $\mp \frac{A}{n}$ , suivant que  $n$  est pair ou impair; on obtient donc enfin, pour le développement de  $\text{l}'(1+x)$ ,

$$\begin{aligned} \text{l}'(1+x) &= Ax - \frac{A}{2}x^2 + \frac{A}{3}x^3 - \frac{A}{4}x^4 + \dots \\ &= A\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots\right) \end{aligned}$$

N. B. Par la méthode précédente, les coefficients  $B, C, D, E, \dots$  ont tous été déterminés en fonction de  $A$ ; mais ce dernier coefficient est resté complètement indéterminé. Or, cela doit être, d'après la nature de l'expression que l'on s'est proposé de développer; car, puisqu'on peut former une infinité de systèmes de logarithmes, il faut qu'il existe, dans le développement général de  $\text{l}'(1+x)$ , une quantité tout-à-fait arbitraire, qui serve à distinguer les systèmes les uns des autres. D'ailleurs, on a vu (n° 218) que les logarithmes d'un même nombre, pris dans deux systèmes, ne diffèrent que par un facteur, *constant pour tous les nombres*; ainsi, la quantité indéterminée doit être un facteur commun à toute la série. C'est donc avec raison que l'on a trouvé

$$\text{l}'(1+x) = A\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots\right) (4).$$

Le nombre  $A$  est (n° 218) le *module* dont la valeur particulière caractérise le système de logarithmes que l'on veut considérer.

232. L'hypothèse la plus simple qu'on puisse faire, consiste à supposer  $A = 1$ ; ce qui donne, en désignant par  $\text{l}'(1+x)$ , ce système particulier de logarithmes,

$$l'(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots \quad (5).$$

Si l'on donne à  $x$  toutes les valeurs possibles, on formera successivement tous les logarithmes de ce système, qui a reçu le nom de *Système naturel* ou *Système népérien* (du nom de l'inventeur des logarithmes). Occupons-nous de la formation de ce système, puisqu'il sera facile d'en déduire ensuite tous les autres, soit en donnant à  $A$  différentes valeurs, soit par la formule du n° 218.

Faisons, dans la série (5),  $x = 0$ ; il vient  $l'1 = 0$ .

Soit encore  $x = 1$ ; il en résulte  $l'2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ ,

série très peu convergente, qui exigerait que l'on prit un très grand nombre de termes pour obtenir une approximation suffisante; il faudrait, par exemple, prendre les cent premiers termes pour avoir la valeur de  $l'2$ , à 0,01 près (n° 184). En général, la série ne saurait donner les logarithmes des nombres entiers, puisqu'on obtiendrait, pour tout nombre au-dessus de 2, une série dont les termes iraient en augmentant.

Voici les principales transformations que les analystes ont effectuées pour conduire à des séries convergentes et propres à donner les logarithmes des nombres entiers, qui sont les seuls qu'on doive placer dans les tables.

*Première transformation.* Soit fait, dans la série (5),  $x = \frac{1}{y}$ ;

on obtient, en observant que  $l'\left(1 + \frac{1}{y}\right) = l'(y+1) - l'y$ ,

$$l'(y+1) - l'y = \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} - \frac{1}{4y^4} + \dots \quad (6).$$

Le second membre de cette équation est une série d'autant plus convergente, que  $y$  est plus grand; d'ailleurs le premier membre exprime la différence de deux logarithmes consécutifs. Ainsi, en faisant successivement  $y = 2, 3, 4, 5, \dots$ , ce qui donne

$$V_3 - V_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \dots$$

$$V_4 - V_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{18} + \frac{1}{81} - \frac{1}{324} + \dots$$

$$V_5 - V_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{192} - \frac{1}{1024} + \dots$$

La première série donnera le logarithme de 3, au moyen du logarithme de 2, la seconde, le logarithme de 4, en fonction du logarithme de 3..., et ainsi de suite. Le degré d'approximation pourra toujours être apprécié (n° 184), puisque les séries sont composées de termes alternativement positifs et négatifs.

*Seconde transformation.* On parvient à des séries beaucoup plus convergentes, par le moyen suivant :

Substituons dans la série  $V(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ ,  
—  $x$  à la place de  $x$ ; il

vient, .....  $V(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ ,

et retranchons ces deux séries l'une de l'autre; on obtient, en observant que  $V(1+x) - V(1-x) = V \frac{1+x}{1-x}$ ,

$$V \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots \right).$$

Pour que le second membre soit une série très convergente, il faut que  $x$  soit une fraction très petite, et dans ce cas,  $\frac{1+x}{1-x}$  est plus grand que l'unité, mais en diffère fort peu.

Posons donc  $\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{1}{z}$  ( $z$  étant un nombre entier);

il vient  $(1+x)z = (1-x)(z+1)$ ;

d'où, réduisant,  $x = \frac{1}{2z+1}$ .

Done la série précédente devient  $\Gamma\left(1 + \frac{1}{z}\right)$  ou

$$\Gamma(z+1) - \Gamma z = 2\left(\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3(2z+1)^2} + \frac{1}{5(2z+1)^3} + \dots\right).$$

Cette série donne également la différence entre deux logarithmes consécutifs; mais elle converge beaucoup plus rapidement que la série (6).

Soit fait successivement  $z = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ ; on

trouve  $\Gamma 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^3} + \frac{1}{7 \cdot 3^4} + \dots\right),$

$$\Gamma 3 - \Gamma 2 = 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{5 \cdot 5^3} + \frac{1}{7 \cdot 5^4} + \dots\right),$$

$$\Gamma 4 - \Gamma 3 = 2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3 \cdot 7^2} + \frac{1}{5 \cdot 7^3} + \frac{1}{7 \cdot 7^4} + \dots\right).$$

.....

Soit  $z = 100$ ; il en résulte

$$\Gamma 101 = \Gamma 100 + 2\left(\frac{1}{201} + \frac{1}{3(201)^2} + \frac{1}{5(201)^3} + \dots\right);$$

d'où l'on voit que le logarithme de 100 étant connu, le premier terme de la série suffit pour donner celui de 101, avec sept chiffres décimaux.

Il existe encore des formules bien plus expéditives, qui servent à donner des logarithmes en fonction d'autres déjà connus; mais ce qui précède suffit pour donner une idée de la facilité avec laquelle on pourrait construire des tables.

233. Les logarithmes népériens étant calculés, il est facile de former un tout autre système.

Par exemple, pour former le système ordinaire, il faut (n° 218) multiplier chaque logarithme népérien par le module

$\frac{1}{\Gamma 10}$ . Ce nombre a été calculé avec tout le degré d'approximation que l'on peut désirer, et sa valeur en décimales est 0,4342944819...; c'est le module propre à passer du système naturel au système dont la base est 10.

Ce module exprime d'ailleurs le *logarithme ordinaire de la base du système népérien*; car en appelant  $e$  cette base, on a l'équation  $e^{1.10} = 10$ ; d'où, prenant les logarithmes dans le système ordinaire,

$$1.10 \times 1.e = 1.10 = 1; \text{ donc, } 1.e = \frac{1}{1.10} = 0,43429 \dots$$

Comme les tables ordinaires sont censées construites, on peut s'en servir pour déterminer à quel nombre correspond le logarithme ci-dessus, et l'on trouve

$$0,4342944819 \dots = 1.e = 1.2,7182818284 \dots$$

$$\text{Ainsi, } e = 2,7182818284 \dots$$

Nous allons bientôt parvenir à ce même résultat par une autre voie.

234. *Développement en série de l'exponentielle  $a^x$ .* La liaison qui existe entre les quantités exponentielles et les logarithmes [liaison qui consiste en ce que,  $a$  représentant la base d'un système de logarithmes,  $x$  est (n° 214) le logarithme de l'expression  $a^x$ ], nous conduit à chercher s'il ne serait pas possible de développer  $a^x$  suivant les puissances de  $x$ ; ce qui donnerait alors le développement d'un nombre en fonction de son logarithme, question inverse de la précédente.

Supposons donc ce développement trouvé, et soit

$$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \dots (1);$$

si l'on fait  $x=0$ , l'équation se réduit à  $a^0 = 1$ , résultat exact; ainsi cette forme de développement est admissible.

Pour déterminer  $A, B, C, D, \dots$ , remplaçons  $x$  par  $z$ ; il vient

$$a^z = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \dots (2);$$

retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on a

$$a^x - a^z = A(x-z) + B(x^2-z^2) + C(x^3-z^3) + D(x^4-z^4) + \dots (3),$$

équation dont le second membre est divisible par  $x-z$ ; ainsi

il faut tâcher de mettre ce facteur en évidence dans le premier. Or, on peut mettre  $a^x - a^z$  sous la forme  $a^z(a^{x-z} - 1)$ ; donc si l'on remplace, dans la série (1),  $x$  par  $x - z$ , il vient

$$a^z(a^{x-z} - 1) = a^z[A(x-z) + B(x-z)^2 + C(x-z)^3 + \dots].$$

Substituant dans l'équation (3), à la place de  $a^x - a^z$ , la valeur qu'on vient d'obtenir, et divisant les deux membres par  $x - z$ , on trouve

$$\begin{aligned} & a^z[A + B(x-z) + C(x-z)^2 + \dots] \\ &= A + B(x+z) + C(x^2 + xz + z^2) + \dots \end{aligned}$$

faisons maintenant  $x = z$  dans cette dernière équation; elle se réduit à  $a^z.A = A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + 5Ez^4 + \dots$ , ou, remplaçant  $a^z$  par son développement (1),

$$A + A^2x + ABx^2 + ACx^3 + \dots = A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + \dots$$

Égalons séparément les coefficients des mêmes puissances; on obtient les équations

$$A = A, \quad A^2 = 2B, \quad AB = 3C, \quad AC = 4D, \dots$$

d'où l'on déduit

$$A = A, \quad B = \frac{A^2}{2}, \quad C = \frac{A^3}{2.3}, \quad D = \frac{A^4}{2.3.4}$$

La loi de la série est manifeste; le terme qui, dans la série (1), en a  $n$  avant lui, a pour expression  $\frac{A^n}{2.3.4\dots n}$ .

On voit que tous les coefficients  $B, C, D, \dots$  sont exprimés en fonction du coefficient  $A$ , qui reste encore indéterminé; c'est-à-dire que la méthode qui vient d'être suivie ne suffit pas pour le faire obtenir; mais il n'en a pas moins une valeur fixe, qu'on trouve par l'artifice suivant:

On peut mettre  $a^x$  sous la forme  $(1 + a - 1)^x = (1 + b)^x$ , en posant, pour plus de simplicité,  $a - 1 = b$ . Et en développant  $(1 + b)^x$ , d'après la formule du binôme, on a

$$(1 + b)^x = 1 + x.b + x \cdot \frac{x-1}{2} b^2 + x \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-2}{3} b^3 + \dots$$

Si, dans ce développement, on ne tient compte que de la partie affectée de  $x$ , il est facile de reconnaître que cette partie est égale à  $\left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} \dots\right) x$ ; son coefficient est d'ailleurs représenté par  $A$ , dans la série (1); donc, si l'on remplace  $b$  par  $a-1$ , on a

$$A = a-1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \dots = k.$$

(Il est d'usage de représenter par  $k$  ce second membre.)

Substituant  $k$  à la place de  $A$  dans les valeurs trouvées, de  $B, C, D, \dots$ , et reportant ces valeurs dans la série (1), on obtient enfin, pour le développement de  $a^x$ ,

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2 x^2}{1.2} + \frac{k^3 x^3}{1.2.3} + \frac{k^4 x^4}{1.2.3.4} + \frac{k^5 x^5}{1.2.3.4.5} + \dots (4).$$

235. *Conséquences.* Si dans cette série, on suppose  $x=1$ , elle devient  $a = 1 + k + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^4}{1.2.3.4} + \dots$ ; d'où l'on voit que  $a$  est exprimé en fonction de  $k$ , de même que l'on avait déjà  $k$  en fonction de  $a$ , ....  $k = a-1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \dots$

Cela posé, cherchons la valeur particulière de  $a$ , correspondante à  $k=1$ , et désignons par  $e$  cette valeur particulière; on

$$\text{trouve } e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$$

série assez convergente, dont les douze premiers termes donnent  $e = 2,7182818$ , à 0,0000001 près (\*).

(\*) Il est aisé de démontrer que cette série est le développement d'un nombre INCOMMENSURABLE.

D'abord,  $e$  ne peut être un nombre entier, car on a évidemment

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \dots < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

or cette dernière série est une progression par quotient, décroissante à l'infini,

Ce nombre  $e$  qui correspond à  $k=1$ , étant très remarquable, cherchons le développement de  $e^x$ , il suffit, pour cela, de faire dans la formule (4),  $a=e$ , et  $k=1$ ; ce qui donne

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots$$

Les deux quantités générales  $a$  et  $k$  ont entre elles une autre relation à laquelle on peut parvenir par le moyen du nombre particulier  $e$ .

En effet, soit posé dans l'équation (4),  $x = \frac{1}{k}$ ; on trouve

$$a^{\frac{1}{k}} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots; \text{ mais on a}$$

$$\text{déjà } e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots; \text{ donc } a^{\frac{1}{k}} = e, \text{ ou bien, } a = e^k.$$

qui (n° 203) a pour limite l'unité. On a donc

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots < 1;$$

d'où l'on voit que  $e$  est un nombre compris entre 2 et 3.

Je dis, en second lieu, qu'aucun nombre fractionnaire exact ne peut exprimer la valeur de  $e$ .

En effet, soit, s'il est possible,  $e$  égal à  $\frac{m}{n}$ ,  $n$  étant un nombre entier  $< m$ , mais  $> 1$ ; et posons la série jusqu'à ce qu'on parvienne aux termes dont les dénominateurs renferment le facteur  $n$ . On aura

$$\frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{2.3.4\dots n} + \frac{1}{2.3.4\dots n(n+1)} + \dots;$$

où, multipliant les deux membres par  $2.3.4\dots n$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} 2.3.4\dots n-1.m = \\ 2.3.4\dots n + 3.4\dots n + 4.5\dots n + \dots + n+1 \\ + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \end{array} \right\};$$

mais le premier membre de cette égalité est un nombre entier; il en est de même de la partie du second membre qui est placée sur la première ligne horizontale; donc il faut que la seconde partie soit aussi un nombre entier. Or cela est impossible; car cette série a évidemment une valeur moindre que



Si l'on prend les logarithmes des deux membres de cette équation, dans le système dont la base est  $e$ , il vient, à cause de

$$1. e = e,$$

$$1. a = k,$$

ou, remplaçant  $k$  par sa valeur  $a-1-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\dots$ ,

$$1. a = a-1-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\dots;$$

et si l'on pose  $a=1+x$ , d'où  $a-1=x$ , on obtient

$$1. (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots,$$

série identique avec celle qui donne les logarithmes naturels ou népériens (n° 232).

celle de la progression

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots$$

dont la limite (n° 203) est  $\frac{1}{n}$ .

Donc enfin, l'égalité  $\frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$ , est elle-même impossible; et la base  $e$  ne saurait être égale à un nombre commensurable.

N. B. Le calcul précédent peut servir à estimer la limite de l'erreur que l'on commet en prenant pour valeur de  $e$  les  $n$  premiers termes de la série.

Car cette erreur (que nous appellerons  $T$ ) est égale à

$$\frac{1}{2.3.4.n(n+1)} + \frac{1}{2.3.4\dots n(n+1)(n+2)} + \dots$$

c'est-à-dire que l'on a

$$T = \frac{1}{2.3.4\dots n} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right)$$

mais nous avons vu que la série entre parenthèses est moindre que

$$\frac{1}{n}. \text{ On a donc } T < \frac{1}{2.3.4\dots n^2};$$

ce qui prouve qu'on peut toujours prendre  $n$  assez grand pour que l'erreur  $T$  soit au-dessous de toute grandeur donnée.

(Note communiquée par M. Pommès.)

D'où l'on voit que  $e$  ou  $2,7182818 \dots$  est la base du système népérien, résultat auquel on est parvenu (n° 233); il suit encore de là que le développement des *exponentielles* en série conduit aux *séries logarithmiques*.

Nous verrons, dans le dernier chapitre, les conséquences que l'on déduit de toutes ces formules.

*Calcul de l'erreur que l'on commet en établissant la proportion que prescrit l'usage des tables. ( Voy. n°s 221<sup>e</sup> et 222. )*

236. Pour ne rien laisser à désirer sur la théorie des logarithmes, nous nous proposerons d'examiner jusqu'à quel point la proportion de l'usage des tables est exacte. Mais auparavant, il est bon de faire quelques remarques sur les différences qui existent entre deux logarithmes consécutifs.

*Premièrement.* On a trouvé (n° 232),

$$l'(y+1) - l'y = \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} - \dots$$

Désignons par  $m$  le module  $0,43429 \dots$  par lequel il faut (n° 233) multiplier  $l'(y+1)$ , pour avoir les logarithmes ordinaires  $l.(y+1)$ ; il vient

$$l.(y+1) - l.y = m \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} - \dots \right),$$

d'où l'on voit déjà, que la différence de deux logarithmes consécutifs diminue à mesure que les nombres augmentent.

*Secondement.* Comme  $m$ , ou  $0,43429 \dots$ , est  $< \frac{1}{2}$ , il en résulte

$$l.(y+1) - l.y < \frac{1}{2y} - \frac{1}{4y^2} + \frac{1}{6y^3} - \dots;$$

d'ailleurs, on sait (n° 184) que le premier terme  $\frac{1}{2y}$  de cette série est numériquement plus grand que la série tout entière, donc, à plus forte raison, on a  $l.(y+1) - l.y < \frac{1}{2y}$ .

Soit  $y = 10000$ ; on a  $\frac{1}{2y} = \frac{1}{20000} = 0,00005$ ;

ainsi, pour tous les nombres au-dessus de 10000, la différence de deux logarithmes consécutifs est moindre que la moitié de l'unité du quatrième ordre décimal.

Ceci explique comment on a pu placer dans une seule page des tables de Callet un aussi grand nombre de logarithmes; puisque les trois premiers chiffres décimaux sont nécessairement communs à plusieurs logarithmes, il suffisait d'écrire une seule fois ces trois chiffres et de placer ensuite les quatre derniers chiffres correspondant à la variation du nombre.

Troisièmement. Soient  $\delta = l.(y+1) - l.y = l.\frac{y+1}{y}$  et  $\delta' = l.(y+2) - l.(y+1) = l.\frac{y+2}{y+1}$ ; comme on a.....

$$\frac{y+1}{y} : \frac{y+2}{y+1} = \frac{y^2+2y+1}{y^2+2y} = 1 + \frac{1}{y(y+2)}, \text{ il en résulte}$$

$$\delta - \delta' = l.\left(1 + \frac{1}{y(y+2)}\right),$$

ou, remplaçant  $y$  par  $y(y+2)$ , dans la série.....

$$l.\left(1 + \frac{1}{y}\right) = m\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \dots\right),$$

$$\delta - \delta' = m\left(\frac{1}{y(y+2)} - \frac{1}{2y^2(y+2)^2} + \dots\right);$$

d'où  $\delta - \delta' < \frac{1}{2y(y+2)}$ , puisque l'on a  $m < \frac{1}{2}$ , et que le premier terme de la série est (n° 184) plus grand que la série tout entière.

Cela posé, soit  $y = 10000$ ; on trouve  $\delta - \delta' < \frac{1}{200040000}$ ; ainsi, la différence entre deux différences consécutives de logarithmes de nombres au-dessus de 10000, est moindre que l'unité du huitième chiffre décimal.

Voilà encore pourquoi l'on a pu placer dans les tables, pour tous les nombres au-dessus de 10000, les différences entre

deux logarithmes consécutifs. On peut regarder ces différences comme constantes pour un grand nombre de logarithmes, puisque la variation d'une différence à l'autre ne porte que sur le neuvième chiffre décimal, et que les tables n'en renferment que sept.

*Conséquences des propositions précédentes.* Admettons pour un instant que, pour tous les nombres au-dessus de 10000, à des accroissemens égaux de nombres, correspondent des accroissemens égaux de logarithmes, ce qui est sensiblement exact, d'après ce qu'on vient de reconnaître; je dis alors que l'on peut établir une proportion entre des différences de nombres et des différences de logarithmes.

Soient en effet  $n$  et  $n + 1$  deux nombres entiers consécutifs au-dessus de 10000,  $n + \frac{p}{q}$  un nombre fractionnaire intermédiaire; on peut toujours regarder les trois nombres  $n$ ,  $n + \frac{p}{q}$ ,  $n + 1$  comme faisant partie d'une progression par différence, dont le premier terme est  $n$ , la raison  $\frac{1}{q}$ , le terme de rang  $p + 1$ ,  $n + \frac{p}{q}$ , et le terme de rang  $q + 1$ ,  $n + 1$ , ou  $n + 1$ ; en sorte que l'on a

$$\div n . n + \frac{1}{q} . n + \frac{2}{q} \dots n + \frac{p}{q} \dots n + 1 .$$

Or, l'on a supposé que les différences entre les logarithmes des nombres entiers consécutifs sont sensiblement égales; donc, à fortiori, les différences entre les logarithmes de  $n$ ,  $n + \frac{1}{q}$ ,  $n + \frac{2}{q} \dots$ , peuvent être regardées comme égales; ainsi, en désignant par  $\delta$  la différence  $L\left(n + \frac{1}{q}\right) - L n$ , on aura pour les logarithmes correspondans à la série ci-dessus,

$$\div L n . L n + \delta . L n + 2\delta \dots L n + p\delta \dots L n + q\delta \text{ ou } L(n + 1) ;$$

et il est visible que, dans ce cas, on a la proportion

$$(n+1) - n : \left(n + \frac{p}{q}\right) - n :: (1.n + q\delta) - 1.n : (1.n + p\delta) - 1.n;$$

car on trouve, en réduisant,  $1 : \frac{p}{q} :: q\delta : p\delta$ , ou  $q : p :: q : p$ .

237. Calculons maintenant l'erreur que l'on commet en établissant cette proportion. (Ce qui suit est, à quelques modifications près, extrait d'un ouvrage de Bertrand de Genève.)

Reprenons les trois nombres  $n$ ,  $n + \frac{p}{q}$ ,  $n + 1$ , et soient  $b$ ,  $b + \frac{f}{g}$ ,  $b + c$ , leurs logarithmes; on suppose  $f < g$ .

Désignons par  $a$  la base du système de logarithmes que l'on considère. On a, d'après la définition des logarithmes,

$$a^b = n, a^{b + \frac{f}{g}} = n + \frac{p}{q}, a^{b+c} = n + 1.$$

Or, on tire de la dernière,

$$a^c = \frac{n+1}{a^b} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n};$$

d'où, élevant à une puissance de degré  $\frac{f}{g}$ ,  $a^{\frac{f}{g}c} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{f}{g}}$ , et multipliant par  $a^b = n$ ,

$$a^{b + \frac{f}{g}c}, \text{ ou } n + \frac{p}{q} = n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{f}{g}}.$$

Développons actuellement cette dernière égalité, d'après le binôme de Newton, dans le cas de l'exposant fractionnaire (n° 183), et supprimons le terme  $n$  qui est commun aux deux membres; on trouve

$$\frac{p}{q} = \frac{f}{g} - \frac{f}{g} \cdot \frac{g-f}{2g} \cdot \frac{1}{n} + \frac{f}{g} \cdot \frac{g-f}{2g} \cdot \frac{2g-f}{3n} \cdot \frac{1}{n^2} - \dots (1);$$

ou, multipliant les deux membres par  $c$ ,

$$\frac{p}{q}c = \frac{f}{g}c - \frac{f}{g} \cdot \frac{g-f}{2g} \cdot \frac{c}{n} + \frac{f}{g} \cdot \frac{g-f}{2g} \cdot \frac{2g-f}{3n} \cdot \frac{c}{n^2} - \dots (2),$$

Or, si l'on remarque que dans ces deux séries, 1<sup>o</sup>. les termes vont en diminuant et diminuent d'autant plus rapidement que  $n$  est un nombre plus grand; 2<sup>o</sup>. que les termes sont alternativement positifs et négatifs, il en résulte nécessairement (n<sup>o</sup> 184), que l'on a

$$\begin{aligned} 1^{\circ}. \frac{p}{q} - \frac{f}{g} &< \frac{f}{g} \cdot \frac{g-f}{2g} \cdot \frac{1}{n}, \\ 2^{\circ}. \frac{p}{q} - \frac{f}{g} &< \frac{f}{g} \cdot \frac{g-f}{2g} \cdot \frac{c}{n}. \end{aligned}$$

Si l'on considère la première inégalité, comme  $\frac{f}{g} \cdot \frac{g-f}{2g} \cdot \frac{1}{n}$  peut se mettre sous la forme  $\frac{f}{g} \left(1 - \frac{f}{g}\right) \cdot \frac{1}{2n}$  et que le produit  $\frac{f}{g} \left(1 - \frac{f}{g}\right)$  est tout au plus (rem., n<sup>o</sup> 100) égal à  $\frac{1}{4}$ , il s'ensuit que la différence  $\frac{p}{q} - \frac{f}{g}$  est moindre que  $\frac{1}{8n}$ . De même, on a

$$\frac{p}{q}c - \frac{f}{g}c < \frac{c}{8n}.$$

Cela posé, pour résoudre la première question relative à l'usage des tables, on établit la proportion :

1, différence entre deux nombres consécutifs  $n+1$  et  $n$ ,  
est à  $c$ , différence entre  $l.(n+1)$  et  $l.(n)$ ,.....

comme  $\frac{p}{q}$ , différence entre  $n + \frac{p}{q}$  et  $n$ ,.....

est à un 4<sup>me</sup> terme  $x$ , qui est censé devoir exprimer ce qu'il faut ajouter à  $l.n$  pour obtenir le logarithme de  $n + \frac{p}{q}$ ,

c'est-à-dire,  $1 : c :: \frac{p}{q} : x$ , d'où  $x = \frac{p}{q}c$ . Or, la vraie

valeur de la différence entre  $1. \left(n + \frac{p}{q}\right)$  et  $1. n$ , est, par hypothèse, exprimée par  $\frac{f}{g} c$ ; donc, en substituant le 4<sup>me</sup> terme,  $\frac{p}{q} c$ , à la place de  $\frac{f}{g} c$ , on commet une erreur moindre que  $\frac{c}{8n}$ . Mais on a vu (n° 236) que, dans les

tables dont la base est 10, si  $n$  est au-dessus de 10000, la différence entre deux logarithmes consécutifs est moindre que la moitié de l'unité de l'ordre du 4<sup>me</sup> chiffre décimal,

ou 0,00005; ainsi  $\frac{c}{2n}$  est moindre que  $\frac{0,00005}{80000}$  ou.....

0,0000000006, c'est-à-dire moindre que l'unité du 9<sup>me</sup> ordre décimal. Ainsi, l'erreur commise ne peut influer sur le 7<sup>me</sup> chiffre décimal du logarithme.

Pour le second problème, on dit :

$c$ , différence entre deux logarithmes consécutifs,.....

est à 1, différence entre les nombres,.....

comme  $\frac{f}{g} c$ , différence entre le logarithme donné et le plus

petit des deux qui le comprennent. ....

est à un 4<sup>me</sup> terme  $x$ , qui est censé exprimer ce qu'on doit ajouter au plus petit nombre  $n$ , pour avoir le nombre cherché;

ou bien,  $c : 1 :: \frac{f}{g} c : x$ , d'où  $x = \frac{f}{g}$ .

Ainsi, le nombre demandé serait  $n + \frac{f}{g}$ , tandis que l'on devrait avoir  $n + \frac{p}{q}$ , pour la valeur de ce nombre, ce qui donne, en vertu de la relation (1) et de l'analyse ci-dessus, une erreur moindre que  $\frac{1}{8n}$ ; et si, comme on le suppose,  $n$  est  $> 10000$ , cette erreur est au-dessous de  $\frac{1}{80000}$ ; en

sorte que, réduisant  $\frac{f}{g}$ , ou plutôt,  $\frac{f}{g} : c$ , en fraction décimale, on peut pousser l'opération jusqu'aux 10000<sup>èmes</sup>, mais pas au-delà.

238. *N. B.* Cette approximation que donne la théorie, pour le second problème, souffre des modifications dans la pratique, et l'on ne peut compter que sur l'exactitude des deux premiers chiffres décimaux. Cela tient à ce que la différence  $c$  n'est donnée que par deux ou trois chiffres au plus, dont le premier à gauche est du 5<sup>ème</sup> ordre décimal, tandis que cette différence (tous les logarithmes étant incommensurables) devrait être composée d'un nombre infini de chiffres, dont on néglige ceux qui suivent les deux ou trois premiers. Or, l'on sait que, dans une division arithmétique, si l'on supprime les derniers chiffres à droite du diviseur et les chiffres correspondans du dividende, on altère le quotient; et l'on n'est bien certain que de l'exactitude des deux premiers chiffres à gauche.

Observons encore que, dans tout ce que nous venons de dire, nous avons supposé que l'on eût entre les mains les tables de Callet. Il serait facile de calculer les erreurs auxquelles donne lieu l'emploi de tables moins étendues.



## CHAPITRE VII.

*Théorie générale des Équations.*

*Introduction.* Les plus célèbres analystes se sont occupés du problème de la résolution des équations d'un degré quelconque à une seule inconnue; mais jusqu'ici leurs efforts ont été infructueux, par rapport aux équations d'un degré supérieur au quatrième. Cependant les recherches qu'ils ont faites à ce sujet les ont conduits à des propriétés communes aux équations de tous les degrés, dont ils ont ensuite tiré parti, soit pour résoudre certaines classes d'équations, soit pour ramener la résolution d'une équation donnée à celle d'autres équations plus simples. Nous nous proposons, dans ce chapitre, de faire connaître ces propriétés et leur usage, pour faciliter la résolution des équations.

§ I<sup>er</sup>. *Divisibilité des Fonctions entières. Propriétés générales des Équations. Théorie complète du plus grand commun diviseur.*

## DIVISIBILITÉ DES FONCTIONS ENTIÈRES.

239. Le développement des propriétés relatives aux équations de tous les degrés, nous conduira à des polynômes d'une nature particulière et toute différente de celle des polynômes que nous avons eu occasion de considérer dans le premier chapitre. Ce sont des expressions de la forme

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Tx + U,$$

dans lesquelles  $m$  est un nombre entier et positif, mais dont les

coefficients  $A, B, C, \dots$ .  $T, U$ , désignent des quantités quelconques, c'est-à-dire des quantités entières ou fractionnaires, commensurables ou incommensurables. Or, dans la division algébrique, telle que nous l'avons exposée (chap. I<sup>re</sup>), on a pour but, *étant donnés deux polynomes entiers par rapport à toutes les lettres et aux nombres particuliers qui y entrent, de trouver un troisième polynome de même espèce, qui, multiplié par le second, reproduise le premier.*

Mais, si l'on a deux polynomes

$$\begin{aligned} Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Tx + U, \\ A'x^n + B'x^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + T'x + U', \end{aligned}$$

qui ne soient *nécessairement* entiers que par rapport à  $x$ , et dont les coefficients  $A, B, C, \dots A', B', C', \dots$  soient quelconques, on peut se proposer de *trouver un troisième polynome, de même forme et de même nature que les deux précédents, qui, multiplié par le second, reproduise le premier.*

Le procédé pour effectuer cette division est analogue à celui de la division ordinaire; mais il y a cette différence que, dans celle-ci, *le premier terme de chaque dividende partiel doit être exactement divisible par le premier terme du diviseur*; au lieu que, dans la nouvelle espèce de division, on divise le premier terme de chaque dividende partiel (c'est-à-dire *la partie affectée de la plus haute puissance de la lettre principale*), par le premier terme du diviseur, sans s'inquiéter si le coefficient du quotient partiel correspondant est entier ou fractionnaire; et l'on continue l'opération *jusqu'à ce qu'on obtienne un quotient qui, multiplié par le diviseur, anéantisse le dernier dividende partiel*, auquel cas la division proposée est dite exacte; ou bien, *jusqu'à ce que l'on parvienne à un reste de plus faible degré que celui du diviseur*, par rapport à la lettre principale, auquel cas la division est regardée comme impossible, puisqu'en poussant plus loin l'opération, on obtiendrait des quotiens renfermant la lettre principale avec des exposans négatifs, ou cette même lettre en dénominateur; ce qui serait contre la nature de la question, qui

exige que le quotient soit de même forme que les polynomes proposés.

240. Pour distinguer les polynomes entiers par rapport à une lettre,  $x$  par exemple, mais dont les coefficients sont quelconques, des polynomes ordinaires, c'est-à-dire des polynomes entiers par rapport à toutes les lettres et aux nombres particuliers qui y entrent, nous conviendrons de désigner les premiers sous la dénomination de *fonctions entières de  $x$* ; et nous appellerons *diviseurs relatifs* de ces polynomes d'autres polynomes de même nature, qui les divisent exactement, dans le sens que nous venons d'établir.

241. Il résulte de ces définitions que, dès qu'une fonction entière de  $x$  a pour diviseur relatif un autre polynome de même espèce, le produit de ce diviseur par un facteur quelconque indépendant de la lettre principale, est encore un diviseur relatif du premier polynome.

En effet, supposons que l'on ait

$$\frac{Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + U}{A'x^n + B'x^{n-1} + \dots + U'} = A''x^{m-n} + B''x^{m-n-1} + \dots + U''.$$

Soit  $K$  un facteur quelconque indépendant de  $x$ ; on a nécessairement

$$\frac{Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + U}{K(A'x^n + B'x^{n-1} + \dots + U')} = \frac{A''}{K}x^{m-n} + \frac{B''}{K}x^{m-n-1} + \dots + \frac{U''}{K};$$

et le second membre de cette identité est une fonction entière de  $x$ ; donc  $K(A'x^n + B'x^{n-1} + \dots)$  est diviseur relatif de  $Ax^m + Bx^{m-1} + \dots$ .

*Ce qu'il fallait prouver.*

Cela posé, nous allons démontrer, sur la divisibilité des fonctions entières, quelques principes analogues à ceux qui ont été établis en Arithmétique pour les nombres entiers.

242. PREMIER PRINCIPE. Toute fonction entière  $D$ , qui divise exactement le produit  $A \times B$  de deux autres fonctions entières,

*et qui est première avec l'une d'elles, A, par exemple, divise nécessairement l'autre B.*

(On dit que deux fonctions entières sont premières entre elles lorsqu'elles n'ont aucun diviseur commun en  $x$ .)

*Démonstration.* D'abord, si A est indépendant de  $x$ , la proposition est évidente; car soit, d'après l'énoncé,

$$\frac{A \times B}{D} = Px^n + Qx^{n-1} + \dots + Tx + U;$$

on a, en divisant les deux membres par A,

$$\frac{B}{D} = \frac{P}{A}x^n + \frac{Q}{A}x^{n-1} + \dots + \frac{T}{A}x + \frac{U}{A}.$$

Or, A étant, par hypothèse, indépendant de  $x$ , le second membre de cette équation est une fonction entière. Donc, etc.

Supposons maintenant que A, soit fonction de  $x$ , et de degré plus élevé que D.

Divisons A par D; on a l'équation

$$A = DQ + R. \dots (1),$$

(le reste R est différent de 0, puisqu'on suppose A et D premiers entre eux.)

Multipliant par B et divisant ensuite par D les deux membres de l'équation (1), on en déduit

$$\frac{AB}{D} = BQ + \frac{BR}{D}.$$

Or,  $\frac{AB}{D}$  et BQ étant des fonctions entières, il doit en être de

même de  $\frac{BR}{D}$ ; c'est-à-dire que D, diviseur relatif de AB, l'est aussi de BR; et si R était indépendant de  $x$ , comme cela pourrait avoir lieu, la proposition se trouverait démontrée d'après ce qui a été dit tout à l'heure.

Mais soit encore  $R$  fonction de  $x$ , et divisons  $D$  par  $R$ ; on obtient la nouvelle équation

$$D = RQ' + R' \dots (2).$$

( $R'$  est différent de 0, car autrement  $D$  serait divisible par  $R$ , et il en serait de même de  $A$ , en vertu de l'équation (1); ainsi  $A$  et  $D$  auraient un facteur commun en  $x$ , ce qui serait contre l'hypothèse.)

On déduit de l'équation (2),

$$B = \frac{BRQ'}{D} + \frac{BR'}{D};$$

or, le premier membre  $B$ , et la première partie  $\frac{BRQ'}{D}$  du second membre, sont deux fonctions entières; donc, il doit en être de même de  $\frac{BR'}{D}$ ; c'est-à-dire que  $D$ , diviseur relatif de  $AB$  et de  $BR$ , l'est nécessairement de  $BR'$ ; et si  $R'$  était indépendant de  $x$ , le théorème serait démontré.

Mais en supposant encore  $R'$  fonction de  $x$ , on peut diviser  $R$  par  $R'$ , ce qui donnera un nouveau reste  $R''$ , différent de 0, sans quoi  $R'$ , diviseur relatif de  $R$ , le serait de  $D$ , en vertu de l'égalité (2), et par suite de  $A$ , d'après l'égalité (1); donc  $A$  et  $D$  auraient un facteur commun en  $x$ , ce qui serait contre l'hypothèse. On sera donc conduit à cette nouvelle conséquence, que  $D$ , diviseur relatif de  $AB$ ,  $BR$ ,  $BR'$ , l'est nécessairement de  $BR''$ .

Observons maintenant que les degrés en  $x$  des restes  $R$ ,  $R'$ ,  $R'' \dots$  vont en diminuant; donc, comme on ne peut obtenir un reste nul, immédiatement après un reste fonction de  $x$  (car ce serait supposer que ce dernier reste serait diviseur relatif de  $D$  et de  $A$ ), on doit parvenir à un reste  $R^{(*)}$  indépendant de  $x$ , et tel que le produit  $B \times R^{(*)}$  soit divisible par  $D$ ; ce qui exige que  $B$  lui-même soit divisible par  $D$ .

N. B. On a supposé  $A$  de plus haut degré que  $D$ ; s'il en

était autrement, on diviserait  $D$  par  $A$ ; du reste, les opérations et les raisonnemens seraient les mêmes.

243. CONSÉQUENCE. *Toute fonction entière  $D$ , première avec deux ou plusieurs autres fonctions entières,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ..., ne peut diviser leur produit.*

Car, pour que  $D$  divisât  $ABC$ ... ou  $A \times BC$ ..., comme elle est première avec  $A$ , il faudrait qu'elle divisât  $BC$ ...; de même, pour diviser  $BC$ ..., ou  $B \times CE$ ..., il faudrait que  $D$  divisât  $CE$ .... On prouverait ainsi que  $D$  devrait diviser la dernière fonction entière, ce qui serait contre la supposition.

244. SECOND PRINCIPLE. *Toute fonction entière  $D$ , du 1<sup>er</sup> degré en  $x$ , qui divise le produit  $AB$  de deux autres fonctions entières, doit nécessairement diviser l'une de ces deux fonctions.*

En effet, supposons que  $D$  ne divise pas  $A$ , il ne peut être que premier avec  $A$ ; donc, en vertu du principe du n° 242,  $D$  doit diviser  $B$ .

245. CONSÉQUENCES. 1°. *Toute fonction entière  $D$ , du 1<sup>er</sup> degré en  $x$ , qui divise  $A^2$ , et en général, une puissance quelconque  $A^n$  d'une fonction entière  $A$ , doit diviser  $A$ . Car,  $A^2$  est la même chose que  $A \times A$ ; or, tout polynome du 1<sup>er</sup> degré en  $x$ , qui divise ce produit, doit, d'après le second principe, diviser l'un des facteurs.*

De même,  $A^3$  étant égal à  $A \times A^2$ , tout polynome du 1<sup>er</sup> degré en  $x$ , qui divise  $A^3$ , doit diviser  $A$  ou  $A^2$ ; et ainsi de suite.

2°. *Si  $A$  et  $B$  sont deux fonctions entières de  $x$  premières entre elles,  $A^n$  et  $B^n$  sont aussi des fonctions premières entre elles.*

Car, tout polynome du 1<sup>er</sup> degré en  $x$ , qui diviserait à la fois  $A^n$  et  $B^n$ , devrait diviser  $A$  et  $B$ , ce qui serait contre la supposition.

246. TROISIÈME PRINCIPLE. *Toute fonction entière  $A$ , qui est divisible par deux ou plusieurs autres fonctions entières  $D$ ,  $D'$ ,  $D''$ ..., premières entre elles, est divisible par leur produit  $DD'D''$ ....*

En effet, on a, par hypothèse,  $A = DQ$ ,  $Q$  étant une fonction entière; or,  $D'$  divisant  $A$ , doit diviser sa valeur  $DQ$ ; et comme  $D'$  est premier avec  $D$ , il doit diviser  $Q$ , et l'on a  $Q = D'Q'$ ; d'où, substituant dans l'expression de  $A$ , . . . . .

$A = DD'Q'$ , ou bien,  $\frac{A}{DD'} = Q'$ , fonction entière. De même,

$D''$  divisant  $A$ , doit diviser  $DD' \times Q'$ ; mais il est premier avec chacun des polynomes  $D$ ,  $D'$ , et par conséquent avec  $DD'$ ; donc  $D''$  doit diviser  $Q'$ , et l'on a

$$Q' = D''Q'', \text{ d'où } A = DD'D''Q'',$$

ou bien,  $\frac{A}{DD'D''} = Q''$ .

Et ainsi de suite.

247. CONSÉQUENCE. Si  $d, d', d'' \dots$  étant des fonctions entières premières entre elles, une autre fonction entière  $A$ , a pour diviseurs relatifs particuliers, certaines puissances de  $d, d', d'' \dots$ , savoir,  $d^n, d'^n, d''^n \dots$ , le même polynome  $A$  est divisible par le produit  $d^n \cdot d'^n \cdot d''^n \dots$ , et par tous les polynomes qu'on peut former en multipliant deux à deux, trois à trois, . . . les diverses puissances de  $d, d', d'' \dots$ , comprises depuis la première jusqu'à celle dont le degré est marqué par  $n$  pour  $d$ , par  $n'$  pour  $d' \dots$

Car  $d, d', d'' \dots$  étant des polynomes premiers entre eux, il en est de même de  $d^2, d'^2, \dots d'^3, d'^3 \dots$  (n° 246); dès lors les produits deux à deux, trois à trois, . . . sont autant de diviseurs relatifs de  $A$ .

248. SCHOLIE GÉNÉRAL. Lorsqu'une fonction entière  $P$  a été formée par la multiplication de plusieurs autres fonctions entières  $P', P'', P''', P^{iv} \dots$ , en sorte que l'on ait

$$P = P'P''P'''P^{iv} \dots,$$

ce polynome ne peut avoir pour diviseurs relatifs du 1<sup>er</sup> degré en  $x$ , que ceux qui entrent dans les différens polynomes  $P, P',$

$P'$ , ..., ou les produits de ces diviseurs relatifs par des facteurs indépendans de  $x$ .

C'est une conséquence évidente de tout ce qui précède.

Nous pouvons actuellement passer à l'exposition des propriétés communes à toutes les équations.

#### PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ÉQUATIONS.

249. Toute équation complète du degré  $m$  ( $m$  étant un nombre entier et positif), peut, par la transposition des termes et après la division des deux membres par le coefficient de  $x^m$ , être ramenée à la forme

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0;$$

$P, Q, R, \dots T, U$  étant des coefficients pris dans le sens algébrique le plus général.

Cela posé, l'on appelle *racine* de cette équation (voy. n° 98), toute expression, de quelque nature qu'elle soit, c'est-à-dire, numérique ou algébrique, réelle ou imaginaire, qui, substituée à la place de  $x$  dans l'équation, rend son premier membre égal à 0.

250. Une équation pouvant toujours être considérée comme la traduction algébrique des relations qui existent entre les données et l'inconnue d'un problème, on est conduit naturellement à ce principe, que TOUTE ÉQUATION a au moins une racine. A la vérité, les conditions de l'énoncé peuvent être incompatibles; mais alors on doit supposer que l'on en serait averti par quelque symbole d'absurdité, tel qu'une formule renfermant, comme opération nécessaire, l'extraction d'une racine de degré pair d'une quantité négative; et il n'en existerait pas moins une expression qui, mise à la place de  $x$  dans l'équation, y satisferait. Nous admettrons donc ce principe, que nous aurons d'ailleurs occasion de vérifier par la suite, pour la plupart des équations (\*).

---

(\*) M. Cauchy, professeur à l'École royale Polytechnique, a donné, dans ses leçons, une démonstration complète de cette proposition; mais elle n'est pas de nature à trouver place dans les *Éléments*.



Voici maintenant une nouvelle proposition, que l'on peut regarder comme la propriété fondamentale de la théorie des équations.

251. PREMIÈRE PROPRIÉTÉ. Si  $a$  est racine de l'équation...  
 $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + U = 0$ , le premier membre de  
cette équation est divisible par  $x - a$ ; et réciproquement, si  
un facteur de la forme  $x - a$  divise le premier membre de la  
proposée,  $a$  est racine de cette équation.

En effet, essayons la division, et voyons ce qui doit avoir lieu quand on pousse l'opération jusqu'à ce que l'exposant de  $x$  devienne 0 dans le premier terme du dividende.

( Cette opération est de la nature de celle dont nous avons parlé n° 239, puisque  $\alpha$ ,  $P$ ,  $Q$ , . . . . sont de nature quelconque. )

$$\begin{array}{r} x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U \overline{) x^{m-a}} \\ \underline{+ a | x^{m-1}} \hspace{10em} | x^{m-1} + a | x^{m-2} + a^2 | x^{m-3} + \dots + a^{m-1} \\ \underline{+ P |} \hspace{10em} \underline{+ P a} \hspace{10em} \underline{+ P a^{m-1}} \\ \hspace{10em} \underline{+ Q} \hspace{10em} \underline{+ Q a^{m-2}} \\ \hspace{10em} \underline{+ \dots} \\ \hspace{10em} \underline{+ T} \end{array}$$

.....

.....

.....

Pour peu qu'on réfléchisse sur la manière dont s'obtiennent les quotiens partiels, on reconnaît d'abord, par analogie, et ensuite par un moyen déjà employé plusieurs fois (n<sup>os</sup> 31 et 86), une *loi de formation* pour les coefficients de ces divers quotiens; et l'on peut conclure, 1<sup>o</sup>. qu'on doit avoir  $m$  quotiens partiels, 2<sup>o</sup>. que le coefficient du  $m^{i\text{ème}}$  quotient, c'est-à-dire de  $x^0$ , doit être

$$a^{m-1} + Pa^{m-2} + Qa^{m-3} + \dots + T,$$

T étant le coefficient de l'avant-dernier terme de la proposée.

Donc, en multipliant le diviseur par ce quotient et réduisant

avec le dividende, on obtient pour reste

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + \dots + Ta + U.$$

Or, par hypothèse,  $a$  est racine de l'équation; donc, *ce reste est nul*, puisqu'il n'est autre chose que le résultat de la substitution de  $a$  à la place de  $x$  dans l'équation; ainsi, *la division se fait exactement*.

Réciproquement, si  $x - a$  est diviseur exact de  $x^m + Px^{m-1} + \dots$ , le reste  $a^m + Pa^{m-1} + \dots$  doit être *nul*; ainsi (n° 249),  $a$  est racine de l'équation.

252. Il résulte de là que, pour reconnaître si un binôme de la forme  $x - a$  est diviseur exact d'un polynôme en  $x$ , il suffit de voir si le résultat de la substitution de  $a$  au lieu de  $x$ , est égal à 0.

Réciproquement, pour s'assurer si  $a$  est racine d'un polynôme en  $x$  égalé à 0, il suffit d'essayer la division par  $x - a$ . Lorsque la division réussit, on est certain que  $a$  est racine de l'équation.

253. *Remarque.* En jetant les yeux sur le quotient de la division effectuée n° 251, on aperçoit pour les coefficients la loi suivante: *Chaque coefficient s'obtient en multipliant celui qui le précède par la racine  $a$ , et ajoutant au produit le coefficient de la proposée, qui occupe le même rang que celui du terme qu'on veut obtenir dans le quotient.*

Ainsi, le coefficient du 3<sup>e</sup> terme,  $a^2 + Pa + Q$ , est égal à  $(a + P)a + Q$ , ou au produit du coefficient précédent  $a + P$ , par la racine  $a$ , augmenté du coefficient  $Q$  du 3<sup>e</sup> terme de la proposée.

Le coefficient du 4<sup>e</sup> terme serait

$$(a^2 + Pa + Q)a + R \quad \text{ou} \quad a^3 + Pa^2 + Qa + R.$$

Nous aurons quelquefois besoin de rappeler cette loi, qui d'ailleurs est facile à retenir.

254. *SECONDE PROPRIÉTÉ.* Toute équation, à une seule inconn-

nue, a autant de racines qu'il y a d'unités dans l'exposant de son degré, et ne peut en avoir davantage.

Soit  $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots Tx + U = 0$ , l'équation proposée.

Puisque (n° 250) toute équation a au moins une racine, si l'on désigne par  $a$  la racine que l'équation précédente comporte nécessairement, son premier membre est (n° 251) divisible par  $x - a$ , et l'on a l'identité

$$x^m + Px^{m-1} + \dots = (x - a)(x^{m-1} + P'x^{m-2} + \dots) \dots (1).$$

Mais en posant  $x^{m-1} + P'x^{m-2} + \dots = 0$ ,

on obtient une autre équation qui a au moins une racine.

Soit  $b$  cette racine, on a (n° 251)

$$x^{m-1} + P'x^{m-2} + \dots = (x - b)(x^{m-2} + P''x^{m-3} + \dots),$$

égalité qui, multipliée membre à membre avec l'égalité (1), donne

$$x^m + Px^{m-1} + \dots = (x - a)(x - b)(x^{m-2} + P''x^{m-3} + \dots) \dots (2).$$

Raisonnant sur le polynome  $x^{m-2} + P''x^{m-3} + \dots$  comme sur le précédent, on a encore

$$x^{m-2} + P''x^{m-3} + \dots = (x - c)(x^{m-3} + P'''x^{m-4} + \dots),$$

égalité qui, multipliée par l'égalité (2), donne

$$x^m + Px^{m-1} + \dots = (x - a)(x - b)(x - c)(x^{m-3} + \dots) \dots (3).$$

Remarquons maintenant que, pour chaque facteur du 1<sup>er</sup> degré en  $x$ , mis en évidence, le degré de  $x$  dans le polynome-quotient diminue d'une unité. Ainsi, lorsqu'on aura fait ressortir  $m - 2$  facteurs du 1<sup>er</sup> degré, l'exposant de  $x$  sera réduit à  $m - (m - 2)$  ou 2; c'est-à-dire qu'on obtiendra un polynome du second degré en  $x$ , qui (n° 98) est lui-même décomposable dans le produit de deux facteurs du 1<sup>er</sup> degré,  $(x - k)(x - l)$ . Or, comme on aura déjà mis  $m - 2$  fac-

teurs du 1<sup>er</sup> degré en évidence, il s'ensuit que finalement on a l'identité

$$x^m + Px^{m-1} + \dots = (x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-k)(x-l).$$

D'où l'on voit déjà que le premier membre de la proposée est décomposé dans le produit de  $m$  facteurs du premier degré en  $x$ .

Cela posé, comme à chaque diviseur du premier degré en  $x$ , correspond nécessairement (n° 251) une racine de la proposée, il s'ensuit que les  $m$  facteurs du premier degré  $x-a$ ,  $x-b$ ,  $x-c$ ,... donnent pour la proposée les  $m$  racines  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,...

Il résulte d'ailleurs évidemment de la proposition établie n° 248, que le polynome  $x^m + Px^{m-1} + \dots$  ne peut avoir d'autres diviseurs relatifs du 1<sup>er</sup> degré, que  $x-a$ ,  $x-b$ ,  $x-c$ ,...  $x-k$ ,  $x-l$ , ou le produit de l'un de ces diviseurs relatifs par un facteur quelconque indépendant de  $x$ . Donc l'équation elle-même ne peut avoir pour racines que  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,...  $k$ ,  $l$ , puisque l'existence d'une racine  $\alpha$ , différente de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,...  $l$ , entraîne l'existence d'un diviseur relatif  $x-\alpha$ , différent de  $x-a$ ,  $x-b$ ,...  $x-l$ ; ce qui est impossible.

Donc enfin, toute équation du degré  $m$  a  $m$  racines, et ne peut en avoir davantage.

255. *Remarque.* Il existe des équations qui, en apparence, renferment moins de racines qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de leur degré. Ce sont celles dont le premier membre est le produit de facteurs égaux; telle serait l'équation

$$(x-a)^4(x-b)^3(x-c)^2(x-d)=0,$$

qui n'a que quatre racines différentes,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , quoiqu'elle soit du 10<sup>e</sup> degré.

Il est évident qu'aucune quantité  $\alpha$ , différente de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , ne peut la vérifier. Car l'existence de cette racine  $\alpha$  entraînerait celle du diviseur  $x-\alpha$ , dans le premier membre, ce qui est impossible (n° 248), puisque  $x-\alpha$  est premier avec  $x-a$ ,  $x-b$ ,  $x-c$ ,  $x-d$ .

Mais la proposée n'en a pas moins *dix* racines, dont *quatre* sont égales à  $a$ , *trois* égales à  $b$ , *deux* égales à  $c$ , et *une* égale à  $d$ .

Nous verrons par la suite que ces sortes d'équations sont plus faciles à résoudre que celles dont les racines n'ont entre elles aucune relation déterminée.

256. *Conséquence de la seconde propriété.*

Le premier membre de toute équation du degré  $m$  ayant  $m$  diviseurs du premier degré de la forme

$$x-a, x-b, x-c, \dots x-k, x-l,$$

si l'on multiplie ces diviseurs *deux à deux, trois à trois,....* on obtiendra ainsi (n° 247) autant de diviseurs relatifs du second, du troisième.... degré en  $x$ , que l'on peut former de combinaisons différentes avec  $m$  quantités prises deux à deux, trois à trois.... Or, ces nombres de combinaisons sont, comme on l'a

vu n° 150, exprimés par  $m \cdot \frac{m-1}{2}$ ,  $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \dots$ . Ces produits sont d'ailleurs (n° 248) les seuls diviseurs du même degré, que le premier membre de la proposée puisse avoir, à moins que l'on ne considère ensuite les produits de ces diviseurs relatifs par des facteurs indépendans de  $x$ .

Ainsi, la proposée renferme  $m \cdot \frac{m-1}{2}$  diviseurs du second degré,  $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$  diviseurs du troisième degré, et ainsi de suite.

257. COMPOSITION DES ÉQUATIONS. Si, dans l'équation identique

$$x^m + Px^{m-1} + \dots = (x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-l),$$

on effectue la multiplication des  $m$  facteurs du second membre (voyez n° 151), et que l'on compare, terme à terme, les deux membres, on parviendra aux relations suivantes entre les coefficients  $P, Q, R, \dots T, U$ , et les racines  $a, b, c, \dots k, l$ , de la

proposée, savoir :

$$\begin{aligned} -a-b-c\dots-k-l &= P, \text{ ou } a+b+c\dots+k+l = -P; \\ ab+ac+\dots+kl &= Q, \dots\dots\dots \\ -abc-abd\dots-ikl &= R, \text{ ou } abc+abd\dots+ikl = -R; \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \pm abcd\dots k &= U \text{ ou } abcd\dots k = \pm U. \end{aligned}$$

(On a placé un double signe dans la dernière relation, parce que le produit  $-a \times -b \times -c \dots \times -l$ , est *plus* ou *moins*  $abcd\dots kl$ , suivant que l'équation est de degré pair ou impair.)

Donc, 1°. *La somme algébrique des racines prises en signes contraires, est égale au coefficient du second terme; ou bien, la somme algébrique des racines elles-mêmes est égale au coefficient du second terme, pris en signe contraire.*

2°. *La somme des produits deux à deux des racines prises avec leurs signes respectifs, est égale au coefficient du troisième terme.*

3°. *La somme des produits trois à trois des racines prises en signes contraires, est égale au coefficient du quatrième terme; ou bien, le coefficient du quatrième terme, pris en signe contraire, est égal à la somme des produits trois à trois des racines prises avec leurs signes.*

Et ainsi de suite.

Enfin, *le produit de toutes les racines, prises en signes contraires, est égal au dernier terme; ou bien, le produit de toutes les racines, prises avec leurs signes respectifs, est égal au dernier terme de l'équation, pris avec son signe, si l'équation est de degré pair, et avec un signe contraire, si l'équation est de degré impair.*

Les propriétés démontrées n° 98, par rapport aux équations du second degré, ne sont que des cas particuliers de celles qui viennent d'être établies. Le dernier terme, pris avec son signe, est égal au produit des racines elles-mêmes, parce que l'équation est de degré pair.

*N. B.* On a supposé, dans tout ce qui précède, le coefficient du premier terme égal à l'unité. S'il en était autrement, il faudrait, avant d'établir les relations ci-dessus entre les coefficients et les racines, il faudrait, dis-je, diviser toute l'équation par ce coefficient.

## THÉORIE COMPLÈTE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

258. En réfléchissant sur les propriétés précédentes, on aperçoit une certaine analogie entre la recherche des diviseurs relatifs de différens degrés d'une fonction entière de  $x$  et la résolution d'une équation. En effet, il résulte de la propriété du n° 254, que tout polynome  $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Tx + U$  est décomposable en  $m$  facteurs du premier degré; et pour obtenir cette décomposition, il suffirait d'égaliser le polynome à 0, et de résoudre l'équation par rapport à la lettre principale  $x$ .

On voit d'ailleurs, d'après cette même propriété, qu'il n'y a que les polynomes du premier degré qui ne puissent pas être décomposés.

Ainsi,  $a^2 - ab + bc$  étant un polynome du second degré en  $a$ , est décomposable en

$$\left(a - \frac{b + \sqrt{b^2 - 4bc}}{2}\right) \left(a - \frac{b - \sqrt{b^2 - 4bc}}{2}\right),$$

lorsqu'on pose l'équation  $a^2 - ba + bc = 0$ , et que l'on résout cette équation.

Le polynome  $a^3 - 3ab^2 + 2b^2c + 3bc^2$  est décomposable en deux facteurs du premier degré en  $b$ , que l'on obtiendrait en résolvant l'équation

$$(2c - 3a)b^2 + 3c^2b + a^3 = 0,$$

par rapport à  $b$ .

Il est aussi décomposable en deux facteurs du premier degré en  $c$ ; mais pour obtenir les trois facteurs du premier degré en

$a$ , dont il se compose, il faudrait résoudre une équation du 3<sup>me</sup> degré.

Si l'on a besoin de savoir résoudre une équation pour obtenir les diviseurs relatifs d'un polynome, cela n'est pas nécessaire pour obtenir ce qu'on appelle *le plus grand commun diviseur relatif de deux polynomes*. Les analystes ont même tiré parti de cette dernière question pour la résolution de certaines classes d'équations. Ainsi, avant de pénétrer davantage dans la théorie des équations, il est nécessaire que nous nous occupions de la recherche du plus grand commun diviseur.

Nous traiterons d'abord le cas de deux fonctions entières de  $x$ , après quoi nous considérerons celui où les deux polynomes sont entiers par rapport à toutes les lettres et aux coefficients.

*Du plus grand commun diviseur relatif.*

259. Le plus grand commun diviseur relatif de deux fonctions entières de  $x$  est le polynome de plus haut degré en  $x$ , qui divise à la fois les deux polynomes proposés.

Il résulte évidemment de cette définition que, lorsque les deux polynomes ont été divisés par leur plus grand commun diviseur, les quotiens résultans ne doivent plus renfermer aucun facteur commun en  $x$ ; car, s'il en existait un, le produit de ce facteur par le diviseur déjà considéré serait de degré plus élevé en  $x$  que ce diviseur, et serait encore diviseur relatif des deux polynomes.

Cela posé, soient  $d, d', d''$  les seuls facteurs du premier degré en  $x$ , communs à deux fonctions entières, et supposons que  $n, n', n''$  soient les exposans des puissances de ces facteurs, communes aux deux polynomes, comme  $d^n, d'^{n'}, d''^{n''}$  sont des diviseurs relatifs premiers entre eux, il s'ensuit (n° 247) que le produit  $d^n \cdot d'^{n'} \cdot d''^{n''}$  est le diviseur relatif de plus haut degré, commun aux deux polynomes, puisque tous les autres ne peuvent être que des combinaisons 2 à 2, 3 à 3. . . des



diverses puissances de  $d, d', d''$ , compris depuis 1 jusqu'à  $n, n', n''$ .

Nous pouvons donc établir, comme premier principe, 1°. que le plus grand commun diviseur relatif de deux fonctions entières est le produit des plus hautes puissances de tous les diviseurs du 1<sup>er</sup> degré en  $x$ , communes aux deux polynomes; 2°. que tout diviseur relatif commun à deux fonctions entières, divise nécessairement leur plus grand commun diviseur relatif.

N. B. On pourrait encore former une infinité de diviseurs relatifs communs, de même degré que  $d^a \cdot d'^{a'} \cdot d''^{a''}$ ; mais ce serait (n° 241) en multipliant celui-ci par un facteur quelconque indépendant de  $x$ .

260. Second principe. Le plus grand commun diviseur relatif de deux fonctions entières est le même que celui qui existe entre le polynome de plus faible degré et le reste de leur division, ou du moins, n'en diffère que par un facteur indépendant de  $x$ .

En effet, soient  $A$  et  $B$  les deux polynomes,  $D$  leur plus grand commun diviseur relatif,  $Q$  et  $R$  le quotient et le reste de leur division,  $D'$  le plus grand commun diviseur relatif de  $B$  et de  $R$ ; on a l'équation

$$A = B \times Q + R,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{A}{D} = \frac{BQ}{D} + \frac{R}{D} \quad \text{et} \quad \frac{A}{D} = \frac{BQ}{D'} + \frac{R}{D'}.$$

D'abord,  $D$  étant diviseur relatif de  $A$  et de  $B$ , il s'ensuit que  $\frac{A}{D}$  et  $\frac{BQ}{D}$  sont des fonctions entières de  $x$ ; ainsi, il doit en être de même de  $\frac{R}{D}$ ; c'est-à-dire que  $D$  est diviseur relatif de  $B$  et de  $R$ . Donc, d'après le premier principe,  $D$  doit diviser  $D'$ , qui est le plus grand commun diviseur entre  $B$  et  $R$ .

De même,  $D'$ , diviseur relatif de  $B$  et de  $R$ , l'est aussi de  $BQ$  et de  $R$ , et par conséquent, de  $BQ + R$  ou  $A$ . Ainsi  $D'$ , diviseur relatif de  $A$  et de  $B$ , doit diviser  $D$ , qui est le plus grand commun diviseur entre  $A$  et  $B$ .

Les deux polynomes  $D$  et  $D'$  sont donc réciproquement divisibles l'un par l'autre, ce qui exige qu'ils soient de même degré, et par conséquent (n° 259) qu'ils soient égaux entre eux, ou ne diffèrent l'un de l'autre que par un facteur indépendant de  $x$ .

261. De ces deux principes, résulte le procédé suivant pour trouver le plus grand commun diviseur relatif de deux fonctions entières :

*Divisez le polynome de plus haut degré en  $x$  par le second; si la division se fait exactement, le second polynome est le p. g. c. d. cherché. Si vous obtenez un reste, divisez le second polynome par le reste; en supposant que cette division se fasse exactement, le reste est le p. g. c. d. entre ce reste lui-même et le second polynome, et par conséquent aussi entre les deux polynomes proposés. Si vous obtenez un second reste, divisez le premier reste par le second, et continuez ainsi l'opération jusqu'à ce que vous parveniez à un reste qui divise exactement le reste précédent; ce sera le plus grand commun diviseur cherché.*

Lorsqu'en appliquant le procédé ci-dessus, on parvient à un reste indépendant de  $x$ , on peut conclure que les deux polynomes proposés sont premiers entre eux, en ce sens, qu'ils n'admettent aucun diviseur commun en  $x$ ; car le plus grand commun diviseur étant (n° 259) diviseur relatif du reste de chaque division, devrait aussi diviser le reste indépendant de  $x$ , auquel on est parvenu, ce qui est impossible.

Nous verrons (n° 275) les modifications que l'on peut, dans la pratique, apporter à ce procédé, lorsqu'on l'applique à une certaine classe de polynomes.

262. Soit maintenant à déterminer le plus grand commun diviseur relatif de plusieurs fonctions entières  $A, B, C, E, \dots$

Appelons  $D$  le p. g. c. d. entre  $A$  et  $B$ ,  $D'$  le p. g. c. d. entre  $D$  et  $C$ ; je dis que  $D'$  est aussi le p. g. c. d. de  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

En effet, le p. g. c. d. de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  devant diviser  $A$  et  $B$ , divise leur plus p. g. c. d.  $D$ ; d'ailleurs, il divise aussi  $C$ ; ainsi il doit diviser  $D'$ , qui est le p. g. c. d. de  $D$  et  $C$ ; il ne peut donc être d'un degré plus élevé que  $D'$ . Mais  $D'$  est évidemment commun aux trois polynômes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ; donc enfin,  $D'$  est leur p. g. c. d.

On prouverait, d'une manière analogue, que le p. g. c. d.  $D''$  entre  $D'$  et  $E$ , est le p. g. c. d. entre  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $E$ ; et ainsi de suite.

*N. B.* Dans les applications, on commence par chercher le p. g. c. d. entre les deux polynômes de plus faible degré, puis entre celui qu'on a ainsi obtenu et le troisième polynôme le plus simple, etc.

263. En résumant les règles précédentes, on voit que, par une suite de divisions algébriques, on peut toujours obtenir le plus grand commun diviseur relatif entre deux ou plusieurs polynômes en  $x$ , quelle que soit la nature des coefficients des diverses puissances de cette lettre principale.

On peut encore remarquer que toutes les fois qu'on opère sur des polynômes rationnels, c'est-à-dire sur des polynômes qui ne renferment aucun signe de l'extraction des racines, l'application du procédé conduit à des quotiens et des restes qui peuvent être entiers ou fractionnaires, mais qui sont essentiellement rationnels. Ainsi le plus grand commun diviseur relatif, auquel on parvient par ce procédé, ne peut être que rationnel.

*Du plus grand commun diviseur algébrique ordinaire.*

264. Les polynômes que nous allons maintenant considérer seront de la nature de ceux sur lesquels nous avons opéré dans le premier chapitre, et nous les appellerons des polynômes ration-

nels et entiers, parce que leur caractère consiste en ce que, composés d'un nombre limité de termes, comme les fonctions entières, ils ne renferment dans leur expression aucun des signes de la division ou de l'extraction des racines; c'est-à-dire que les coefficients numériques ou algébriques sont entiers, et il n'entre dans ces polynomes que des exposans entiers et positifs pour toutes les lettres.

Un polynome rationnel et entier est dit *facteur* ou *diviseur* d'un second polynome de même nature, lorsqu'il existe un troisième polynome rationnel et entier qui, multiplié par le premier, peut reproduire le second; et c'est par le procédé de la division algébrique ordinaire, qu'on reconnaît si le premier polynome est facteur du second.

Tout polynome rationnel et entier est dit *premier absolu*, lorsqu'il n'a pas d'autre diviseur rationnel et entier que lui-même ou l'unité qui est diviseur de toute quantité entière; et deux polynomes rationnels et entiers sont dits *premiers entre eux*, lorsqu'ils n'admettent d'autre facteur commun, rationnel et entier que l'unité.

265. Ces définitions étant bien comprises, nous regarderons comme démontrée la proposition suivante (\*): *Tout polynome premier P (RATIONNEL ET ENTIER) qui divise exactement le produit  $A \times B$  de deux autres polynomes rationnels et entiers, doit nécessairement diviser l'un de ces polynomes*; et voici les conséquences qu'on peut en tirer:

*Premièrement.* Concevons qu'un polynome rationnel et entier A soit déjà décomposé dans le produit de plusieurs facteurs premiers, numériques ou algébriques, mais rationnels et entiers, et que l'on ait

$$A = P \cdot P' \cdot P'' \cdot P''' \dots P^{(n)}$$

(plusieurs de ces facteurs premiers pouvant être égaux entre eux).

---

(\*) Voyez, pour la démonstration, la note qui est à la fin de l'ouvrage.

Il résulte de la proposition qui vient d'être énoncée, qu'aucun polynôme premier  $p$  différent de  $P, P', P'' \dots P^{(n)}$ , ne peut diviser  $A$ ; car pour diviser  $A$ , il faut que  $p$  divise  $P \times P' P'' \dots P^{(n)}$ : or, s'il est différent de  $P$ , il ne peut le diviser (puisque  $P$  est premier), et il doit par conséquent diviser  $P' P'' \dots P^{(n)}$ . Par la même raison, si  $p$  est différent de  $P'$ , il doit diviser  $P'' P''' \dots P^{(n)}$ , et ainsi de suite; d'où l'on conclurait que  $p$  doit être égal au dernier facteur  $P^{(n)}$ , ce qui est contre l'hypothèse.

Ainsi, *les seuls facteurs rationnels et entiers que  $A$  puisse renfermer, sont les facteurs  $P, P', P'', \dots P^{(n)}$ , dans lesquels  $A$  est déjà décomposé, ou les produits de ces facteurs deux à deux, trois à trois, etc.*

266. *Secondement.* Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes rationnels et entiers,  $D$  leur plus grand commun diviseur, c'est-à-dire (n° 34) *le polynôme le plus grand par rapport aux exposans et aux coefficients, qui divise exactement les deux polynômes donnés.* Si l'on désigne par  $A'$  et  $B'$  les quotiens de leur division par  $D$ , on a (même n°)  $A = A'D, B = B'D$ ,  $A'$  et  $B'$  étant premiers entre eux.

Cela posé, tout diviseur premier  $d$ , commun aux deux polynômes, ne pouvant diviser en même temps  $A'$  et  $B'$ , doit, en vertu de la proposition fondamentale (n° 265), diviser  $D$ . Il est d'ailleurs évident que tout facteur premier  $p$  qui divise  $A$  sans diviser  $B$ , ou réciproquement, ne saurait diviser  $D$ .

Donc, *le plus grand commun diviseur de deux polynômes rationnels et entiers, contient comme facteurs, tous les diviseurs particuliers communs aux deux polynômes, et ne peut pas renfermer d'autres facteurs.*

C'est le premier principe du n° 35 appliqué à deux polynômes rationnels et entiers.

267. *Troisièmement.* On peut reconnaître facilement que  $D$  est égal à  $d^n \cdot d'^n \cdot d''^n \dots$ ;  $d, d', d'' \dots$  étant les facteurs premiers communs aux deux polynômes, et  $n, n', n'' \dots$  les exposans des puissances auxquelles ces facteurs sont à la fois élevés dans les deux polynômes.

En effet, concevons A et B décomposés dans leurs facteurs premiers, et supposons que  $d$  entrant un certain nombre de fois dans A, et un autre nombre de fois dans B,  $d^n$  soit la plus haute puissance commune à A et à B; que  $d'^n$ ,  $d''^n$ ,  $d'''^n$  soient les plus hautes puissances de  $d'$ ,  $d''$ ,  $d'''$  communes à A et à B. Admettons d'ailleurs, pour fixer les idées, que  $d$ ,  $d'$ ,  $d''$ ,  $d'''$  soient les seuls facteurs premiers communs; on aura

$$\begin{aligned} A &= A'' \times d^n \times d'^n \times d''^n \times d'''^n, \\ B &= B'' \times d^n \times d'^n \times d''^n \times d'''^n. \end{aligned}$$

$A''$  et  $B''$  sont nécessairement premiers-entre eux; car si quelque facteur premier divisait encore  $A''$  et  $B''$ , ou il serait l'un des facteurs  $d$ ,  $d'$ ,  $d''$ ,  $d'''$ , auquel cas  $n$ ,  $n'$ ,  $n''$ ,  $n'''$  ne seraient pas les exposans des plus hautes puissances communes; ou bien, il serait différent de  $d$ ,  $d'$ ,  $d''$ ,  $d'''$ , et alors ces dernières quantités ne seraient pas les seuls facteurs premiers communs, ce qui serait contre l'hypothèse.

Maintenant il est clair que les seuls diviseurs rationnels et entiers communs à A et à B ne peuvent être (n° 265) que les puissances  $d$ ,  $d^2$ ,  $d^3$ , ...,  $d^n$ ,  $d'$ ,  $d'^2$ ,  $d'^3$ , ...,  $d'^n$ ,  $d''$ ,  $d''^2$ , ...,  $d''^n$ , ou les produits de ces puissances deux à deux, trois à trois, quatre à quatre. Or, le plus grand diviseur qu'on puisse obtenir ainsi, est évidemment le produit  $d^n \times d'^n \times d''^n \times d'''^n$ . Donc D est égal à ce produit.

Ceci prouve encore que deux polynômes rationnels et entiers ne peuvent avoir qu'un seul plus grand commun diviseur, c'est-à-dire un seul diviseur commun dans lequel les coefficients et les exposans soient les plus grands possibles; tandis que deux fonctions entières ont une infinité de plus grands communs diviseurs relatifs (n° 259.)

268. Quatrièmement. On peut, sans aucun inconvénient, introduire ou supprimer, dans l'un des polynômes A ou B, tel facteur rationnel et entier que l'on juge à propos, pourvu que ce facteur ne se trouve pas déjà dans l'autre polynôme. Car il est évident que le plus grand commun diviseur entre les deux

nouveaux polynômes reste le même qu'entre les polynômes proposés, puisqu'il doit se composer des mêmes facteurs.

269. *Cinquièmement.* Passons à la démonstration du second principe établi n° 35.

Observons d'abord que les deux polynômes A et B peuvent toujours être supposés tels, qu'après les avoir ordonnés par rapport à l'une de leurs lettres communes,  $a$ , et avoir divisé le polynôme de plus haut degré, A par exemple, par le second B, on ait obtenu un quotient *entier* et un reste de même nature, dans lequel le plus haut exposant de  $a$  soit moindre que celui du diviseur.

En effet, pour que, dans chacune des opérations partielles, le quotient soit fractionnaire, il faut que le coefficient du premier terme de chaque dividende partiel ne soit pas exactement divisible par le coefficient du premier terme du diviseur; et alors le dénominateur du quotient partiel est ce dernier coefficient lui-même, ou l'un des facteurs de ce coefficient. Or, il peut se présenter *trois cas* : ou ce coefficient divise en même temps les coefficients des autres puissances de  $a$  qui entrent dans le diviseur; ou il a des facteurs communs avec tous ces coefficients; ou bien, il a avec quelques-uns seulement des facteurs communs qui n'entrent pas dans les autres. (On dit dans ce cas, que tous les coefficients sont *premiers entre eux*.)

Dans les deux premiers cas, B contiendrait comme facteur ce coefficient, ou l'un des facteurs de ce coefficient; et puisque ce facteur ne se trouverait pas dans le dividende, il ne saurait (n° 266) faire partie du plus grand commun diviseur entre A et B. Ainsi (n° 268) on pourrait le supprimer d'avance dans B, et la question serait ramenée à rechercher le plus grand commun diviseur entre A et le résultat B' de la suppression de ce facteur.

Dans le troisième cas, on pourrait multiplier le dividende A par le *multiple le plus simple* des dénominateurs des quotiens fractionnaires obtenus, lequel multiple serait nécessairement *premier avec B*. Le produit de A par ce multiple, ayant (n° 268) avec B le même plus grand commun diviseur que celui

qui existe entre A et B, on pourrait alors opérer sur ce produit A' et sur B, comme sur les deux polynômes primitifs, et l'on serait alors certain d'avoir des quotiens entiers.

Nous pouvons donc admettre *à priori* que les polynômes A et B satisfassent à la condition ci-dessus énoncée.

Cela posé, je dis que le p. g. c. d. entre A et B est le même que le p. g. c. d. entre B et R, R désignant le reste de leur division poussée jusqu'à ce que le reste soit de degré moindre que B, par rapport à la lettre principale a.

En effet, soient D le p. g. c. d. entre A et B, D' le p. g. c. d. entre B et R; on a l'égalité

$$A = B \times Q + R$$

(Q et R étant des polynômes entiers); d'où divisant d'abord par D et ensuite par D'

$$\frac{A}{D} = \frac{B \times Q}{D} + \frac{R}{D} \quad \text{et} \quad \frac{A}{D'} = \frac{B \times Q}{D'} + \frac{R}{D'}.$$

Ces deux dernières égalités prouvent, 1°. que D divisant A, B et par conséquent B×Q, divise aussi R; ainsi D, diviseur commun de B, R, divise (n° 266) D' qui est le p. g. c. d. de B et de R.

2°. Que D' divisant R, B et par conséquent B×Q, divise aussi A; ainsi D' diviseur commun de A, B, divise D, qui est le p. g. c. d. entre A et B.

Puisque D et D' divisés réciproquement l'un par l'autre, doivent donner un quotient entier, ce quotient ne peut être que l'unité, et l'on a

$$D = D'; \quad c. q. f. d.$$

270. Nous terminerons l'exposition de ces principes par une remarque propre à nous guider dans la question qui nous occupe.

Soit A un polynôme rationnel et entier que nous supposons ordonné par rapport à l'une des lettres qui y entrent, a par exemple.

Si ce polynôme n'est pas *premier absolu* (n° 264), c'est-à-dire s'il est décomposable en facteurs rationnels et entiers, il



peut être regardé comme le produit de *trois* facteurs principaux, savoir :

1°. D'un *facteur monome*  $A_1$  commun à tous les termes de  $A$ . (Ce facteur se compose du plus grand commun diviseur qui existe entre tous les coefficients numériques, multiplié par le produit des facteurs littéraux communs à tous les termes);

2°. D'un *facteur polynôme*  $A_2$  indépendant de  $a$ , lequel doit (n° 30) se trouver commun à tous les coefficients des diverses puissances de  $a$ , dans les polynômes ordonnés; .

3°. D'un *facteur polynôme*  $A_3$  dépendant de  $a$ , et dans lequel les coefficients des diverses puissances de  $a$  sont premiers entre eux (n° 26g); en sorte que l'on a

$$A = A_1 \times A_2 \times A_3.$$

Quelquefois, l'un des facteurs  $A_1$ ,  $A_2$  ou tous les deux se réduisent à l'unité; mais du moins, telle est la forme la plus générale d'un polynôme *rationnel et entier*.

Il résulte de là que, lorsqu'il existe un plus grand commun diviseur  $D$  entre deux polynômes rationnels et entiers  $A$  et  $B$ , on a également

$$D = D_1 \cdot D_2 \cdot D_3;$$

$D_1$  désignant le plus grand facteur monome commun,  $D_2$  le plus grand facteur polynôme indépendant d'une lettre commune  $a$ , et  $D_3$  le plus grand facteur polynôme dépendant de cette lettre.

Voici d'ailleurs le moyen d'obtenir  $D_1$  :

On cherche d'abord le *facteur monome*  $A_1$  commun à tous les termes de  $A$ . Ce facteur est en général composé de facteurs littéraux qui se découvrent d'après l'inspection des termes, puis d'un coefficient numérique, que l'on obtient en appliquant aux divers coefficients numériques de  $A$  le procédé établi (Arith. n° 156) pour trouver le p. g. c. d. entre plusieurs nombres à la fois.

On cherche de même le *facteur monome*  $B_1$  commun à tous les termes de  $B$ ; puis on détermine le plus grand facteur  $D_1$  commun à  $A_1$  et à  $B_1$ .

Ce facteur  $D$ , est mis à part, comme formant la première partie du commun diviseur cherché. *On supprime d'ailleurs les facteurs  $A$ , et  $B$ , dans les deux polynômes proposés, et la question est ramenée à chercher le p. g. c. d. entre deux nouveaux polynômes  $A'$  et  $B'$  débarrassés de tout facteur monome. C'est donc à ces deux derniers polynômes qu'il convient d'appliquer le procédé dont nous allons donner le développement.*

271. Il peut se présenter plusieurs circonstances, eu égard au nombre des lettres que  $A'$  et  $B'$  peuvent renfermer.

1<sup>e</sup>.  $A'$  ET  $B'$  NE RENFERMENT QU'UNE SEULE LETTRE  $a$ .

Si l'on ordonne  $A'$  et  $B'$  par rapport à  $a$ , les coefficients seront nécessairement *premiers entre eux*, puisqu'ils sont numériques et qu'on a déjà retiré les facteurs monomes. Ainsi, dans ce cas, il n'y a lieu à rechercher que le plus grand facteur commun dépendant de  $a$ , savoir,  $D_3$  (n° 270).

Pour l'obtenir, on commence (n° 269) par préparer le polynome de plus haut degré, de manière que son premier terme soit exactement divisible par le premier terme du diviseur. Cette préparation consiste à *multiplier tout le dividende par le coefficient du premier terme du diviseur, ou par un facteur de ce coefficient, ou (n° 36) par une certaine puissance de ce coefficient*, afin de pouvoir exécuter plusieurs opérations de suite, sans de nouvelles préparations.

*On effectue alors la division, et l'on pousse l'opération jusqu'à ce qu'on obtienne un reste de plus faible degré que le polynome qui a servi de diviseur.*

*On cherche si, entre les coefficients de ce reste (qui ne peuvent être que des nombres), il n'existerait pas un facteur commun qu'on aurait soin de supprimer, comme ne pouvant faire partie du p. g. c. d. cherché; après quoi, l'on opère sur le second polynome et sur le reste, comme on a opéré sur les deux polynomes  $A'$  et  $B'$  (n° 269).*

*On continue cette série d'opérations jusqu'à ce que l'on soit parvenu à un reste diviseur exact du reste précédent, auquel cas ce reste diviseur est le p. g. c. d.  $D_3$  qui existe entre  $A'$  et  $B'$ ;*

et  $D_1 \times D_3$  exprime alors le p. g. c. d. entre  $A$  et  $B$ ; ou bien, jusqu'à ce qu'on trouve un reste indépendant de  $a$ , c'est-à-dire numérique, et c'est un signe certain que les deux polynomes  $A'$  et  $B'$  sont premiers entre eux.

2°.  $A'$  ET  $B'$  RENFERMANT DEUX LETTRES  $a$  ET  $b$ .

Après avoir ordonné ces polynomes par rapport à  $a$ , il faut d'abord procéder à la recherche du facteur polynome indépendant de  $a$  (n° 270).

Pour cela, on détermine d'abord le plus grand commun diviseur  $A_1$  entre tous les coefficients des diverses puissances de  $a$  dans le polynome  $A'$ . Ce commun diviseur s'obtient en appliquant le procédé (n° 262) relatif à la recherche du p. g. c. d. entre plusieurs polynomes à la fois, ainsi que la règle qui a été établie dans le cas précédent, puisque ces coefficients ne renferment que la seule lettre  $b$ . On détermine de même le plus grand commun diviseur  $B_1$  entre tous les coefficients de  $B'$ . Comparant ensuite  $A_1$  et  $B_1$ , on met à part leur plus grand commun diviseur  $D_1$ , comme faisant partie du p. g. c. d. cherché; et l'on supprime d'ailleurs les facteurs  $K_1$  et  $L_1$  dans  $A'$  et  $B'$ ; ce qui donne lieu à deux nouveaux polynomes  $A''$  et  $B''$  dont les coefficients sont premiers entre eux, et auxquels on peut par conséquent appliquer ce qui a été dit dans le premier cas.

Toutefois, il faut avoir soin, pour chaque reste, de s'assurer si les coefficients des diverses puissances de la lettre  $a$  ne renferment pas un facteur commun, qu'on supprimerait alors, comme ne pouvant faire partie du commun diviseur. Nous avons déjà fait voir (n° 38) que ces suppressions sont absolument indispensables.

On obtient ainsi pour  $A''$  et  $B''$  le commun diviseur  $D_3$ ; et pour les deux polynomes  $A$  et  $B$ , le p. g. c. d. est  $D_1 \times D_2 \times D_3$ .

N. B. En appliquant à  $A''$  et  $B''$  le procédé indiqué dans le premier cas, on reconnaît encore que ces deux polynomes sont premiers entre eux, à ce signe, qu'on obtient un reste, soit numérique, soit fonction de  $b$ , mais indépendant de  $a$ . Alors  $A$  et  $B$  n'ont pour p. g. c. d. que  $D_1 \times D_2$ .

3°.  $A'$  ET  $B'$  RENFERMANT TROIS LETTRES  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Les deux polynômes étant ordonnés par rapport à  $a$ , on détermine d'abord le p. g. c. d. indépendant de  $a$ ; ce qui se fait en appliquant aux coefficients des diverses puissances de  $a$ , dans les deux polynômes, le procédé du n° 262 et la règle du second cas, puisque ces coefficients polynômes ne renferment que les deux lettres  $b$ ,  $c$ .

Le polynôme indépendant  $D$ , étant ainsi mis en évidence, et les facteurs  $A_0$  et  $B_0$  qui l'ont donné, étant supprimés dans  $A'$  et  $B'$ , il en résulte deux polynômes  $A''$  et  $B''$  dont les coefficients sont premiers entre eux, et auxquels on peut par conséquent appliquer ce qui a été dit dans les deux cas précédents.

Et ainsi de suite.

Nous engageons les jeunes gens à se bien pénétrer du procédé que nous venons d'établir, et de son esprit.

Nous allons en faire l'application à quelques exemples.

272. Soient les deux polynômes

$$a^2d^2 - c^2d^2 - a^2c^2 + c^4 \text{ et } 4a^2d - 2ac^2 + 2c^3 - 4acd.$$

Le second polynôme est le seul qui renferme un facteur monome; ce facteur est 2. En le supprimant et ordonnant par rapport à  $d$ , on obtient les deux nouvelles expressions

$$(a^2 - c^2)d^2 - a^2c^2 + c^4 \text{ et } (2a^2 - 2ac)d - ac^2 + c^3.$$

Il faut d'abord procéder à la recherche du commun diviseur indépendant de la lettre  $d$ .

Or, si l'on considère les coefficients  $a^2 - c^2$  et  $-a^2c^2 + c^4$  du premier polynôme, on observe que  $-a^2c^2 + c^4$  peut se mettre sous la forme  $-c^2(a^2 - c^2)$ ; d'où l'on voit que  $a^2 - c^2$  est facteur commun entre les deux coefficients du premier polynôme. De même, les coefficients du second,  $2a^2 - 2ac$  et  $-ac^2 + c^3$ , reviennent à  $2a(a - c)$  et  $-c^2(a - c)$ ; donc  $a - c$  est facteur commun entre ces coefficients.

Comparons maintenant les deux facteurs  $a^2 - c^2$  et  $a - c$ . Comme ce dernier divise l'autre, il s'ensuit que  $a - c$  est un

facteur commun aux deux polynomes proposés; et c'est le diviseur indépendant de  $d$ .

Supprimons d'ailleurs  $a^2 - c^2$  dans le premier polynome, et  $a - c$  dans le second; on obtient pour les résultats de cette suppression  $d^2 - c^2$  et  $2ad - c^2$ , polynomes auxquels il faut appliquer le procédé ordinaire.

$$\begin{array}{r} d^2 - c^2 \\ 4a^2d^2 - 4a^2c^2 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} d^2 - c^2 \\ 4a^2d^2 - 4a^2c^2 \end{array}} \right\} \frac{2ad - c^2}{2ad + c^2} \\ + 2ac^2d - 4a^2c^2 \\ \hline - 4a^2c^2 + c^4. \end{array}$$

*Explication.* Après avoir multiplié le dividende par  $4a^2$ , et effectué deux divisions consécutives, on obtient pour reste  $-4a^2c^2 + c^4$ , polynôme indépendant de la lettre principale  $d$ ; donc, les deux polynomes  $d^2 - c^2$  et  $2ad - c^2$  sont premiers entre eux. Ainsi, le plus grand commun diviseur des polynomes proposés est  $a - c$ .

Reprenons le même exemple, en ordonnant par rapport à  $a$ ; il vient, après la suppression du facteur 2 dans le second polynome,

$$(d^2 - c^2)a^2 - c^2d^2 + c^4 \quad \text{et} \quad 2da^2 - (2cd + c^2)a + c^3.$$

En jetant les yeux sur le second polynome, on reconnaît facilement que les coefficients des diverses puissances de  $a$  sont premiers entre eux. Quant au premier polynome, on observe que le coefficient  $-c^2d^2 + c^4$ , du second terme ou de  $a^0$ , revient à  $-c^2(d^2 - c^2)$ ; d'où il suit que  $d^2 - c^2$  est facteur commun aux deux coefficients; et comme ce facteur n'entre pas dans le second polynome, on peut le supprimer dans le premier, sans en tenir aucun compte, comme ne faisant pas partie du commun diviseur.

Opérant cette suppression, et prenant le second polynome pour dividende, le premier pour diviseur (afin d'éviter la préparation), on a

$$\begin{array}{r}
 1^{\circ}. \quad \begin{array}{r|l} 2da^2 - 2cd & a + c^3 \\ - c^3 & \end{array} \Bigg\} \frac{a^2 - c^2}{2d} \\
 \hline
 \text{reste.} \dots \begin{array}{r|l} - 2cd & a + 2dc^2 \\ - c^3 & + c^3 \end{array}
 \end{array}$$

ou bien, . . .  $a - c$ ,

en supprimant le facteur commun  $(-2cd - c^3)$ ;

$$\begin{array}{r}
 2^{\circ}. \quad \frac{a^2 - c^2}{ac - c^2} \Bigg\} \frac{a - c}{a + c} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

*Explication.* Après avoir effectué la première division, l'on obtient un reste qui renferme le facteur  $-2cd - c^3$ , dans ses deux coefficients; car  $2dc^2 + c^3 = -c(-2cd - c^3)$ . Ce facteur étant supprimé, le reste se réduit à  $a - c$ , polynôme qui divise exactement  $a^2 - c^2$ .

Donc,  $a - c$  est le plus grand commun diviseur cherché. Les commençans feront bien de reprendre le même exemple, en ordonnant par rapport à  $c$ .

273. Il existe un cas assez remarquable, dans lequel on peut obtenir le plus grand commun diviseur plus aisément que par le procédé général; c'est celui où l'un des deux polynômes renferme une lettre qui ne se trouve pas dans l'autre.

Dans ce cas, comme il est évident que le plus grand commun diviseur doit être *indépendant* de cette lettre, il s'ensuit que, si l'on ordonne le polynôme qui la renferme, par rapport à cette lettre, le plus grand commun diviseur cherché sera le même que celui qui existe entre les coefficients des diverses puissances de la lettre principale et le second polynôme, qui, par hypothèse, en est indépendant.

A la vérité, on sera conduit, par ce moyen, à déterminer le plus grand commun diviseur entre trois ou un plus grand nombre de polynômes; mais ceux-ci seront beaucoup plus

simples que les polynomes proposés. Souvent même il arrive que quelques-uns des coefficients du polynome ordonné sont des monomes, ou bien, que l'on reconnaît à leur seule inspection qu'ils sont premiers entre eux; et, dans ce cas, on est certain que les polynomes proposés sont aussi premiers entre eux.

Ainsi, dans l'exemple du n° 272, traité par le premier moyen, après avoir supprimé le facteur  $a - c$  commun aux deux polynomes, ce qui a donné pour résultats,

$$d^2 - c^2 \text{ et } 2ad - c^2,$$

on reconnaît immédiatement que ces deux nouveaux polynomes sont premiers entre eux; car, le second renfermant la lettre  $a$ , qui n'entre pas dans le premier, il résulte de ce qui vient d'être dit que le commun diviseur doit se trouver entre les coefficients  $2d$  et  $-c^2$ , ce qui est évidemment impossible; donc, etc.

Soient, comme application du cas que nous venons d'examiner, les deux polynomes

$$3bcq + 3omp + 18bo + 5mpq,$$

$$\text{et} \quad 4adq - 42fg + 24ad - 7fgq.$$

Comme  $q$  est la seule lettre commune à ces deux polynomes (qui, d'ailleurs, ne renferment pas de facteurs monomes), on pourrait les ordonner par rapport à cette lettre, et suivre le procédé ordinaire. Mais observons que,  $b$  se trouvant dans le premier polynome et non dans le second, si l'on ordonne le premier par rapport à  $b$ , ce qui donne

$$(3cq + 18c)b + 3omp + 5mpq,$$

on peut assurer que le p. g. c. d. cherché est le même que celui qui existe entre le second polynome et les deux coefficients

$$3cq + 18c \text{ et } 3omp + 5mpq.$$

Or, le premier de ces deux coefficients peut se mettre sous la

forme  $3c(q+6)$ , et l'autre revient à  $5mp(q+6)$ ; d'où il suit que  $q+6$  est le seul facteur commun à ces deux coefficients. Il suffit donc de voir si  $q+6$ , qui est un diviseur *premier*, est facteur du second polynome.

Or, ce polynome, ordonné par rapport à  $q$ , revient à

$$(4ad - 7fg)q - 42fg + 24ad;$$

comme la seconde partie  $24ad - 42fg$  est égale à.....  $6(4ad - 7fg)$ , il s'ensuit que ce polynome est divisible par  $q+6$ , et donne pour quotient  $4ad - 7fg$ . Donc enfin,  $q+6$  est le plus grand commun diviseur des deux polynomes proposés.

274. N. B. On peut reconnaître dans l'exemple précédent, que  $q+6$  est diviseur exact du polynome.....  $(4ad - 7fg)q + 24ad - 42fg$ , par un moyen fondé sur la propriété (n° 251) de la théorie des équations.

Faisons, dans ce polynome,  $q+6=0$ , ou  $q=-6$ ; il vient

$$(4ad - 7fg) \times -6 + 24ad - 42fg,$$

expression qui, simplifiée, se réduit à 0; donc  $q+6$  est diviseur de ce polynome.

En général, ce moyen peut être employé avec avantage dans presque toutes les applications du procédé. Il consiste, lorsqu'on est parvenu au reste du 1<sup>er</sup> degré en  $a$  (si  $a$  est la lettre *ordonnatrice*), à *égaler ce reste à 0*, et à *en tirer la valeur de  $a$* .

Si cette valeur, substituée dans le reste du second degré. *l'autant*, c'est une preuve qu'il y a un commun diviseur, lequel n'est autre chose que le reste du 1<sup>er</sup> degré simplifié (n° 38). Si le reste du second degré ne devient pas nul par cette substitution, on peut conclure qu'il n'y a pas de commun diviseur dépendant de la lettre *ordonnatrice*.

Il y a plus; parvenu au reste du second degré en  $a$ , l'on n'a pas besoin de pousser l'opération plus loin.

*Décomposez ce polynome en deux facteurs du 1<sup>er</sup> degré*, ce qui



se fait en l'égalant à 0, et résolvant l'équation du second degré qui en résulte.

Si chacune des valeurs de  $a$  ainsi obtenues, substituée dans le reste du 3<sup>e</sup> degré, l'anéantit, c'est une preuve que le reste du second degré, simplifié, est diviseur commun; si l'une des valeurs seulement anéantit le reste du 3<sup>e</sup> degré, le commun diviseur est le facteur du 1<sup>er</sup> degré en  $a$ , (*rationnel et entier*) qui correspond à cette valeur. Enfin, si aucune des deux valeurs n'anéantit le reste du 3<sup>e</sup> degré, on peut conclure qu'il n'y a pas de commun diviseur dépendant de la lettre  $a$ .

Nous supposons ici que les deux facteurs du 1<sup>er</sup> degré en  $a$  sont rationnels; autrement, il serait plus simple d'effectuer la division du reste du 3<sup>e</sup> degré par le reste du second degré; et si cette dernière division ne se faisait pas exactement, on pourrait assurer qu'il n'y a pas de commun diviseur rationnel, puisque, s'il y en avait un, il ne pourrait être que du premier degré en  $a$ , et devrait se trouver dans le reste du second degré; ce qui est contre l'hypothèse.

275. Pour faire juger de la différence entre le procédé du commun diviseur relatif et celui du commun diviseur ordinaire, nous allons d'abord traiter d'après le premier procédé, un exemple dans lequel les deux polynômes sont non-seulement entiers par rapport à  $x$ , mais encore par rapport aux autres nombres qui y entrent, parce que; par la suite, nous aurons à opérer sur beaucoup d'exemples de ce genre.

Soient proposés les deux polynômes

$$6x^5 - 4x^4 - 11x^3 - 3x^2 - 3x - 1,$$

et  $4x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 3x - 5;$

$$\begin{array}{r} 1^o. \quad 6x^5 - 4x^4 - 11x^3 - 3x^2 - 3x - 1 \quad \left. \begin{array}{l} 4x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 3x - 5 \\ \hline -7x^4 + 16x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 1 \end{array} \right\} \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} \\ \hline \quad \quad \quad + \frac{39}{2}x^3 - 39x^2 + \frac{39}{4}x - \frac{39}{4}; \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2^{\circ}. \quad 4x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 3x - 5 \left\{ \begin{array}{l} \frac{39}{2}x^3 - 39x^2 + \frac{39}{4}x - \frac{39}{4} \\ \hline + 10x^3 - 20x^2 + 5x - 5 \end{array} \right\} \frac{8}{39}x + \frac{20}{39} \\
 \hline
 0.
 \end{array}$$

Donc  $\frac{39}{2}x^3 - 39x^2 + \frac{39}{4}x - \frac{39}{4}$  est le p. g. c. d.

TABLEAU des Opérations par la méthode ordinaire.

$$\begin{array}{r}
 1^{\circ}. \text{ Multiplication par } 16. \left\{ \begin{array}{l} 4x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 3x - 5 \\ \hline - 112x^4 + 256x^3 - 120x^2 + 72x - 16 \end{array} \right\} \frac{24x - 28}{156} \\
 \hline
 \text{Reste} \quad + 312x^4 - 624x^3 + 156x^2 - 156,
 \end{array}$$

ou bien, supprimant le facteur 156,

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - 4x^2 + x - 1. \\
 2^{\circ}. \quad 4x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 3x - 5 \left\{ \begin{array}{l} 2x^3 - 4x^2 + x - 1 \\ \hline + 10x^3 - 20x^2 + 5x - 5 \end{array} \right\} \frac{2x + 5}{0}.
 \end{array}$$

Donc  $2x^3 - 4x^2 + x - 1$  est le p. g. c. d.

En appliquant le procédé du n° 261, sans faire subir aucune préparation, on parvient, comme on le voit dans le premier des deux tableaux de calcul, au résultat

$$\frac{39}{2}x^3 - 39x^2 + \frac{39}{4}x - \frac{39}{4};$$

tandis que si l'on suit le procédé du n° 271, avec toutes ses modifications, on obtient

$$2x^3 - 4x^2 + x - 1,$$

pour le plus grand commun diviseur des deux polynomes.

Or, ce dernier résultat ne diffère du précédent que par le facteur  $\frac{39}{4}$ , qui est commun à tous les termes de celui-ci, et que l'on peut mettre en évidence.

D'où l'on voit que l'effet produit par l'application du procédé *sans préparation*, c'est de donner le *commun diviseur ordinaire*, qui existe entre les deux polynômes (qu'on suppose *rationnels et entiers*), de le donner, dis-je, embarrassé de *facteurs étrangers*, mais *indépendans* de la lettre principale.

Or, comme nous verrons par la suite que le principal objet qu'on se propose, lorsqu'on est parvenu au commun diviseur de deux fonctions entières, est de l'égaliser à 0, pour en tirer des valeurs de la lettre principale, on conçoit que l'introduction de ces facteurs étrangers dans le résultat ne peut, en aucune manière, influer sur les racines de l'équation obtenue, puisque ces facteurs peuvent toujours être supprimés dans cette équation, tant qu'ils sont indépendans de la lettre principale.

Ainsi, dans ce cas, il est tout-à-fait indifférent d'employer ou de ne pas employer les modifications; et lorsqu'on les emploie, c'est seulement dans la vue de simplifier les calculs.

Nous proposerons encore d'appliquer les deux procédés aux exemples suivans :

$$1^{\circ}. \begin{cases} x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 12x - 9 \\ 6x^5 + 20x^4 - 12x^3 - 48x^2 + 22x + 12; \end{cases}$$

$$p. \text{ g. c. d. simplifié} = x^3 + x^2 - 5x + 3.$$

$$2^{\circ}. \begin{cases} 20x^6 - 12x^5 + 16x^4 - 15x^3 + 14x^2 - 15x + 4 \\ 15x^4 - 9x^3 + 47x^2 - 21x + 28; \end{cases}$$

$$p. \text{ g. c. d. simplifié} = 5x^2 - 3x + 4.$$

## § II. Transformations des équations. Première partie de l'Élimination.

Nous nous proposons de réunir dans ce paragraphe les principales transformations dont le but est de ramener la résolution

d'une équation donnée, à celle d'une autre équation plus facile à traiter.

276. Première transformation. *Évanouissement du second terme de toute équation.*

On conçoit qu'une équation d'un degré donné est d'autant plus aisée à résoudre, qu'elle renferme moins de puissances de l'inconnue; c'est ainsi que l'équation  $x^2=q$ , donne sur-le-champ  $x=\pm\sqrt{q}$ , tandis que l'équation complète  $x^2+px=q$  a besoin d'une préparation pour être résolue.

Or, une équation quelconque étant donnée, on peut toujours la transformer en une autre, c'est-à-dire ramener sa résolution à celle d'une autre équation, privée du second terme.

Soit en effet l'équation générale

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0.$$

Posons  $x = u + x'$ ,  $u$  étant une nouvelle inconnue, et  $x'$  une indéterminée dont nous pouvons disposer à volonté; il vient, en remplaçant  $x$  par  $u + x'$ ,

$$(u+x')^m + P(u+x')^{m-1} + Q(u+x')^{m-2} + \dots + T(u+x') + U = 0,$$

ou, développant d'après la formule du binôme, et ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de  $u$ ,

$$\left. \begin{array}{l} u^m + mx' \\ + P \\ u^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} x'^2 \\ + (m-1)Px' \\ + Q \\ u^{m-2} + \dots + x'^m \\ + Px'^{m-1} \\ + Qx'^{m-2} \\ + \dots \\ + Tx' \\ + U \end{array} \right\} = 0.$$

Puisque  $x'$  est tout-à-fait arbitraire, nous pouvons en disposer de manière que l'on ait  $mx' + P = 0$ ; d'où l'on tire  $x' = -\frac{P}{m}$ .  
Portant cette valeur dans l'équation précédente, on obtiendra,

tout calcul fait, une *transformée* telle que

$$u^m + Q'u^{m-2} + R'u^{m-3} + \dots + T'u + U = 0,$$

privée de second terme. Cette équation une fois résolue, on obtiendra les valeurs de  $x$  correspondantes aux valeurs de  $u$ , en remplaçant dans la relation  $x = u + x'$ , ou  $x = u - \frac{P}{m}$ ,

la lettre  $u$  par chacune de ses valeurs.

D'où l'on peut conclure cette règle générale :

Pour faire disparaître le second terme d'une équation, remplacez l'inconnue par une nouvelle inconnue augmentée du coefficient du second terme, pris en signe contraire et divisé par le degré de l'équation.

On peut reconnaître *à posteriori* que cette substitution doit remplir le but qu'on s'était proposé.

En effet, soient  $a, b, c, d, \dots$  les  $m$  racines de l'équation donnée; il résulte de la relation  $x = u - \frac{P}{m}$ , qui donne  $u = x + \frac{P}{m}$ , que les valeurs de  $u$  sont

$$u = a + \frac{P}{m}, b + \frac{P}{m}, c + \frac{P}{m}, d + \frac{P}{m}, \dots;$$

la somme des nouvelles racines est donc

$$a + b + c + d + \dots + m \cdot \frac{P}{m};$$

mais on a (n° 257)  $a + b + c + d + \dots = -P$ ; la somme précédente se réduit donc à  $-P + P$ , ou à 0; ainsi, le coefficient du second terme de la *transformée* doit être nul de lui-même.

N. B. On a supposé le coefficient du premier terme de l'équation égal à l'unité; mais si l'équation était de la forme

$$Ax^m + Px^{m-1} + \dots + Tx + U = 0,$$

en posant  $x = u + x'$ , on obtiendrait, pour le coefficient de  $u^{m-1}$ ,  $mAx' + P$ , expression qui, égale à 0, donnerait....

$x' = -\frac{P}{mA}$ ; c'est-à-dire que, dans ce cas, le dénominateur de la valeur de  $x'$  serait le produit du degré de l'équation par le coefficient  $A$  du premier terme.

Appliquons la règle précédente à l'équation  $x^3 + px = q$ .

Si l'on pose  $x = u - \frac{p}{2}$ , elle devient  $\left(u - \frac{p}{2}\right)^3 + p\left(u - \frac{p}{2}\right) = q$ ,

ou, effectuant les calculs et réduisant, .....  $u^3 - \frac{p^3}{4} = q$ ;

cette équation transformée donne .....  $u = \pm \sqrt[3]{\frac{p^3}{4} + q}$ ;

par conséquent, on obtient, pour les deux valeurs de  $x$  correspondantes, .....  $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt[3]{\frac{p^3}{4} + q}$ .

277. Au lieu de faire disparaître le second terme, on peut demander que l'équation soit privée du troisième, quatrième...; il suffit pour cela d'égaliser à 0 le coefficient de  $u^{m-1}$ ,  $u^{m-3}$ , ... Par exemple, pour chasser le troisième terme, on posera, dans l'équation transformée ci-dessus,

$$m \cdot \frac{m-1}{2} x'^2 + (m-1) P x' + Q = 0,$$

d'où l'on déduira pour  $x'$  deux valeurs dont chacune substituée dans la transformée, la réduira à la forme

$$u^m + P'u^{m-1} + R'u^{m-3} + \dots + T'u + U' = 0.$$

Au-delà du troisième terme, il faudrait résoudre des équations de degré supérieur au second, pour obtenir la valeur de  $x'$ ; ainsi, pour opérer la disparition du dernier terme, il faudrait résoudre l'équation

$$x'^m + P x'^{m-1} + \dots + T x' + U = 0,$$

qui n'est autre chose que la proposée dans laquelle on a remplacé  $x$  par  $x'$ .

Il peut arriver que la valeur  $x' = -\frac{P}{m}$ , qui (n° 276.) fait disparaître le second terme, donne également lieu à la disparition du troisième ou d'un tout autre terme. Par exemple, pour que le second et le troisième termes disparaissent à la fois, il faut que l'équation  $x' = -\frac{P}{m}$ , puisse s'accorder avec celle-ci

$$m \cdot \frac{m-1}{2} x'^2 + (m-1) P x' + Q = 0.$$

Or, si l'on remplace dans cette dernière,  $x'$  par  $-\frac{P}{m}$ , il vient

$$m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{P^2}{m^2} - (m-1) \cdot \frac{P^2}{m} + Q = 0, \text{ ou } (m-1)P^2 - 2mQ = 0;$$

ainsi, toutes les fois que cette relation existera entre les deux coefficients  $P$  et  $Q$ , la disparition du second terme donnera lieu à celle du troisième.

278. *Remarques sur la transformation précédente. Formation des polynomes dérivés.*

La relation  $x = u + x'$ , dont nous avons fait usage dans les deux numéros qui précèdent, indique que les racines de la transformée sont égales à celles de la proposée, diminuées ou augmentées d'une même quantité. Tantôt cette quantité est introduite dans le calcul, comme une indéterminée dont la valeur est ensuite fixée de manière à remplir une condition donnée; tantôt c'est un nombre particulier et donné *a priori*, qui exprime une *différence constante* entre les racines d'une première équation et celles d'une autre équation que l'on veut former.

En un mot, la transformation qui consiste à remplacer  $x$  par  $u + x'$  dans une équation, est d'un usage très fréquent dans la théorie des équations. Or, il existe un moyen assez simple d'obtenir, dans la pratique, la transformée qui résulte de cette substitution.

Pour cela, intervertissons l'ordre des termes dans  $u + x'$ ;

c'est-à-dire remplaçons  $x$  par  $x' + u$ , dans l'équation

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \dots Tx + U = 0;$$

on trouve, en développant et ordonnant par rapport aux puissances ascendantes de  $u$ ,

$$\begin{array}{l|l} x'^m + mx'^{m-1} & u + m \frac{(m-1)}{2} x'^{m-2} \\ + Px'^{m-1} + (m-1)Px'^{m-2} & + (m-1) \frac{(m-2)}{2} Px'^{m-3} \\ + Qx'^{m-2} + (m-2)Qx'^{m-3} & + (m-2) \frac{(m-3)}{2} Qx'^{m-4} \\ + \dots + \dots & + \dots \\ + Tx' + T & \\ + U & \end{array} \quad \left| \quad u^2 + \dots u^m = 0. \right.$$

Si l'on fait attention à la manière dont se composent les coefficients des diverses puissances de  $u$ , on verra que le coefficient de  $u^0$  n'est autre chose que le premier membre de la proposée, dans lequel on a remplacé  $x$  par  $x'$ ; nous désignerons dorénavant ce coefficient par  $X'$ .

Que le coefficient de  $u^1$  se forme au moyen du précédent ou de  $X'$ , en multipliant chacun des termes de  $X'$  par l'exposant de  $x'$  dans ce terme, et diminuant cet exposant d'une unité; nous appellerons  $Y'$  ce coefficient.

Que le coefficient de  $u^2$  se forme au moyen de  $Y'$ , en multipliant chacun des termes de  $Y'$  par l'exposant de  $x'$  dans ce terme, divisant le produit par 2, et diminuant ensuite l'exposant de  $x'$  d'une unité. En appelant  $\frac{Z'}{2}$  ce coefficient, il est clair que  $Z'$  se forme au moyen de  $Y'$ , comme  $Y'$  se forme au moyen de  $X'$ .

En général, un coefficient de rang quelconque, dans la transformée ci-dessus, se forme au moyen du précédent, en multipliant chacun des termes de celui-ci par l'exposant de  $x'$  dans ce terme, divisant le produit par le nombre des coef-



*ficiens qui précèdent celui que l'on considère, et diminuant ensuite l'exposant de  $x'$  d'une unité.*

Cette loi, d'après laquelle les coefficients  $X', Y', \frac{Z'}{2}, \frac{V'}{2.3}, \dots$  dérivent les uns des autres, est évidemment une conséquence immédiate de celle qui régit les différens termes de la formule du binôme (voyez n° 152).

Les expressions  $Y', Z', V', W', \dots$  sont appelées les *polynomes dérivés de  $X'$* , parce que  $Z'$  se déduit ou *dérive de  $Y'$* ; comme  $Y'$  dérive de  $X'$ ;  $V'$  dérive de  $Z'$  comme  $Z'$  dérive de  $Y'$ , et ainsi de suite.  $Y'$  est dit le *premier polynome dérivé*,  $Z'$  le *second*...; rappelons-nous, d'ailleurs, que  $X'$  n'est autre chose que le premier membre de la proposée, dans lequel on a remplacé  $x$  par  $x'$ .

N. B. On a supposé le coefficient du premier terme de la proposée, égal à 1; s'il était quelconque, la loi de formation des coefficients de la transformée serait absolument la même, et le coefficient de  $u^m$  serait égal à celui de  $x^m$ .

Pour faire connaître l'usage de cette loi dans la pratique, proposons-nous de faire évanouir le coefficient du second terme de l'équation  $x^4 - 12x^3 + 17x^2 - 9x + 7 = 0$ .

Il faut, d'après la règle n° 276, poser  $x = u + \frac{12}{4}$ , ou  $x = 3 + u$ , ce qui donnera une transformée du 4<sup>e</sup> degré et de la forme

$$X' + Y'u + \frac{Z'}{2}u^2 + \frac{V'}{2.3}u^3 + u^4 = 0;$$

et tout se réduit à calculer  $X', Y', \frac{Z'}{2}, \frac{V'}{2.3}$ .

Or on a, en vertu de la loi précédente,

$$X' = (3)^4 - 12.(3)^3 + 17.(3)^2 - 9.(3) + 7, \text{ ou } X' = -110;$$

$$Y' = 4.(3)^3 - 36.(3)^2 + 34.(3) - 9, \text{ ou } Y' = -123;$$

$$\begin{aligned}\frac{Z'}{2} &= 6.(3)^2 - 36.(3)^1 + 17 \dots \dots \dots \frac{Z'}{2} = -37, \\ \frac{V'}{2.3} &= 4.(3)^1 - 12 \dots \dots \dots \frac{V'}{2.3} = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, la transformée devient  $u^3 - 37u^2 - 123u - 110 = 0$ .

Soit encore proposé de transformer l'équation

$$4x^3 - 5x^2 + 7x - 9 = 0,$$

en une autre dont les racines surpassent de l'unité chacune des racines de la proposée.

Posons la relation  $u = x + 1$ ; il en résulte  $x = -1 + u$ ,

ce qui donne la transformée  $X' + Y'u + \frac{Z'}{2}u^2 + 4u^3 = 0$ .

$$\begin{aligned}X' &= 4.(-1)^3 - 5.(-1)^2 + 7.(-1) - 9, \text{ ou bien } X' = -25; \\ Y' &= 12.(-1)^2 - 10.(-1)^1 + 7 \dots \dots \dots Y' = 29; \\ \frac{Z'}{2} &= 12.(-1)^1 - 5 \dots \dots \dots \frac{Z'}{2} = -17; \\ \frac{V'}{2.3} &= 4 \dots \dots \dots \frac{V'}{2.3} = 4.\end{aligned}$$

Ainsi, la transformée devient  $4u^3 - 17u^2 + 29u - 25 = 0$ .

On peut s'exercer sur les exemples suivans :

*Faire évanouir le second terme dans les équations*

$$1^\circ. \quad x^3 - 10x^2 + 7x^2 + 4x - 9 = 0?$$

$$(\text{Résultat.} \quad u^3 - 33u^2 - 118u^2 - 152u - 73 = 0.)$$

$$2^\circ. \quad 3x^3 + 15x^2 + 25x - 3 = 0?$$

$$(\text{Résultat.} \quad 3u^3 - \frac{152}{9} = 0.) \text{ [Voy. n}^\circ \text{ 277.]}$$

Transformer l'équation  $3x^4 - 13x^3 + 7x^2 - 8x - 9 = 0$ , en une autre dont les racines soient plus petites que chacune des racines de la proposée, de la fraction  $\frac{1}{3}$ ?

$$(R\acute{e}sultat. 3u^4 - 9u^3 - 4u^2 - \frac{65}{9}u - \frac{102}{9} = 0.)$$

Nous aurons souvent occasion de rappeler la loi de formation des *polynomes d\'eriv\'es*.

279. Ces polynomes jouissent d'une propri\'et\'e tr\es remarquable, que nous pouvons faire connaitre d\es \`a pr\'esent.

Soient  $X$  ou  $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots = 0$ , une \\'equation propos\'ee; et  $a, b, c, l$ , les  $m$  racines de cette \\'equation, on a (n\o 257) l'\\'equation identique

$$x^m + Px^{m-1} + \dots = (x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-l).$$

Cela pos\'e, rempla\c{c}ons  $x$  par  $x' + u$ , ou plut\ot{ot} par  $x + u$  (pour \\'eviter les accents); il vient

$$(x+u)^m + P(x+u)^{m-1} + \dots = (x+u-a)(x+u-b)\dots;$$

ou bien, changeant dans le second membre, l'ordre des termes, et regardant  $x-a, x-b, \dots$  chacun comme une seule quantit\'e,

$$(x+u)^m + P(x+u)^{m-1} + \dots = (u+\overline{x-a})(u+\overline{x-b})\dots(u+\overline{x-l}).$$

Or, si l'on effectue les multiplications dans l'un et l'autre membres, on obtiendra d'abord pour le premier membre, en vertu de ce qui a \\'et\'e dit dans le n\o pr\'ec\'edent,

$$X + Yu + \frac{Z}{2}u^2 + \dots + u^m;$$

$X$  \\'etant le premier membre de la propos\'ee, et  $Y, Z, \dots$  les polynomes d\'eriv\'es de ce premier membre.

Quant au second, il r\'esulte du n\o 257, 1\o. que la partie affect\'ee de  $u^0$  ou le dernier terme est \\'egal au produit  $(x-a)(x-b)\dots(x-l)$  des facteurs de la propos\'ee;

2\o. Que le coefficient de  $u^1$  est \\'egal \`a la somme des produits  $m-1$  \`a  $m-1$  de ces  $m$  facteurs;

3\o. Que le coefficient de  $u^2$  est \\'egal \`a la somme des produits  $m-2$  \`a  $m-2$  de ces  $m$  facteurs; et ainsi de suite.

D'ailleurs, il y a identité entre les deux membres de la dernière équation; ce qui veut dire (n° 188) que les coefficients des mêmes puissances sont égaux dans ces deux membres.

Ainsi l'on a  $X = (x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-l)$ , ce que l'on sait déjà.

Y ou le premier polynome dérivé, égal à la somme des produits  $m-1$  à  $m-1$  des  $m$  facteurs du premier degré de la proposée; ou bien encore, égal à la somme des quotiens que l'on obtient en divisant  $X$  par chacun des  $m$  facteurs du premier degré de la proposée; c'est-à-dire algébriquement,

$$Y = \frac{X}{x-a} + \frac{X}{x-b} + \frac{X}{x-c} + \dots + \frac{X}{x-l}.$$

$\frac{Z}{2}$  ou le second polynome dérivé (pris avec le diviseur 2) égal à la somme des produits  $m-2$  à  $m-2$  des  $m$  facteurs de la proposée; ou bien encore, égal à la somme des quotiens que l'on obtient en divisant  $X$  par chacun des facteurs du second degré; c'est-à-dire

$$\frac{Z}{2} = \frac{X}{(x-a)(x-b)} + \frac{X}{(x-a)(x-c)} + \dots + \frac{X}{(x-k)(x-l)};$$

et ainsi de suite.

280. *Seconde transformation. Faire disparaître les dénominateurs d'une équation.*

Une équation étant donnée, on peut toujours la transformer en une autre dont les racines soient égales à un multiple ou à un sous-multiple donné de celles de la proposée.

Reprenons l'équation  $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0$ , et désignons par  $y$  l'inconnue d'une nouvelle équation dont les racines soient  $K$  fois plus grandes que celles de la proposée. Si l'on pose  $y = Kx$ , il en résulte  $x = \frac{y}{K}$ ; d'où, substituant et chassant le dénominateur  $K^m$  du premier terme,

$$y^m + PKy^{m-1} + QK^2y^{m-2} + RK^3y^{m-3} + \dots + TK^{m-1}y + UK^m = 0,$$

équation dont les coefficients sont égaux à ceux de la proposée, multipliés respectivement par  $K^0, K^1, K^2, K^3, \dots, K^n$ .

Cette transformation est principalement utile pour *faire disparaître les dénominateurs d'une équation, sans donner au premier terme d'autre coefficient que l'unité*.

Soit, pour fixer les idées, l'équation du 4<sup>e</sup> degré

$$x^4 + \frac{a}{b}x^3 + \frac{c}{d}x^2 + \frac{e}{f}x + \frac{g}{h} = 0,$$

si l'on fait dans cette équation,  $x = \frac{y}{K}$ ,  $y$  étant une nouvelle inconnue et  $K$  une indéterminée, il vient

$$y^4 + \frac{aK}{b}y^3 + \frac{cK^2}{d}y^2 + \frac{eK^3}{f}y + \frac{gK^4}{h} = 0.$$

Cela posé, il peut arriver deux cas :

Où les dénominateurs  $b, d, f, h$ , sont premiers entre eux ; dans cette hypothèse, comme  $K$  est tout-à-fait arbitraire, posons  $K = bdfh$ , produit de ces dénominateurs ; il vient

$$y^4 + adfh.y^3 + cb^2dfh^2.y^2 + eb^3d^2fh^3.y + gb^4d^3fh^4 = 0,$$

équation dont les coefficients sont entiers et dont le premier terme a pour coefficient l'unité.

On a, d'ailleurs, pour déterminer les valeurs de  $x$  correspondantes aux valeurs de  $y$ , la relation  $x = \frac{y}{bdfh}$ .

Où bien, les dénominateurs renferment des facteurs communs ; et l'on rendra évidemment les coefficients entiers, en prenant pour  $K$  le plus petit multiple de tous les dénominateurs. Mais on peut encore simplifier davantage, en observant que tout se réduit à déterminer  $K$  de manière que  $K^1, K^2, K^3, \dots$  contiennent les facteurs premiers qui composent  $b, d, f, h$ , à des puissances au moins égales à celles qui entrent dans ces différens dénominateurs.

Ainsi, soit l'équation  $x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{12}x^2 - \frac{7}{150}x - \frac{13}{9000} = 0.$

Posons  $x = \frac{y}{k}$ ; il vient  $y^4 - \frac{5k}{6}y^3 + \frac{5k^2}{12}y^2 - \frac{7k^3}{150}y - \frac{13k^4}{9000} = 0$ ;

soit fait d'abord  $k$  égal à 9000, qui est multiple de tous les autres dénominateurs, il est clair que les coefficients deviendront des nombres entiers.

Mais si l'on décompose 6, 12, 150 et 9000, en leurs facteurs, on trouve

$$6 = 2 \times 3, \quad 12 = 2^2 \times 3, \quad 150 = 2 \times 3 \times 5^2, \quad 9000 = 2^3 \times 3^2 \times 5^3;$$

et en faisant simplement  $k = 2 \times 3 \times 5$ , produit des facteurs simples différens, on obtient

$$k^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2, \quad k^3 = 2^3 \times 3^3 \times 5^3, \quad k^4 = 2^4 \times 3^4 \times 5^4;$$

d'où l'on voit que les valeurs de  $k$ ,  $k^2$ ,  $k^3$ ,  $k^4$ , contiennent les facteurs premiers 2, 3, 5 à des puissances au moins égales à celles qui entrent dans 6, 12, 150 et 9000.

Donc, l'hypothèse  $k = 2 \times 3 \times 5 = 30$ , suffit pour opérer la disparition des dénominateurs. Il vient en effet, par la substitution,

$$y^4 - \frac{5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3} y^3 + \frac{5 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 3} y^2 - \frac{7 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3}{2 \cdot 3 \cdot 5^2} y - \frac{13 \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3} = 0,$$

$$\text{ou réduisant, } y^4 - 5.5.y^3 + 5.3.5^2.y^2 - 7.2^2.3^2.5.y - 13.2.3^2.5 = 0,$$

$$\text{ou bien enfin, } y^4 - 25y^3 + 375y^2 - 1260y - 1170 = 0.$$

Il y a des circonstances où l'on est obligé, dans l'expression de  $k$ , d'augmenter l'exposant de l'un des facteurs premiers d'une ou de plusieurs unités. Mais on doit sentir la nécessité de ne prendre pour  $k$  que le plus petit nombre possible; autrement, on obtiendrait une transformée dont les coefficients seraient extrêmement grands, comme on en peut juger en calculant la transformée résultant de la supposition de  $k = 9000$ , dans l'équation précédente.

Voici de nouvelles applications :

$$1^{\circ}. x^3 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{11}{36}x - \frac{25}{72} = 0; \quad x = \frac{y}{6},$$

d'où

$$y^3 - 14y^2 + 11y - 75 = 0;$$

$$2^{\circ}. x^3 - \frac{13}{12}x^2 + \frac{21}{40}x - \frac{32}{225}x - \frac{43}{600}x + \frac{1}{800} = 0; \quad x = \frac{y}{2 \cdot 3 \cdot 5},$$

$$\text{ou } x = \frac{y}{60};$$

$$\text{d'où } y^3 - 65y^2 + 189y - 30720y^2 - 928800y + 972000 = 0.$$

281. Les transformations précédentes sont celles dont l'usage est le plus fréquent; il en est encore d'autres assez usitées, dont nous ne parlerons que lorsque l'occasion s'en présentera, parce qu'elles sont trop simples pour être traitées séparément.

En général, le problème des transformations doit être regardé comme une application du problème de l'élimination entre deux équations d'un degré quelconque à deux inconnues. En effet, une équation étant donnée, supposons qu'on veuille la transformer en une autre dont les racines aient avec celles de la proposée une relation déterminée.

Désignons par  $F(x) = 0$  l'équation proposée (elle s'énonce *fonction de  $x$  égale 0*), et par  $F'(x, y) = 0$  l'expression algébrique de la relation qui doit exister entre la première inconnue  $x$  et la nouvelle  $y$ ; la question se réduit à tâcher d'obtenir, au moyen de ces deux équations, une nouvelle équation en  $y$ , qui sera alors l'équation demandée. Lorsque l'inconnue  $x$  n'entre qu'au premier degré dans  $F'(x, y) = 0$ , la transformée est facile à obtenir; mais si elle y est élevée à la seconde, troisième... puissance, il faut avoir recours aux méthodes d'élimination.

Donnons une première idée de cette théorie, qui joue un si grand rôle dans l'analyse algébrique.

## ÉLIMINATION. Première partie.

282. *Éliminer entre deux équations d'un degré quelconque à deux inconnues, c'est parvenir, après une suite d'opérations exécutées sur ces équations, à une seule équation qui ne renferme que l'une des inconnues; et qui donne toutes les valeurs de cette inconnue propres à vérifier les deux équations, en même temps que des valeurs correspondantes de l'autre inconnue.*

L'équation, fonction de l'une des inconnues, à laquelle on parvient, se nomme l'**ÉQUATION FINALE**; et les valeurs de l'inconnue, tirées de cette équation, sont appelées *valeurs convenables*.

De toutes les méthodes connues d'élimination, la méthode par le commun diviseur est, en général, la plus expéditive; aussi c'est celle que nous allons développer ici.

Soient deux équations d'un degré quelconque à deux inconnues

$$F(x, y) = 0, \quad F'(x, y) = 0,$$

ou plus simplement encore,

$$A = 0, \quad B = 0.$$

Supposons l'équation finale en  $y$  obtenue, et tâchons de reconnaître quelque propriété des racines de cette équation, qui puisse nous servir à former cette équation.

Soit  $y = C$  l'une des *valeurs convenables* de  $y$ ; il est clair que, puisque cette valeur vérifie les deux équations en même temps qu'une certaine valeur de  $x$ , elle doit être telle que, si on la substitue dans l'une et l'autre équations, qui ne renfermeront plus alors que l'inconnue  $x$ , ces équations admettront au moins une valeur de  $x$  commune; et à cette valeur commune doit nécessairement (n° 252) correspondre un commun diviseur en  $x$ . Ce commun diviseur sera du premier degré en  $x$ , ou d'un degré supérieur, suivant qu'à la valeur particulière  $y = C$  il correspondra une ou plusieurs valeurs de  $x$ .



Réciproquement, toute valeur de  $y$  qui, substituée dans les deux équations, leur donne un commun diviseur en  $x$ , est nécessairement une valeur convenable; car alors elle vérifie évidemment les deux équations en même temps que la valeur ou les valeurs de  $x$  tirées de ce commun diviseur égalé à 0.

283. Remarquons d'ailleurs qu'avant aucune substitution, les premiers membres des équations ne peuvent, en général, avoir un commun diviseur, fonction des deux inconnues ou de l'une d'elles seulement.

Supposons en effet, pour un instant, que les équations  $A=0$ ,  $B=0$ , soient de la forme

$$A' \times D = 0, \quad B' \times D = 0,$$

$D$  étant fonction de  $x$  et de  $y$ .

En posant séparément  $D=0$ , on obtient une seule équation à deux inconnues, qui peut être satisfaite par une infinité de systèmes de valeurs. D'ailleurs, tout système qui anéantit  $D$ , rend également nuls  $A'D$ ,  $B'D$ , et satisfait par conséquent aux équations  $A=0$ ,  $B=0$ .

Ainsi, l'hypothèse de l'existence d'un commun diviseur en  $x$  et  $y$ , entre les deux polynômes  $A$  et  $B$ , entraîne la conséquence que les équations proposées sont indéterminées, c'est-à-dire susceptibles d'être satisfaites par une infinité de systèmes de valeurs de  $x$  et de  $y$ . Dès lors, il n'y a pas lieu à déterminer une équation finale en  $y$ , puisque le nombre des valeurs de  $y$  est infini.

Si les deux polynômes  $A$  et  $B$  étaient de la forme  $A' \times D$ ,  $B' \times D$ ,  $D$  étant fonction de  $x$  seulement, on concevrait l'équation  $D=0$ , résolue par rapport à  $x$ ; ce qui donnerait une ou plusieurs valeurs pour cette inconnue. Chacune de ces valeurs, substituée dans  $A' \times D=0$  et  $B' \times D=0$ , en même temps qu'une valeur de  $y$ , tout-à-fait arbitraire, vérifierait ces deux équations, puisque  $D$  devient nul, par l'effet seul de la substitution de la valeur de  $x$ . Ainsi, dans ce cas, les deux équations

tions proposées admettraient bien un nombre fini de valeurs pour  $x$ , mais une infinité de valeurs pour  $y$ ; et il ne pourrait alors exister d'équation finale en  $y$ .

Donc, toutes les fois que deux équations  $A = 0$ ,  $B = 0$ , seront déterminées, c'est-à-dire toutes les fois qu'elles n'admettront qu'un nombre limité de systèmes de valeurs pour  $x$  et  $y$ , leurs premiers membres ne pourront avoir de commun diviseur fonction des inconnues, avant aucune substitution particulière faite pour l'une d'elles.

284. De là il est aisé de conclure un procédé pour obtenir l'équation finale en  $y$ .

Puisque la propriété caractéristique de toute valeur convenable de  $y$  est que, substituée dans les premiers membres des deux équations, elle leur donne un commun diviseur en  $x$ , qu'ils n'avaient pas auparavant (à moins que les équations ne soient indéterminées, ce qu'on ne suppose pas), il s'ensuit que si, aux deux polynômes proposés et ordonnés par rapport à  $x$ , on applique le procédé du plus grand commun diviseur, on n'en trouvera généralement pas; mais en continuant l'opération convenablement, on parviendra à un reste indépendant de  $x$  et fonction de  $y$ , qui, égalé à 0, donnera l'équation finale demandée; car toute valeur de  $y$ , tirée de cette équation, rend nul le dernier reste de l'opération du commun diviseur; elle est donc telle que, substituée dans le reste précédent, elle rend ce reste diviseur commun des premiers membres  $A$  et  $B$ . Ainsi, chacune des racines de l'équation ainsi formée est une valeur convenable de  $y$ .

285. En admettant que l'équation finale fût complètement résolue, ce qui donnerait toutes les valeurs convenables, il faudrait ensuite obtenir les valeurs correspondantes de  $x$ . Or, il est évident qu'il suffirait, pour cela, de substituer les différentes valeurs de  $y$  dans l'avant-dernier reste, d'égaliser à 0 les polynômes en  $x$  qui en résulteraient, et d'en tirer les valeurs de  $x$ ; car ces polynômes ne sont autre chose que les diviseurs en  $x$  qui deviennent communs à  $A$  et  $B$ .

Mais comme l'équation finale est, en général, d'un degré supérieur au second, nous sommes forcé de renvoyer à un autre chapitre la seconde partie de la théorie de l'élimination, laquelle partie a pour objet de *déterminer tous les systèmes de valeurs propres à vérifier deux équations d'un degré quelconque à deux inconnues*.

Nous nous proposons également de revenir sur la méthode qui vient d'être exposée, parce qu'elle a quelques inconvénients que nous tâcherons de faire disparaître. Mais notre but était principalement ici de faire voir comment, *deux équations d'un degré quelconque étant données, on peut, sans supposer la résolution d'aucune équation, parvenir à une autre équation ne renfermant plus que l'une des deux inconnues qui entrent dans les proposées*.

286. Si l'on avait trois équations (1), (2) et (3), renfermant les inconnues  $x$ ,  $y$  et  $z$ , pour obtenir l'équation finale en  $z$ , c'est-à-dire l'équation renfermant toutes les valeurs de l'inconnue  $z$ , susceptibles de vérifier les trois équations en même temps que certaines valeurs de  $x$  et de  $y$ , il faudrait, en regardant  $y$  comme connu, éliminer  $x$  entre les équations (1) et (2), puis entre (1) et (3), d'après la méthode du n° 284; ce qui conduirait à deux équations en  $y$  et  $z$ , auxquelles on appliquerait la même méthode pour éliminer  $y$ .

Même raisonnement pour 4 équations à 4 inconnues, etc.

Pour le moment, nous nous bornerons à une seule application générale de la méthode d'élimination.

287. Soit proposé le problème suivant :

*Une équation du degré  $m$  à une seule inconnue étant donnée, on demande une autre équation dont les racines soient une certaine combinaison de deux quelconques des racines de la proposée.*

Soit  $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0$ ,

l'équation proposée; appelons  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$ , ... les racines de

cette équation, et désignons par  $u$  l'inconnue de l'équation qu'on veut former.

Si nous considérons deux quelconques des racines de la proposée,  $x'$  et  $x''$  par exemple, on doit avoir, par hypothèse,

$$u = F(x', x'') \dots (1),$$

[la lettre  $F$ , qui s'annonce *fonction de*, exprimant ici un certain système d'opérations à effectuer sur les deux racines  $x'$  et  $x''$  pour obtenir la valeur de  $u$ ].

D'un autre côté, puisque  $x'$  et  $x''$  sont des racines de l'équation donnée, on doit avoir les deux relations

$$x'^m + Px'^{m-1} + Qx'^{m-2} + \dots + Tx' + U = 0 \dots (2),$$

$$x''^m + Px''^{m-1} + Qx''^{m-2} + \dots + Tx'' + U = 0 \dots (3).$$

Les équations (1), (2) et (3) peuvent donc être regardées comme les équations du problème; et toutes les fois que la nature de la combinaison ou *fonction*, exprimée par la lettre  $F$ , sera connue et définie, il suffira d'éliminer  $x'$  et  $x''$  entre ces trois équations. L'équation finale en  $u$  sera l'équation demandée. En effet, le résultat ne renfermant plus aucun trace des deux racines particulières  $x'$  et  $x''$ , puisqu'on les aura éliminées, conviendra à toutes les racines  $x', x'', x''' \dots$  et aura par conséquent pour racine, une combinaison (exprimée par le caractère  $F$ ) de deux quelconques des racines de la proposée.

288. Proposons-nous, comme cas particulier de la question précédente, de déterminer une équation dont les racines soient les différences entre deux quelconques des racines d'une équation donnée. C'est ce qu'on appelle l'équation aux différences.

*Solution.* Soient  $x^m + Px^{m-1} + \dots = 0$ , l'équation proposée,  $x', x'', x''' \dots$  ses  $m$  racines; et appelons  $u$  la valeur de l'une quelconque des différences

$$x'' - x', x''' - x', x''' - x'', x'' - x''', \dots$$

On a d'abord, en vertu de l'énoncé, cette première relation

$$u = x'' - x' \dots (1).$$

D'ailleurs,  $x'$  et  $x''$  étant des racines de la proposée, doivent y satisfaire, et donnent par conséquent,

$$x'^m + Px'^{m-1} + \dots = 0 \dots (2),$$

$$x''^m + Px''^{m-1} + \dots = 0 \dots (3);$$

et il s'agirait (n° 287) d'éliminer  $x'$ ,  $x''$  entre les équations (1), (2) et (3).

Mais comme de la relation (1), on déduit  $x'' = x' + u$ , d'où, substituant dans l'équation (3),

$$(x' + u)^m + P(x' + u)^{m-1} + \dots = 0 (4),$$

il s'ensuit que la question est ramenée à éliminer  $x'$  entre les équations (2) et (4).

Or, l'équation (4) développée prend (n° 278) la forme

$$X' + Y'u + \frac{Z'}{2}u^2 + \dots + u^m = 0;$$

et si l'on observe que  $X'$  n'est autre chose que

$$x'^m + Px'^{m-1} + \dots,$$

expression qui doit être nulle d'après la relation (2), la dernière équation, débarrassée du terme  $X'$  et divisée ensuite par  $u$  (voy. le N. B.), se réduit à

$$Y' + \frac{Z'}{2}u + \frac{V'}{2.3}u^2 + \dots + u^{m-1} = 0.$$

Donc enfin, l'équation cherchée résulte de l'élimination de  $x'$  entre les deux équations

$$X' = 0,$$

$$Y' + \frac{Z'}{2}u + \frac{V'}{2.3}u^2 + \dots + u^{m-1} = 0.$$

Ainsi, règle générale : Pour former l'équation aux diff-

rences des racines d'une équation proposée, il faut éliminer  $x'$  entre l'équation  $X' = 0$ , qu'on déduit de la proposée en y remplaçant  $x$  par  $x'$ , et l'équation qui résulte de la substitution de  $x' + u$  à la place de  $x$ , cette résultante étant d'abord débarrassée de son dernier terme  $X'$ , et divisée ensuite par  $u$ .

N. B. 1°. Dans la pratique, on se dispense de mettre l'accent sur la lettre  $x$ , c'est-à-dire qu'on élimine directement  $x$  entre la proposée  $X = 0$ , ou  $x^m + Px^{m-1} + \dots = 0$ , et l'équation  $Y + \frac{Z}{2}u + \dots + u^{m-1} = 0$ , dans laquelle  $Y, \frac{Z}{2}, \dots$ , sont composés en  $x$  comme  $Y, \frac{Z}{2}, \dots$ , sont composés en  $x'$ .

Le résultat de l'élimination est évidemment le même.

2°. Après avoir posé dans l'équation  $X = 0$ ,  $x + u$  à la place de  $x$ , ce qui donne

$$X + Yu + \frac{Z}{2}u^2 + \dots + u^m = 0,$$

on omet le terme  $X$ , comme formant le premier membre de la proposée, et l'on obtient une nouvelle équation

$$Yu + \frac{Z}{2}u^2 + \dots + u^m = 0,$$

dont tous les termes sont divisibles par  $u$ , ou, ce qui revient au même, qui est satisfaite par  $u = 0$ . Cela doit être, puisque parmi les différences entre les racines, il faut compter celle qui existe entre chaque racine et elle-même; mais si l'on supprime ce facteur  $u$ , l'équation ne renferme plus alors que les différences entre l'une quelconque des racines et toutes les autres. Or, ce sont les seules différences que nous aurons besoin de considérer par la suite.

289. Soit, par exemple, à déterminer l'équation aux différences des racines de l'équation  $x^3 - 6x - 7 = 0$ .

On a d'abord, en vertu de la loi de formation, n° 278,

$$X = x^3 - 6x - 7, \quad Y = 3x^2 - 6, \quad \frac{Z}{2} = 3x, \quad \frac{V}{2.3} = 1;$$

ce qui donne les deux équations

$$x^2 - 6x - 7 = 0,$$

$$3x^2 - 6 + 3x \cdot u + u^2 = 0,$$

entre lesquelles il faut éliminer  $x$ .

Si l'on applique à ces deux équations le procédé du n° 284, on obtient pour l'équation finale en  $u$ ,

$$u^6 - 36u^4 + 324u^2 + 459 = 0.$$

C'est l'équation aux différences des racines de la proposée.

### 290. Composition et forme de l'équation aux différences.

On peut reconnaître *à priori*, pour toute équation du degré  $m$ , la forme et la composition de l'équation aux différences des racines de cette équation.

Désignons toujours par  $x'$ ,  $x''$ ,  $x''' \dots$ , les racines de la proposée, par  $u$  l'une quelconque des différences; et remarquons que, si l'une des différences est  $x' - x''$ , il en existe nécessairement une autre,  $x'' - x'''$ , qui ne diffère de celle-là que par le signe; c'est-à-dire que, si  $a$  est une valeur de  $u$ ,  $-a$  en est nécessairement une autre; de même,  $\zeta$  étant une racine,  $-\zeta$  en est une autre, etc.

Donc, le premier membre de l'équation en  $u$  peut être mis sous la forme

$$(u - a)(u + a)(u - \zeta)(u + \zeta)(u - \gamma)(u + \gamma) \dots = 0,$$

ou, multipliant les facteurs deux à deux,

$$(u^2 - a^2)(u^2 - \zeta^2)(u^2 - \gamma^2) \dots = 0.$$

Donc cette équation est de degré pair et de plus, ne renferme que des puissances de degré pair de l'inconnue; c'est-à-dire qu'elle est de la forme

$$u^{2n} + P'u^{2n-2} + Q'u^{2n-4} + \dots + T'u^2 + U' = 0.$$

Le degré  $2n$  est d'ailleurs égal à  $m(m-1)$ , ou bien (n° 149), au nombre d'arrangemens deux à deux que l'on peut faire avec un nombre  $m$  de lettres.

Si, dans l'équation précédente, on pose, pour simplifier,

$n^{\circ} = z$ , elle devient

$$z^n + Pz^{n-1} + Qz^{n-2} + \dots + Tz + U = 0,$$

équation d'un degré sous-double,  $n$ , ou  $m \frac{m-1}{2}$ , dont les racines sont les carrés des différences entre les racines  $x', x'', x''' \dots$ ; car en mettant dans la relation  $u^2 = z$ , à la place de  $u$ , ses différentes valeurs  $x'' - x'$ ,  $x''' - x'$ ,  $\dots$ , on obtient

$$z = (x'' - x')^2, (x''' - x')^2, \dots$$

L'équation en  $z$ , à laquelle on est parvenu tout à l'heure, s'appelle, pour cette raison, l'équation aux carrés des différences; et on la considère ordinairement de préférence à l'équation aux différences, comme étant d'un degré sous-double.

Ainsi, dans l'exemple du  $n^{\circ}$  précédent, l'équation aux différences est du  $6^{\circ}$  degré, c'est-à-dire d'un degré marqué par  $3(3-1)$ , ou par 6. Elle ne renferme que des puissances de degré pair; et si l'on pose  $\mu^2 = z$ , elle devient

$$z^3 - 36z^2 + 324z + 459 = 0,$$

équation dont les racines sont les carrés des différences des racines de la proposée.

L'équation aux différences, ou aux carrés des différences, nous sera très utile par la suite.

### § III. Des Équations susceptibles d'abaissement.

On comprend sous ce titre, toutes les équations dont deux ou plusieurs racines ont entre elles des relations particulières, parce qu'en général on peut faire dépendre la résolution de ces équations de celle d'autres équations de degré moindre. Telles sont les équations qui ont des racines égales, c'est-à-dire dont le premier membre est ( $n^{\circ}$  255) le produit de plusieurs facteurs égaux de différente espèce.

Les méthodes qui se rapportent à ces classes d'équations s'appellent méthodes d'abaissement, et doivent être regardées,



jusqu'à un certain point, comme une branche de la transformation des équations, puisque le but général de cette théorie est de ramener la résolution d'une équation à celle d'une équation plus simple.

## MÉTHODE DES RACINES ÉGALES.

291. Dire qu'une équation a des racines égales, c'est dire (n° 255) que son premier membre a des facteurs égaux ; dès lors, le premier polynome dérivé qui (n° 279) est la somme des produits  $m-1$  à  $m-1$  des  $m$  facteurs, contient dans ses différentes parties au moins une fois le facteur qui entre plusieurs fois dans la proposée. Donc, *il doit exister un commun diviseur entre le premier membre de la proposée et son premier polynome dérivé.*

Mais de quelle manière ce commun diviseur se compose-t-il au moyen des facteurs égaux de la proposée ? c'est ce qu'il s'agit maintenant de développer.

292. Une équation étant donnée, on demande de reconnaître si elle a des racines égales, et de déterminer ces racines, s'il est possible.

Désignons par  $X$  le premier membre de l'équation

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0,$$

et supposons qu'il renferme  $n$  facteurs égaux à  $x-a$ ,  $n'$  facteurs égaux à  $x-b$ ,  $n''$  facteurs égaux à  $x-c$ ..., et contienne en outre les facteurs simples  $x-p$ ,  $x-q$ ,  $x-r$ ... ; en sorte que l'on ait

$$X = (x-a)^n (x-b)^{n'} (x-c)^{n''} \dots (x-p)(x-q)(x-r) \dots$$

Si l'on considère  $Y$ , ou le polynome dérivé de  $X$ , on a vu (n° 279) que ce polynome est la somme des quotiens de la division de  $X$  par chacun des  $m$  facteurs du premier degré de la proposée. Or, comme  $X$  renferme  $n$  facteurs égaux à  $x-a$ , on aura d'abord  $n$  quotiens partiels égaux à  $\frac{X}{x-a}$ , même raisonnement pour chacun des facteurs égaux,  $x-b$ ,  $x-c$ ...,

d'ailleurs, on ne peut former qu'un seul quotient égal à...

$\frac{X}{x-p}, \frac{X}{x-q}, \frac{X}{x-r}, \dots$ . Ainsi, Y est nécessairement de la forme

$$Y = \frac{nX}{x-a} + \frac{n'X}{x-b} + \frac{n''X}{x-c} + \dots + \frac{X}{x-p} + \frac{X}{x-q} + \frac{X}{x-r} + \dots$$

D'après cette composition du polynome Y, il est visible que  $(x-a)^{n-1}, (x-b)^{n'-1}, (x-c)^{n''-1}, \dots$  sont des facteurs communs à toutes les parties de ce polynome; donc le produit  $(x-a)^{n-1} (x-b)^{n'-1} (x-c)^{n''-1}, \dots$  est un *diviseur relatif* de Y; d'ailleurs X renferme aussi évidemment ce diviseur; ainsi X et Y ont pour commun diviseur.....

$(x-a)^{n-1} (x-b)^{n'-1} (x-c)^{n''-1}, \dots$ ; je dis maintenant que c'est leur plus grand commun diviseur. En effet, les facteurs premiers de X sont  $x-a, x-b, x-c, \dots$  et  $x-p, x-q, x-r, \dots$ ; or, Y ne peut avoir pour diviseurs,  $x-p, x-q, x-r, \dots$ , puisque chacun d'eux est facteur commun à toutes les parties de Y, à l'exception d'une seule.

Donc enfin, le plus grand commun diviseur de X et de Y est

$$D = (x-a)^{n-1} (x-b)^{n'-1} (x-c)^{n''-1}, \dots;$$

c'est-à-dire que ce plus grand commun diviseur se compose du produit des facteurs qui entrent plusieurs fois dans la proposée, élevés à une puissance moindre d'une unité que dans la proposée.

293. De là, on peut conclure la méthode suivante :

Pour reconnaître si une équation  $X=0$  renferme des racines égales, formez Y ou le polynome dérivé de X; puis cherchez (n° 261) le plus grand commun diviseur relatif entre X et Y; si vous n'en trouvez pas, l'équation n'a pas de racines égales ou de facteurs égaux.

Si vous en trouvez un, et que ce commun diviseur D soit du premier degré, ou de la forme  $x-h$ , posez  $x-h=0$ , d'où  $x=h$ ; vous pouvez alors conclure que l'équation a deux racines égales à h, et n'a qu'une seule espèce de racines égales, dont vous pouvez la débarrasser en divisant X par  $(x-h)^2$ .

Si  $D$  est du second degré en  $x$ , résolvez l'équation  $D=0$ ; il peut arriver deux cas : ou les deux racines sont égales, ou elles sont inégales. 1°. Si vous trouvez  $D=(x-h)^2$ , vous pouvez conclure que l'équation a trois racines égales à  $h$ , et ne renferme qu'une seule espèce de racines égales, dont vous pouvez la débarrasser en divisant  $X$  par  $(x-h)^3$ ; 2°. si  $D$  est de la forme  $(x-h)(x-h')$ , c'est que la proposée a deux racines égales à  $h$ , et deux racines égales à  $h'$ , dont on la débarrasse en divisant  $X$  par  $(x-h)^2(x-h')$ , ou par  $D$ .

Supposons maintenant que  $D$  soit d'un degré quelconque; il faut, pour connaître les espèces de racines égales, et le nombre des racines de chaque espèce, résoudre complètement l'équation  $D=0$ ; et toute racine simple de  $D=0$  sera double dans la proposée; toute racine double de  $D=0$  sera triple dans la proposée; et ainsi de suite.

294. Appliquons cette méthode à quelques exemples:

On demande si l'équation  $2x^4 - 12x^3 + 19x^2 - 6x + 9 = 0$ , a des racines égales.

On a ( $n^\circ 278$ ), pour le polynome dérivé,

$$8x^3 - 36x^2 + 38x - 6.$$

Or, en cherchant ( $n^\circ 275$ ) le plus grand commun diviseur entre ces deux polynomes, on trouve  $D = x - 3 = 0$ , d'où  $x = 3$ ; la proposée a donc deux racines égales à 3.

Divisant son premier membre par  $(x-3)^2$ , on obtient

$$2x^2 + 1 = 0; \text{ d'où } x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-2}.$$

Ainsi l'équation est complètement résolue et a pour racines,

$$3, 3, +\frac{1}{2}\sqrt{-2} \text{ et } -\frac{1}{2}\sqrt{-2}.$$

Soit pour second exemple,  $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 8x - 3 = 0$ ; on a pour le polynome dérivé,  $5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 14x + 8$ , et pour commun diviseur,  $x^2 - 2x + 1$  ou  $(x-1)^2$ ; donc la proposée a trois racines égales à 1.

Divisant son premier membre par  $(x-1)^3$  ou par...  
 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ , on trouve pour quotient,

$$x^4 + x + 3 = 0; \text{ d'où } x = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2};$$

L'équation est donc encore complètement résolue.

Soit la nouvelle équation

$$x^7 + 5x^6 + 6x^5 - 6x^4 - 15x^3 - 3x^2 + 8x + 4 = 0;$$

le polynome dérivé est

$$7x^6 + 30x^5 + 30x^4 - 24x^3 - 45x^2 - 6x + 8;$$

et l'on trouve pour commun diviseur,

$$x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2.$$

L'équation  $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$ , ne peut pas être immédiatement résolue; mais en lui appliquant la méthode des racines égales, c'est-à-dire en recherchant le commun diviseur entre le premier membre et son polynome dérivé,  $4x^3 + 9x^2 + 2x - 3$ , on trouve pour commun diviseur,  $x+1$ ; ce qui prouve que  $x+1$  entre au carré dans  $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$ , et au cube dans le premier membre de la proposée.

Divisant  $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$  par  $(x+1)^2$  ou  $x^2 + 2x + 1$ , il vient pour quotient,  $x^2 + x - 2$ , polynome qui, égalé à zéro, donne les deux racines  $x=1$ ,  $x=-2$ , ou les deux facteurs  $x-1$  et  $x+2$ . On a donc

$$x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = (x+1)^2 (x-1) (x+2).$$

Ainsi, le premier membre de la proposée est de la forme

$$(x+1)^3 (x-1)^2 (x+2)^2;$$

ou bien, en d'autres termes, l'équation a trois racines égales à  $-1$ , deux égales à  $1$  et deux égales à  $-2$ .

Voici de nouvelles applications :

$$1^{\circ}. x^7 - 7x^6 + 10x^5 + 22x^4 - 43x^3 - 35x^2 + 48x + 36 = 0, \\ (x-2)^2 (x-3)^2 (x+1)^2 = 0;$$

$$2^{\circ}. x^7 - 3x^6 + 9x^5 - 19x^4 + 27x^3 - 33x^2 + 27x - 9 = 0, \\ (x-1)^3 (x+3)^2 = 0.$$

295. Lorsqu'en appliquant la méthode précédente, on obtient une équation  $D=0$ , d'un degré supérieur au second, comme cette équation peut elle-même être soumise à la méthode, on parvient souvent ainsi à opérer la décomposition de  $D=0$  en ses facteurs; et l'on connaît par ce moyen les différentes espèces de racines égales de l'équation  $X=0$ , et le nombre de racines de chaque espèce. Quant aux racines simples de  $X=0$ , on commence par dégager cette équation des facteurs égaux qu'elle renferme, et l'équation résultante, que nous pouvons désigner par  $X'=0$ , étant résolue, fait connaître ces racines simples.

Il y a une circonstance où les racines égales de  $X=0$  ne peuvent pas être découvertes immédiatement, c'est celle où l'équation  $D=0$  n'a que des racines inégales, auquel cas toutes ces racines sont doubles dans la proposée; et leur détermination ne peut se faire qu'en résolvant l'équation  $D=0$ , d'après des méthodes que nous exposerons ultérieurement.

296. Mais pour ne rien laisser à désirer sur cette matière, nous allons faire voir que, *quelle que soit l'équation proposée, si elle renferme des racines égales, on peut toujours faire dépendre sa résolution de celle d'une suite d'équations dont la première ne renferme que les racines simples de la proposée, une seconde les racines doubles (c'est-à-dire, les racines qui y entrent deux fois), une troisième les racines triples, etc.*

En effet, soit  $X=0$  l'équation proposée, et désignons par  $X'$  le produit des facteurs du premier degré qui correspondent aux racines simples; par  $X''$  le produit des facteurs du premier degré, correspondant aux racines doubles; par  $X'''$ ,  $X^{iv}$ , .... le produit des facteurs correspondant aux racines triples, quadruples ....; en sorte que l'on ait

$$X = X' \cdot X'' \cdot X''' \cdot X^{iv} \cdot X^v$$

Il résulte de ce qui a été dit n° 292, que le plus grand commun diviseur entre  $X$  et son polynôme dérivé  $Y$ , est de la forme

$$D = X' \cdot X'' \cdot X^{iv} \cdot X^v, \dots,$$

puisque les facteurs égaux de la proposée doivent entrer dans  $D$  à une puissance moindre d'une unité que dans la proposée.

Cela posé, opérons sur  $D$  comme nous avons opéré sur  $X$ , et désignons par  $D'$  le plus grand commun diviseur qui existe entre  $D$  et son polynôme dérivé. On a

$$D' = X'' \cdot X^{iv} \cdot X^v$$

On trouverait de même, en opérant sur  $D'$  comme on a opéré sur  $D$  et  $X$ ,

$$D'' = X^{iv} \cdot X^v,$$

$$D''' = X^v.$$

(Nous supposons, pour fixer les idées, que 5 soit le plus grand nombre de fois qu'une même racine puisse entrer dans l'équation proposée, c'est-à-dire que l'équation  $D''' = 0$  ne renferme plus que des racines simples.)

Actuellement, si l'on divise successivement  $X$  par  $D$ ,  $D$  par  $D'$ ,  $D'$  par  $D''$ ,  $D''$  par  $D'''$ , et qu'on désigne par  $Q$ ,  $Q'$ ,  $Q''$ ,  $Q'''$ , les quotiens obtenus, il vient

$$Q = \frac{X}{D} = X' \cdot X'' \cdot X''' \cdot X^{iv} \cdot X^v,$$

$$Q' = \frac{D}{D'} = X' \cdot X'' \cdot X^{iv} \cdot X^v,$$

$$Q'' = \frac{D'}{D''} = X'' \cdot X^{iv} \cdot X^v,$$

$$Q''' = \frac{D''}{D'''} = X^{iv} \cdot X^v.$$

Divisant ensuite  $Q$  par  $Q'$ ,  $Q'$  par  $Q''$ ,  $Q''$  par  $Q'''$  et  $Q'''$  par  $D'''$ ,

on trouve enfin

$$\frac{Q}{Q'} = X', \frac{Q'}{Q''} = X'', \frac{Q''}{Q'''} = X''', \frac{Q'''}{D''} = X^{(iv)} \text{ et } D'' = X''.$$

D'où l'on voit que, par le moyen de trois systèmes d'opérations, savoir une série d'opérations du commun diviseur et deux séries de divisions, on parvient à isoler successivement les facteurs  $X'$ ,  $X''$ ,  $X'''$ ,  $X^{(iv)}$  et  $X''$ , qui, égales séparément à 0, donnent, la première, les racines simples, la seconde, les racines doubles, etc.

Voici le tableau de ces diverses opérations :

$$\begin{array}{l} X = X'X''X'''X^{(iv)}X^{(v)} \\ D = X''X'''X^{(iv)}X^{(v)} \\ D' = X'''X^{(iv)}X^{(v)} \\ D'' = X^{(iv)}X^{(v)} \\ D''' = X^{(v)} = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} Q = XX'X''X'''X^{(iv)} \\ Q' = X'X''X'''X^{(iv)} \\ Q'' = X''X'''X^{(iv)} \\ Q''' = X'''X^{(iv)} \\ Q^{(iv)} = X^{(iv)}X^{(v)} \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{Q}{Q'} = X' = 0 \\ \frac{Q'}{Q''} = X'' = 0 \\ \frac{Q''}{Q'''} = X''' = 0 \\ \frac{Q'''}{Q^{(iv)}} = X^{(iv)} = 0 \\ \frac{Q^{(iv)}}{D''} = X^{(v)} = 0. \end{array}$$

Il est à remarquer d'ailleurs que le degré de  $X' = 0$  exprime le nombre des racines simples de la proposée, le degré de  $X'' = 0$ , le nombre des racines doubles, celui de  $X''' = 0$ , le nombre des racines triples, etc. ; et la résolution complète de ces équations fait connaître les différentes espèces de racines doubles, triples, quadruples, etc.

Ainsi la méthode des racines égales n'est pas, en général, une méthode de résolution complète, mais bien une méthode d'abaissement. Ce n'est que dans le cas où les équations  $X' = 0$ ,  $X'' = 0$ ,  $X''' = 0$ , ... ne sont que du premier ou du second degré, qu'on peut obtenir immédiatement toutes les racines de l'équation proposée.

297. On peut appliquer la théorie des racines égales à la recherche des relations qui doivent exister entre les coefficients

d'un polynôme en  $x$  du second, troisième... degré, pour que ce polynôme soit un carré, un cube, ... parfait. Il suffit pour cela de former le polynôme dérivé du polynôme proposé, puis d'exprimer (n° 239) la condition nécessaire pour que ce polynôme dérivé soit diviseur relatif du polynôme proposé.

Soit, par exemple, le trinôme du second degré  $ax^2 + bx + c$ , dont le polynôme dérivé est  $2ax + b$ ,

$$\left. \begin{array}{r} 2ax^2 + bx + c \\ bx + c \end{array} \right\} \begin{array}{r} 2ax + b \\ x + b \\ \hline 2abx + 4ac \\ \hline 4ac - b^2 \end{array}$$

En appliquant à ces deux polynômes le procédé du commun diviseur avec ses modifications, on trouve pour reste,  $4ac - b^2$ ; et si l'on suppose  $4ac - b^2 = 0$ , ou  $b^2 - 4ac = 0$ ,  $2ax + b$  sera le plus grand commun diviseur entre  $ax^2 + bx + c$  et son dérivé, qui n'est autre chose que  $2ax + b$ , lui-même; ainsi l'on peut regarder  $ax^2 + bx + c$  comme le carré de  $2ax + b$ , à un facteur quelconque près, indépendant de  $x$ .

On a vu en effet (n° 112), que  $b^2 - 4ac = 0$ , est la condition nécessaire et suffisante pour qu'un trinôme du second degré soit un carré parfait.

Soit encore le polynôme.....  $ax^3 + bx^2 + cx + d$ , dont le dérivé est.....  $3ax^2 + 2bx + c$ ;

en cherchant le plus grand commun diviseur, on trouve pour reste,  $(6ac - 2b^2)x + 9ad - bc$ . Or, en écrivant que ce reste est nul, on établit la condition que  $3ax^2 + 2bx + c$  est commun diviseur entre le polynôme et son dérivé; mais ce reste doit être nul, quelle que soit la valeur de  $x$ ; ainsi (n° 188), on a séparément  $6ac - 2b^2 = 0$ ,  $9ad - bc = 0$ . En effet, la première de ces deux conditions donne  $c = \frac{b^2}{3a}$ , et la seconde,  $d = \frac{bc}{9a} = \frac{b^3}{27a^2}$ ; d'où, substituant dans le polynôme proposé,



$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a \left( x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{b^2}{3a^2}x + \frac{b^3}{27a^3} \right) = a \left( x + \frac{b}{3a} \right)^3.$$

Même raisonnement pour les polynomes du 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>,... degré.

298. Le procédé du commun diviseur sert encore dans d'autres cas à abaisser le degré d'une équation : tel est celui où l'on donne d'avance une certaine relation entre deux des racines de l'équation proposée.

Soit, pour fixer les idées, l'équation générale

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0 \dots (1),$$

et supposons qu'entre deux des racines  $a$  et  $b$ , l'on ait la relation  $b = ka + h$  ( $k$  et  $h$  étant des nombres connus et donnés *a priori*).

Puisque l'équation (1) doit être satisfaite par les deux quantités  $a$  et  $ka + h$ , il s'ensuit que, si l'on met dans cette équation  $kx + h$  à la place de  $x$ , ce qui donne la nouvelle équation

$$(kx + h)^m + P(kx + h)^{m-1} + \dots + T(kx + h) + U = 0 \dots (2),$$

les deux équations (1) et (2) doivent être satisfaites par une même valeur  $a$ ; donc (n° 252) il doit exister un commun diviseur relatif entre leurs premiers membres.

Ainsi, en appliquant à ces deux polynomes le procédé du plus grand commun diviseur relatif, et égalant à 0 le diviseur obtenu, on en tirera la valeur de la racine  $a$ . Cette valeur étant substituée dans la relation  $b = ka + h$ , fera connaître la valeur correspondante de  $b$ .

Si ce commun diviseur est du premier degré en  $x$ , on peut conclure que deux racines seulement de l'équation ont entre elles la relation donnée. S'il est du second degré, c'est qu'il existe deux couples de racines qui jouissent de cette propriété; et leur détermination ne présente encore aucune difficulté. Après quoi, l'on pourra diviser le premier membre de la proposée par chacun des facteurs du premier degré, qui correspondent aux racines obtenues.

En général, soit  $D$  le commun diviseur auquel on est parvenu. La résolution de l'équation proposée ne dépend plus que de la résolution de  $D=0$  et de l'équation qu'on obtient en divisant le premier membre de la proposée par chacun des facteurs du premier degré correspondant aux racines de  $D=0$ , et à celles qu'on a déduites de la relation,  $b=ka+h$ .

Soit, pour exemple, l'équation

$$x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 71x + 30 = 0 \dots (1)$$

dont nous supposons que deux des racines  $a$  et  $b$  sont liées par la relation  $b=2a+1$ .

En mettant  $2x+1$  pour  $x$  dans la proposée et développant les calculs, on obtient, toute réduction faite,

$$8x^4 - 32x^3 + 36x^2 - 7x - 2 = 0.$$

Appliquant aux premiers membres de cette équation et de la proposée, le procédé du commun diviseur, on parvient au diviseur relatif  $x-2$ ; ce qui donne

$$x-2=0, \text{ d'où } x \text{ ou } a=2.$$

Cette valeur de  $a$  substituée dans la relation  $b=2a+1$ , donne ensuite  $b=5$ .

Le premier membre de la proposée est donc divisible par

$$(x-2)(x-5) \text{ ou } x^2 - 7x + 10;$$

et en effectuant cette division, on a pour quotient

$$x^2 - 5x + 3 = 0, \text{ d'où } x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{13}.$$

L'équation proposée se trouve donc ainsi complètement résolue.

299. On peut déduire comme cas particulier de l'analyse précédente, le principe fondamental de la théorie des racines égales. (Voyez n° 291.)

Soit fait  $h=0$  dans la relation  $b=ka+h$ ; elle devient

$b = ka$ , et l'équation (2) du n° 298 se réduit à

$$k^m x^m + P k^{m-1} x^{m-1} + \dots + T k x + U = 0.$$

Mais comme on doit avoir pour la même valeur de  $x$ ,

$$x^m + P x^{m-1} + Q x^{m-2} + \dots + T x + U = 0,$$

on peut substituer à l'une de ces équations le résultat de leur soustraction, ce qui donne

$$(k^m - 1)x^m + P(k^{m-1} - 1)x^{m-1} + \dots + T(k - 1)x = 0,$$

ou bien, observant que  $(k - 1)x$  divise tous les termes de celle-ci, et effectuant alors cette division,

$$(k^{m-1} + k^{m-2} + \dots + k + 1)x^{m-1} + P(k^{m-2} + k^{m-3} + \dots + k + 1)x^{m-2} + Q(k^{m-3} + k^{m-4} + \dots + k + 1)x^{m-3} + \dots + T = 0.$$

Actuellement si, outre l'hypothèse de  $h = 0$ , on suppose  $k = 1$ , ce qui revient à dire que deux des racines  $b$  et  $a$  sont égales, l'équation précédente devient,

$$m x^{m-1} + P(m-1)x^{m-2} + Q(m-2)x^{m-3} + \dots + T = 0,$$

équation dont le premier membre doit avoir un commun diviseur relatif avec celui de la proposée.

Mais  $m x^{m-1} + (m-1)P x^{m-2} + \dots + T$  n'est autre chose (n° 278) que le polynôme dérivé du premier membre de la proposée  $x^m + P x^{m-1} + \dots + T x + U = 0$ .

Donc enfin, dans le cas où cette dernière équation a des racines égales, il doit exister un commun diviseur entre le premier membre de cette équation et son polynôme dérivé (\*).

#### DES ÉQUATIONS RÉCIPROQUES.

300. Il existe une classe remarquable d'équations susceptibles d'abaissement : ce sont celles dans lesquelles les coefficients

(\*) Ce mode de démonstration du principe de la théorie des racines égales est dû à M. Poincaré.

à égale distance des extrêmes sont égaux entre eux. Telles sont les équations

$$x^4 + px^3 + qx^2 + px + 1 = 0, \quad x^5 + px^4 + qx^3 + qx^2 + px + 1 = 0.$$

On les appelle équations réciproques, parce qu'elles jouissent de cette propriété, que si  $a$  est une quantité propre à les vérifier,  $\frac{1}{a}$  est nécessairement une autre racine.

En effet, considérons la première des deux équations ci-dessus, puisque  $a$  est supposé racine, on a

$$a^4 + pa^3 + qa^2 + pa + 1 = 0;$$

mais actuellement, si l'on substitue  $\frac{1}{a}$  à la place de  $x$ , il vient

$$\frac{1}{a^4} + p \cdot \frac{1}{a^3} + q \cdot \frac{1}{a^2} + p \cdot \frac{1}{a} + 1 = 0,$$

ou bien,  $1 + pa + qa^2 + pa^3 + a^4 = 0$ ,

égalité qui n'est autre chose que la précédente renversée.

On voit donc que les racines de ces équations, considérées deux à deux, sont *inverses* ou *réciproques* les unes des autres; d'où il suit que la moitié des racines étant déterminée, les autres peuvent s'obtenir en divisant l'unité par chacune des premières. Aussi, nous allons faire voir que la résolution de toute équation réciproque peut être ramenée à celle d'une équation d'un degré sous-double.

Prenons, pour fixer les idées, l'équation du 6<sup>e</sup> degré,

$$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0;$$

si l'on divise l'équation proposée par  $x^3$  (3 étant la moitié du degré de l'équation), elle prend la forme

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + p\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + q\left(x + \frac{1}{x}\right) + r = 0.$$

Cela posé, soit fait  $x + \frac{1}{x} = z$ ; il en résulte

$$x^2 - zx + 1 = 0,$$

équation qui donnera deux valeurs de  $x$  correspondantes à une même valeur de  $z$ ; ainsi l'on pourra obtenir les valeurs de  $x$ , dès que  $z$  sera connu.

Or, on déduit successivement

de l'équation

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

1°. en élevant au carré et transposant,  $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$ ;

2°. en multipliant ces deux nouvelles équations entre elles,

$$x^3 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = z^3 - 2z; \text{ d'où } x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z.$$

Substituons ces expressions de  $x + \frac{1}{x}$ ,  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ,  $x^3 + \frac{1}{x^3}$ , dans l'équation ci-dessus; il vient

$$z^3 - 3z + p(z^2 - 2) + qz + r = 0,$$

ou réduisant,  $z^3 + pz^2 + (q - 3)z + r - 2p = 0$ ,

équation du 3<sup>e</sup> degré, tandis que la proposée est du 6<sup>e</sup>. On ramènerait de la même manière une équation du 4<sup>e</sup>, 8<sup>e</sup>, 10<sup>e</sup>, 12<sup>e</sup>.... degré, à une équation du 2<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, 6<sup>e</sup>.... degré.

Il nous reste encore à considérer les équations réciproques de degré impair.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^5 + px^4 + qx^3 + qx^2 + px + 1 = 0.$$

Il est d'abord évident que  $-1$  est racine de cette équation, car si l'on remplace  $x$  par  $-1$ , on obtient pour résultat de la substitution,  $-1 + p - q + q - p + 1$ , expression dont tous les termes s'entre-détruisent. (Il en serait de même pour toute équation réciproque de degré impair.)

Il résulte de là (n° 252) que le premier membre est divisible par  $x + 1$ ; et en effectuant cette division, on obtient, d'après la loi de formation n° 253,

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 1 & x^3 + 1 \\ + p & - p \\ \hline & + q \end{array} \quad \begin{array}{r|l} x - 1 & x + 1 \\ + p & \end{array} = 0,$$

équation *réci-pro-que* de degré pair, sur laquelle on peut opérer comme il a été dit ci-dessus.

301. *N. B.* Les racines d'une équation de degré impair sont encore *réci-pro-ques deux à deux*, toutes les fois que les coefficients des termes, pris à égale distance des extrêmes, sont *égaux et de signes contraires*.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^5 + px^4 + qx^3 - qx^2 - px - 1 = 0;$$

si l'on remplace  $x$  par  $\frac{1}{x}$ , elle devient

$$\frac{1}{x^5} + \frac{p}{x^4} + \frac{q}{x^3} - \frac{q}{x^2} - \frac{p}{x} - 1 = 0,$$

ou chassant les dénominateurs et changeant les signes,

$$x^5 + px^4 + qx^3 - qx^2 - px - 1 = 0.$$

Donc,  $a$  étant une des racines de cette équation,  $\frac{1}{a}$  est nécessairement une autre racine.

D'ailleurs, il est visible que 1 vérifie l'équation; et si l'on effectue la division par  $x - 1$ , il vient

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 1 & x^3 + 1 \\ + p & + p \\ \hline & + q \end{array} \quad \begin{array}{r|l} x^2 + 1 & x + 1 \\ + p & \end{array} = 0,$$

équation dont les coefficients à égale distance des extrêmes *sont égaux et de même signe*.

Cette observation est de M. Reynaud, qui l'a consignée dans ses *Notes sur l'Algèbre de Bezout* (page 153, n° 381).

302. *Applications.* Soit l'équation générale à deux termes  $x^n - 1 = 0$ ; cette équation a évidemment 1 pour racine; et

en effectuant la division par  $x-1$ , on trouve (n° 31) pour quotient,

$$x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \dots + x^2 + x + 1 = 0,$$

équation réciproque de degré pair ou impair, dont la résolution peut, au moyen des principes précédens, être ramenée à la résolution d'une équation de degré sous-double.

Soit, par exemple, l'équation  $x^5 - 1 = 0$ ;  
on a, en divisant par  $x-1$ ,

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

équation que l'on peut mettre sous la forme

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0.$$

Posons  $x + \frac{1}{x} = z$ , d'où  $x^2 - zx + 1 = 0$ ; il en résulte

$$x^2 + z + \frac{1}{x^2} = z^2, \text{ ou } x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - z.$$

Reportant ces valeurs de  $x + \frac{1}{x}$  et de  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  dans l'équation,

l'on obtient  $z^2 - z + z + 1 = 0$ ,

ou réduisant,  $z^2 + z - 1 = 0$ ;

donc  $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ ;

d'ailleurs, l'équation  $x^2 - zx + 1 = 0$  donne

$$x = \frac{z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - 4};$$

done en substituant à la place de  $z$  ses deux valeurs, on a, toute réduction faite,

$$x = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{5} \pm \frac{1}{4}\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{-1}.$$

L'équation  $x^{10} - 1 = 0$ , peut encore être résolue complètement par le même moyen.

En effet, on a

$$x^{10} - 1 = (x^5 - 1)(x^5 + 1) = 0.$$

On connaît déjà les racines de l'équation  $x^5 - 1 = 0$ ; quant à celles de l'équation  $x^5 + 1 = 0$ , comme, par l'échange de  $x$  en  $-x$ , elle devient  $x^5 - 1 = 0$ , on voit que tout se réduit à prendre avec des signes contraires les racines de cette dernière équation.

### § III. Théorie des fonctions symétriques.

Pour compléter l'ensemble des matériaux nécessaires à la résolution des équations d'un degré quelconque, il nous reste à exposer l'une des théories les plus curieuses et les plus importantes de l'Analyse; c'est la théorie des *fonctions symétriques*. Le célèbre Lagrange en a fait la base d'une méthode pour résoudre les équations du troisième et du quatrième degré.

(Les candidats pour l'École Polytechnique peuvent, sans inconvénient, passer ce paragraphe, que nous n'avons placé ici que pour nous conformer à la marche que nous nous sommes tracée.)

303. On appelle *fonction symétrique* des racines d'une équation, toute expression algébrique qui renferme ces racines, combinées absolument de la même manière, soit entre elles, soit avec d'autres quantités. Ainsi, la somme  $a + b + c + \dots + i + l$  des racines d'une équation, la somme  $ab + ac + ad + \dots + il$  de leurs produits deux à deux, la somme  $abc + abd + \dots$  de leurs produits trois à trois..., sont dites des fonctions symétriques.

Le caractère distinctif d'une fonction symétrique est qu'elle conserve la même valeur numérique, quelque permutation que l'on fasse entre les racines.

Nous avons déjà vu (n° 257) que P, Q, R, ..., T, U étant les coefficients d'une équation, on a entre les racines et ses coefficients, les relations  $a + b + c + \dots = -P, \dots$



$ab + ac + ad + \dots = Q, \dots, abcd, \dots = \pm U$ ; nous allons voir maintenant que toute fonction symétrique rationnelle, de ces mêmes racines, peut être exprimée également au moyen des coefficients de l'équation.

304. *Sommes des puissances semblables des racines d'une équation.* Les plus simples des fonctions symétriques, et celles au moyen desquelles on peut, comme nous le verrons, former toutes les autres, sont les sommes des puissances semblables des racines, telles que  $a + b + c + d + \dots$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots$ , et en général,  $a^n + b^n + c^n + d^n + \dots$ ,  $n$  étant un nombre entier quelconque.

Or je dis que, sans connaître les racines, il est possible d'exprimer les sommes de leurs puissances semblables, au moyen des coefficients  $P, Q, R, \dots$ , qui sont des quantités connues.

Soit en effet  $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \dots + Tx + U = 0$ , l'équation proposée, et désignons ses racines par  $a, b, c, d, \dots$ . Si l'on divise successivement le premier membre par chacun des  $m$  facteurs du premier degré,  $x - a, x - b, x - c, \dots$ , on obtiendra (n° 251), pour les différens quotiens,

$$\begin{array}{r|l} x^{m-1} + a & x^{m-2} + a^2 \\ +P & +Pa \\ & +Q \\ & +R \end{array} \quad \begin{array}{r|l} x^{m-3} + a^3 & x^{m-4} + \dots + a^{m-1} \\ +Pa^3 & +Pa^{m-2} \\ +Qa & +Qa^{m-3} \\ +R & +Ra^{m-4} \\ & +\dots \\ & +T \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r|l} x^{m-1} + b & x^{m-2} + b^2 \\ +P & +Pb \\ & +Q \\ & +R \end{array} \quad \begin{array}{r|l} x^{m-3} + b^3 & x^{m-4} + \dots + b^{m-1} \\ +Pb^3 & +Pb^{m-2} \\ +Qb & +Qb^{m-3} \\ +R & +\dots \\ & +T \end{array}$$

et ainsi de suite, pour chacun des facteurs  $x - c, x - d, \dots$



Pour étendre ces formules au cas d'une puissance quelconque, reprenons l'équation proposée, et remplaçons  $x$  par chacune des racines  $a, b, c, d, \dots$ ; on a les égalités

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + \dots + Ta + U = 0,$$

$$b^m + Pb^{m-1} + Qb^{m-2} + \dots + Tb + U = 0,$$

$$\dots$$

$$\dots$$

Multipliant toutes ces égalités respectivement par  $a^n, b^n, c^n, \dots$ , et ajoutant les produits terme à terme, on obtient, d'après les notations convenues,

$$S_{m+n} + PS_{m+n-1} + QS_{m+n-2} + \dots + TS_{n+1} + US_n = 0.$$

Cela posé, voici l'usage de cette formule :

Soit  $n=0$ , d'où  $S_n = S_0 = a^0 + b^0 + c^0 + \dots = m$ ;

elle devient

$$S_n + PS_{n-1} + QS_{n-2} + \dots + TS_1 + mU = 0.$$

Cette dernière formule se lie immédiatement avec la dernière des formules obtenues ci-dessus.

Soit fait ensuite  $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ ; on trouve

$$S_{m+1} + PS_m + QS_{m-1} + \dots + TS_2 + US_1 = 0,$$

$$S_{m+2} + PS_{m+1} + QS_m + \dots + TS_3 + US_2 = 0,$$

$$S_{m+3} + PS_{m+2} + QS_{m+1} + \dots + TS_4 + US_3 = 0,$$

$$\dots$$

$$\dots$$

Il est facile de reconnaître, d'après l'inspection de ces formules, que les sommes des  $m$  premières puissances étant formées, les suivantes forment (n° 191) une série récurrente dont l'échelle de relation est la somme des  $m$  coefficients  $P, Q, R, \dots, T, U$ , de la proposée, pris en signes contraires.

La formule  $S_{m+n} + PS_{m+n-1} + \dots$  peut donner également les sommes des puissances entières et négatives. En effet,

soit d'abord  $n = -1$ ; il en résulte

$$S_{m-1} + PS_{m-2} + \dots + TS_0 + US_{-1} = 0,$$

équation d'où l'on peut tirer la valeur de  $S_{-1}$  en fonction de  $S_{m-1}, S_{m-2}, \dots, S_1, S_0$ , qui sont censés connus.

Soit encore  $n = -2, n = -3, \dots$ ; on obtiendra de nouvelles formules, qui donneront  $S_n$  en fonction de  $S_{m-2}, S_{m-3}, \dots, S_0, S_{-1}, \dots$ , puis  $S_{-3}$ , en fonction de  $S_{m-4}, S_{m-5}, \dots, S_{-1}, S_{-2}$ ; et ainsi de suite.

Concluons de là qu'une équation quelconque étant donnée, on peut toujours, sans connaître ses racines, obtenir les sommes de leurs puissances semblables, le degré de la puissance étant un nombre entier quelconque positif ou négatif.

Soit, pour exemple, l'équation

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0.$$

On a pour cette équation particulière,

$$P=1, \quad Q=-7, \quad T=-1, \quad U=6,$$

ce qui donne

$$S_1 = -P = -1,$$

$$S_2 = -PS_1 - 2Q = 1 + 14 = 15,$$

$$S_3 = -PS_2 - QS_1 - 3T = -15 - 7 + 3 = -19,$$

$$S_4 = -PS_3 - QS_2 - TS_1 - 4U = 19 + 105 - 1 - 24 = 99,$$

$$S_5 = -PS_4 - QS_3 - TS_2 - US_1 = -99 - 133 + 15 + 6 = -211,$$

$$S_6 = -PS_5 - QS_4 - TS_3 - US_2 = 211 + 693 - 19 - 90 = 795,$$

$$\dots$$

$$S_{-1} = \frac{-S_5 - PS_4 - QS_3 - TS_2}{U} = \frac{19 - 15 - 7 + 4}{6} = \frac{1}{6},$$

$$S_{-2} = \frac{-S_4 - PS_3 - QS_2 - TS_1}{U} = \frac{-15 + 1 + 28 + \frac{1}{6}}{6} = \frac{85}{36},$$

$$\dots$$

Ces valeurs peuvent être aisément vérifiées; car l'équation a été formée par la multiplication des facteurs  $x-1$ ,  $x+1$ ,  $x-2$ ,  $x+3$ , ce qui donne  $+1$ ,  $-1$ ,  $+2$ , et  $-3$ , pour les quatre racines.

Considérons maintenant d'autres espèces de fonctions symétriques.

305. On divise les fonctions symétriques rationnelles et entières des racines d'une équation, en fonctions symétriques à une lettre, à deux lettres, à trois lettres, etc.

\* Les fonctions symétriques à une lettre, sont celles dont chaque terme ne renferme qu'une racine; telle est la fonction  $a^n + b^n + c^n \dots$ , que nous savons déjà (n° 304) exprimer au moyen des coefficients de l'équation.

Les fonctions à deux lettres, sont celles dont chaque terme renferme deux racines; telle est la fonction  $a^n b^p + a^n c^p + b^n a^p + a^n d^p + \dots$ , dont il est aisé de concevoir la formation, en prenant tous les arrangements deux à deux des  $m$  racines, et affectant les deux lettres de chaque produit, des exposans respectifs  $n$  et  $p$ ; d'où il suit que le nombre total des termes de cette fonction est (n° 149) égal à  $m(m-1)$ .

Les fonctions à trois lettres, sont celles dont chaque terme renferme trois racines; telle est la fonction  $a^n b^p c^q + a^n c^p d^q + b^n a^p c^q + \dots$ , que l'on obtient en formant tous les arrangements trois à trois, des  $m$  racines, et affectant les trois lettres de chaque produit, des exposans respectifs  $n$ ,  $p$ ,  $q$ ; ainsi le nombre total des termes est marqué par  $m(m-1)(m-2)$ , et ainsi de suite.

Comme, un terme quelconque d'une fonction symétrique à plusieurs lettres étant écrit, on peut obtenir tous les autres en substituant à l'arrangement des lettres qui entrent dans ce terme, les autres arrangements dont les  $m$  lettres sont susceptibles, et conservant aux exposans le même ordre, on est convenu, pour abréger, de représenter les fonctions à une, deux, trois... lettres, de cette manière:  $T.a^n$ ,  $T.a^n b^p$ ,

$T.a^nb^rc^d \dots$ ; c'est-à-dire que l'on place en avant de l'un des termes de la fonction, la lettre  $T$ ; et ces notations équivalent à  $a^n + b^n + c^n + \dots$ ,  $a^nb^n + a^nc^n + \dots$ ,  $a^nb^rc^n + a^nb^rd^n + \dots$

Les fonctions dont nous venons de parler sont dites les *fonctions symétriques élémentaires*.

On peut concevoir ensuite que tous les termes d'une même fonction soient affectés de coefficients; mais pour que la fonction soit symétrique, il faut que tous ces coefficients soient égaux, et alors on peut mettre ce coefficient en facteur commun.

C'est ainsi que l'expression  $4a^nb^n + 4a^nc^n + 4b^na^n + \dots$ ; que l'on suppose symétrique en  $a, b, c, \dots$ , peut se mettre sous la forme  $4(a^nb^n + a^nc^n + b^na^n + \dots)$ , ou  $4T.a^nb^n$ .

Enfin un polynôme symétrique en  $a, b, c, \dots$  peut être composé de la réunion, par addition ou soustraction, de plusieurs *fonctions symétriques élémentaires*, auquel cas le polynôme proposé est dit une *fonction symétrique complexe*, en ce qu'elle renferme plusieurs fonctions de la forme  $\dots \dots \dots T.a^n, T.a^nb^n, T.a^nb^rc^n, \dots$ ; mais l'évaluation d'une fonction symétrique complexe est évidemment ramenée à celle de chacune des fonctions élémentaires qui la composent. Passons donc à la détermination de celles-ci.

#### *Évaluation des fonctions symétriques à deux, trois... lettres.*

306. On a déjà donné (n° 304) des formules pour évaluer les fonctions telles que  $T.a^n$ , qui n'est autre chose que  $S_n$ . Cherchons à évaluer la fonction à deux lettres  $T.a^nb^n$ . Pour cela multiplions entre elles les deux expressions

$$\begin{aligned} a^n + b^n + c^n + d^n + \dots &= T.a^n \text{ ou } S_n, \\ a^p + b^p + c^p + d^p + \dots &= T.a^p \text{ ou } S_p. \end{aligned}$$

Le second membre est  $T.a^n \times T.a^p$ , ou  $S_n \times S_p$ .

Quant au premier membre, il peut arriver deux cas dans la multiplication : ou les deux termes du multiplicande et du multiplicateur ont la même lettre, et dans ce cas, le produit partiel est l'un des termes de la fonction  $T.a^{n+p}$ .

Ou bien, les deux termes ont des lettres différentes, auquel cas le produit partiel est un terme de la fonction  $T.a^n b^p$ . Comme d'ailleurs le produit total doit être symétrique, puisque ses deux facteurs le sont, il s'ensuit que le premier membre a

pour expression,  $T.a^{n+p} + T.a^n b^p$ .

Ainsi l'on a l'équation  $T.a^{n+p} + T.a^n b^p = T.a^n \times T.a^p$ ;

d'où l'on déduit  $T.a^n b^p = T.a^n \times T.a^p - T.a^{n+p} \dots (1)$ ;

les fonctions  $T.a^n$ ,  $T.a^p$ ,  $T.a^{n+p}$ , ou  $S_n$ ,  $S_p$ ,  $S_{n+p}$ , étant connues, d'après les formules du n° 304, celle-ci pourra servir à déterminer toutes les fonctions à deux lettres.

307. *Cas particulier.* Si dans cette formule, on suppose  $n=p$ , circonstance qui arrive assez souvent, le second membre se réduit à  $(T.a^n)^2 - T.a^{2n}$  ou  $(S_n)^2 - S_{2n}$ . Pour savoir ce que devient le premier (qui, en apparence, se réduit à  $T.a^n b^n$ ), il faut observer que l'on a

$$T.a^n b^n = a^n b^n + a^n c^n + a^n d^n + \dots + b^n a^n + c^n a^n + \dots;$$

or, dans l'hypothèse de  $n=p$ , tous les termes de ce polynôme deviennent égaux deux à deux, savoir,  $a^n b^n$  et  $b^n a^n$ ,  $a^n c^n$  et  $c^n a^n$ , ...; donc  $T.a^n b^n$  se réduit réellement à  $2T.a^n b^n$ , c'est-à-dire au double de la fonction exprimée par  $T.a^n b^n$ , dont le nombre des termes n'est plus (u° 305) le nombre des arrangements, mais bien le nombre des combinaisons deux à deux.

Donc, en supposant  $n=p$  dans la formule (1), on trouve

$$2T.a^n b^n = (T.a^n)^2 - T.a^{2n}; \text{ d'où } T.a^n b^n = \frac{(T.a^n)^2 - T.a^{2n}}{2} \dots (2).$$

308. Tâchons maintenant d'évaluer la fonction  $T.a^n b^p c^q$ .

Pour y parvenir, multiplions entre elles les équations

$$a^n b^p + a^n b^q + a^n d^p + \dots + b^n a^p + c^n a^p + \dots = T.a^n b^p,$$

$$a^q + b^q + c^q + d^q + \dots = T.a^q.$$

On a d'abord, pour le produit des seconds membres, .....

$T.a^nb^p \times T.a^q$ ; quant aux premiers membres, on doit obtenir trois espèces de fonctions symétriques pour le produit total.

Car, ou la lettre du terme multiplicateur est semblable à la lettre du terme multiplicande, affectée de l'exposant  $n$ , auquel cas le produit partiel est un des termes de la fonction  $T.a^{n+1}b^p$ .

Ou la lettre du terme multiplicateur est semblable à la lettre du terme multiplicande, affectée de l'exposant  $p$ ; et, dans ce cas, le produit partiel appartient à la fonction  $T.a^nb^{p+1}$ .

Ou bien, elle est différente des deux lettres qui entrent dans le terme multiplicande; et alors le produit partiel est un des termes de la fonction  $T.a^nb^pc^q$ .

Donc enfin, le produit total des deux premiers membres a pour expression,  $T.a^{n+1}b^p + T.a^nb^{p+1} + T.a^nb^pc^q$ .

Ainsi, l'on a pour nouvelle équation,

$$T.a^{n+1}b^p + T.a^nb^{p+1} + T.a^nb^pc^q = T.a^nb^p \times T.a^q;$$

d'où l'on déduit

$$T.a^nb^pc^q = T.a^nb^p \times T.a^q - T.a^{n+1}b^p - T.a^nb^{p+1} \dots (3).$$

Le second membre de cette formule ne se composant que de fonctions à une ou à deux lettres, elle peut servir à évaluer toutes les fonctions à trois lettres.

309. *Cas particuliers.* 1°. Supposons deux des trois exposans égaux,  $p = q$ , par exemple; la formule (3) devient, en observant que le premier membre se réduit à  $2T.a^nb^pc^p$ ; puisque tous les termes de la fonction générale  $T.a^nb^pc^q$  sont alors égaux deux à deux, elle devient, dis-je,

$$2T.a^nb^pc^p = T.a^nb^p \times T.a^p - T.a^{n+1}b^p - T.a^nb^{p+1};$$

d'où l'on déduit

$$T.a^nb^pc^p = \frac{T.a^nb^p \times T.a^p - T.a^{n+1}b^p - T.a^nb^{p+1}}{2} \dots (4);$$

et cette nouvelle formule servira pour toutes les fonctions à trois lettres dont deux exposans seront égaux.



2°. Supposons les *trois* exposans égaux, c'est-à-dire  $n=p=q$ ; le premier membre de la formule (3) se réduit à  $6T.a^nb^nc$ , parce que tous les termes ( $n-1$ ) (8) deviennent égaux *six à six*; d'ailleurs  $T.a^nb^p$  est alors égal à  $2T.a^nb^n$ , et les deux termes  $T.a^{n+1}b^p$ ,  $T.a^nb^{p+1}$  deviennent  $T.a^{n+1}b^n$ ,  $T.a^nb^{n+1}$ , fonctions identiques; donc la formule (3) donne, dans ce cas particulier,  $6T.a^nb^nc = 2T.a^nb^n \times T.a^n - 2T.a^{n+1}b^n$ , et par conséquent,

$$T.a^nb^nc = \frac{T.a^nb^n \times T.a^n - T.a^{n+1}b^n}{3} \dots (5).$$

On parviendrait à ce même résultat, d'après la formule (4), en observant que  $n=p$  donne  $T.a^nb^pc = 3T.a^nb^nc$ , parce que tous les termes de  $T.a^nb^pc$  deviennent égaux *trois à trois*.

Pour peu qu'on réfléchisse sur la marche qui vient d'être suivie pour évaluer  $T.a^nb^p$ ,  $T.a^nb^pc$ , il est aisé de voir ce qu'il faudrait faire pour l'évaluation des fonctions à quatre lettres, à cinq lettres, etc.

310. Nous avons déjà observé (n° 305) que toute fonction symétrique rationnelle et entière des racines d'une équation n'est que le résultat de la réunion, par addition ou soustraction, des fonctions  $T.a^n$ ,  $T.a^nb^p$ ,  $T.a^nb^pc$ ,....., nous sommes donc en droit de conclure ce théorème, qui est un des plus beaux et des plus importans de l'Analyse algébrique : *Toute fonction symétrique rationnelle et entière des racines d'une équation peut, sans que l'on connaisse ses racines, être évaluée au moyen des coefficients de l'équation.*

N. B. Il en est de même d'une fonction symétrique rationnelle et fractionnaire; car, si l'on conçoit que tous les termes soient réduits au même dénominateur, on aura une seule expression fractionnaire, dont le numérateur devra, d'après le caractère distinctif d'une fonction symétrique (n° 303), être, ainsi que le dénominateur, une fonction symétrique rationnelle et entière; donc, en évaluant chacune de ces fonctions séparément, on obtiendra la valeur de la fonction proposée.

311. Applications de la théorie des fonctions symétriques.

$T.a^nb^p \times T.a^q$ ; quant aux premiers membres, on doit obtenir trois espèces de fonctions symétriques pour le produit total.

Car, ou la lettre du terme multiplicateur est semblable à la lettre du terme multiplicande, affectée de l'exposant  $n$ , auquel cas le produit partiel est un des termes de la fonction  $T.a^{n+1}b^p$ .

Ou la lettre du terme multiplicateur est semblable à la lettre du terme multiplicande, affectée de l'exposant  $p$ ; et, dans ce cas, le produit partiel appartient à la fonction  $T.a^nb^{p+1}$ .

Ou bien, elle est différente des deux lettres qui entrent dans le terme multiplicande; et alors le produit partiel est un des termes de la fonction  $T.a^nb^pc^q$ .

Donc enfin, le produit total des deux premiers membres a pour expression,  $T.a^{n+1}b^p + T.a^nb^{p+1} + T.a^nb^pc^q$ .

Ainsi, l'on a pour nouvelle équation,

$$T.a^{n+1}b^p + T.a^nb^{p+1} + T.a^nb^pc^q = T.a^nb^p \times T.a^q;$$

d'où l'on déduit

$$T.a^nb^pc^q = T.a^nb^p \times T.a^q - T.a^{n+1}b^p - T.a^nb^{p+1} \dots (3).$$

Le second membre de cette formule ne se composant que de fonctions à une ou à deux lettres, elle peut servir à évaluer toutes les fonctions à trois lettres.

309. *Cas particuliers.* 1°. Supposons deux des trois exposans égaux,  $p = q$ , par exemple; la formule (3) devient, en observant que le premier membre se réduit à  $2T.a^nb^pc^p$ , puisque tous les termes de la fonction générale  $T.a^nb^pc^q$  sont alors égaux deux à deux, elle devient, dis-je,

$$2T.a^nb^pc^p = T.a^nb^p \times T.a^p - T.a^{n+1}b^p - T.a^nb^{p+1};$$

d'où l'on déduit

$$T.a^nb^pc^p = \frac{T.a^nb^p \times T.a^p - T.a^{n+1}b^p - T.a^nb^{p+1}}{2} \dots (4);$$

et cette nouvelle formule servira pour toutes les fonctions à trois lettres dont deux exposans seront égaux.

2°. Supposons les *trois* exposans égaux, c'est-à-dire  $n=p=q$ ; le premier membre de la formule (3) se réduit à  $6T.a^nb^nc^q$ , parce que tous les termes (n°. 18) deviennent égaux *six à six*; d'ailleurs  $T.a^nb^pc^q$  est alors égal à  $2T.a^nb^nc^q$ , et les deux termes  $T.a^{n+1}b^pc^q$ ,  $T.a^nb^{p+1}c^q$  deviennent  $T.a^{n+1}b^nc^q$ ,  $T.a^nb^{n+1}c^q$ , fonctions identiques; donc la formule (3) donne, dans ce cas particulier,  $6T.a^nb^nc^q = 2T.a^nb^nc^q \times T.a^n = 2T.a^{n+1}b^nc^q$ , et par conséquent,

$$T.a^nb^nc^q = \frac{T.a^{n+1}b^nc^q \times T.a^n - T.a^{n+1}b^nc^q}{3} \dots (5).$$

On parviendrait à ce même résultat, d'après la formule (4), en observant que  $n=p$  donne  $T.a^nb^pc^q = 3T.a^nb^nc^q$ , parce que tous les termes de  $T.a^nb^pc^q$  deviennent égaux *trois à trois*.

Pour peu qu'on réfléchisse sur la marche qui vient d'être suivie pour évaluer  $T.a^nb^pc^q$ ,  $T.a^nb^pc^q$ , il est aisé de voir ce qu'il faudrait faire pour l'évaluation des fonctions à *quatre* lettres, à *cinq* lettres, etc.

310. Nous avons déjà observé (n° 305) que toute fonction symétrique rationnelle et entière des racines d'une équation n'est que le résultat de la réunion, par addition ou soustraction, des fonctions  $T.a^n$ ,  $T.a^nb^p$ ,  $T.a^nb^pc^q$ , ..., nous sommes donc en droit de conclure ce théorème, qui est un des plus beaux et des plus importans de l'Analyse algébrique : *Toute fonction symétrique rationnelle et entière des racines d'une équation peut, sans que l'on connaisse ses racines, être évaluée au moyen des coefficients de l'équation.*

N. B. Il en est de même d'une fonction symétrique rationnelle et fractionnaire; car, si l'on conçoit que tous les termes soient réduits au même dénominateur, on aura une seule expression fractionnaire, dont le numérateur devra, d'après le caractère distinctif d'une fonction symétrique (n° 303), être, ainsi que le dénominateur, une fonction symétrique rationnelle et entière; donc, en évaluant chacune de ces fonctions séparément, on obtiendra la valeur de la fonction proposée.

311. *Applications de la théorie des fonctions symétriques.*

La théorie des fonctions symétriques donne le moyen de résoudre cette question, que nous avons déjà traitée (n° 287) par le secours de l'élimination : Une équation, dont on ne connaît pas les racines, étant donnée, former une nouvelle équation qui ait pour racine une certaine combinaison de deux, trois, etc., quelconques des racines de la proposée.

Pour fixer les idées, supposons d'abord que l'on veuille former une équation dont les racines soient la somme de deux quelconques des racines de l'équation  $X = 0$ .

Soient  $a, b, c, d, \dots$  les racines de cette équation; celles de la nouvelle équation, que nous appellerons  $Z = 0$ , seront  $a + b, a + c, a + d, b + c, \dots$ , et leur nombre sera exprimé par le nombre de sommes ou de combinaisons différentes, deux à deux, que l'on peut faire avec les  $m$  lettres  $a, b, c, d, \dots$ , c'est-à-dire (n° 150) par  $\frac{m(m-1)}{2}$ ; ainsi ce nombre,  $\frac{m(m-1)}{2}$ , représente déjà le degré de l'équation.

Quant à la composition de ses coefficients, comme (n° 257) le coefficient du second terme est égal à la somme des racines prises en signes contraires, il a pour valeur

$$-(a+b) - (a+c) - (a+d), \dots,$$

expression dans laquelle  $a, b, c, \dots$  entrent toutes de la même manière; ainsi cette fonction symétrique rationnelle et entière peut s'exprimer au moyen des coefficients  $P, Q, R, \dots$  de la proposée.

On a de même, pour le coefficient du troisième terme, la somme des produits deux à deux des mêmes quantités, c'est-à-dire,  $(a+b)(a+c) + (a+b)(b+c) + (a+c)(b+c) + \dots$ , expression qui est encore symétrique en  $a, b, c, \dots$ , et peut par conséquent s'évaluer au moyen des coefficients  $P, Q, R, \dots$ ; même conclusion par rapport aux coefficients du 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, ... terme, et, en général, par rapport au coefficient de rang  $n+1$ , puisqu'il n'est autre chose, au signe près, que la somme des

produits  $n$  à  $n$  des quantités  $a + b$ ,  $a + c$ , ..., somme qui est nécessairement une fonction symétrique de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ...

Toute la difficulté consiste à mettre en évidence toutes ces fonctions symétriques, et à les évaluer d'après les formules établies précédemment; mais nous verrons bientôt un moyen plus simple d'évaluer ces coefficients.

On peut également former une équation dont les racines soient des combinaisons de la forme

$$a + b + kab, \quad a + c + kac, \quad a + d + kad, \dots,$$

$k$  étant un nombre connu et déterminé.

Le degré de cette nouvelle équation, que l'on peut encore désigner par  $Z = 0$ , est toujours marqué par  $m \cdot \frac{m-1}{2}$ ; et ses coefficients étant, au signe près, les sommes des produits, une à une, deux à deux, trois à trois..., des quantités  $a + b + kab$ ,  $a + c + kac$ , ..., sont nécessairement des fonctions symétriques rationnelles et entières des racines de la proposée.

312. Proposons-nous, pour seconde application, de former l'équation aux différences des racines d'une équation donnée, question qui a déjà été traitée par l'élimination.

Nous avons fait connaître (n° 290) la forme et le degré de cette équation. Soit  $m$  le degré de la proposée; celui de l'équation aux différences est exprimé par  $m(m-1)$ . De plus, elle est de degré pair, et ne renferme que des puissances de degré pair; en sorte que, si l'on pose dans cette équation  $u =$  et  $\frac{m(m-1)}{2} = n$ , l'équation prend la forme

$$z^n + P'z^{n-1} + Q'z^{n-2} + \dots + T'z + U' = 0 \dots (1);$$

et les racines de cette nouvelle équation sont les carrés des différences des racines de la proposée.

Les coefficients  $P'$ ,  $Q'$ , ...,  $T'$ ,  $U'$ , sont les mêmes que ceux de l'équation aux différences; mais elle est de degré sous-double, et, par cela même, plus simple à considérer.

Cela posé, si  $a, b, c, d, \dots$  sont les racines de la proposée, on a, pour celles de l'équation (1),

$$(a-b)^2, (a-c)^2, (b-c)^2, \dots;$$

donc, d'après la composition connue des équations, les coefficients  $P', Q', R', \dots$  sont, au signe près, pour quelques-uns, les sommes des produits 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ... des quantités

$$(a-b)^2, (a-c)^2, (b-c)^2, \dots;$$

c'est-à-dire que l'on a

$$-P' = (a-b)^2 + (a-c)^2 + \dots,$$

$$Q' = (a-b)^2(a-c)^2 + (a-b)^2(b-c)^2 + \dots$$

$$-R' = (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 + \dots$$

Or, toutes ces expressions sont des fonctions symétriques que l'on peut évaluer au moyen des coefficients  $P, Q, R, \dots$  de la proposée. Toutefois, si l'on effectuait ces développements, les diverses fonctions que l'on obtiendrait seraient des fonctions à une, deux, trois, etc., et en général à  $p$  lettres, en considérant le coefficient de rang  $p+1$ ; et ces coefficients s'évalueraient avec beaucoup de peine dans la pratique.

Mais il existe un moyen plus simple de calculer  $P', Q', R', \dots$

Les formules  $S_1 + P = 0, S_2 + PS_1 + 2Q = 0, \dots$ , obtenues n° 304, font connaître  $S_1, S_2, S_3, \dots$  en fonction de  $P, Q, R, \dots$

Réciproquement, si l'on connaissait à priori les sommes  $S_1, S_2, S_3, \dots$  des racines d'une équation, on pourrait calculer les coefficients  $P, Q, R, \dots$  d'après les mêmes formules; car elles donnent

$$P = -S_1, Q = \frac{-S_2 - PS_1}{2}, R = \frac{-S_3 - PS_2 - QS_1}{3}, \dots;$$

donc, si nous pouvions évaluer les sommes des puissances semblables des carrés des différences,  $(a-b)^2, (a-c)^2, \dots$ , nous obtiendrions facilement les valeurs de  $P', Q', R', \dots$

Or en appelant  $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$  les sommes des puissances semblables des racines de l'équation (3), on a

$$\begin{aligned} S_1 &= (a-b)^1 + (a-c)^1 + (a-d)^1 + \dots = (m-1)T.a^1 - 2T.ab, \\ S_2 &= (a-b)^2 + (a-c)^2 + \dots = (m-1)T.a^2 - 4T.a^2b + 6T.a^2b^2, \\ S_3 &= (a-b)^3 + (a-c)^3 + \dots = (m-1)T.a^3 - 6T.a^3b + 15T.a^3b^2 \\ &\quad - 20T.a^3b^3, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

*Explication de ce tableau.* Il est évident d'abord, que les développemens de  $S_1, S_2, S_3, \dots$  ne peuvent se composer que de fonctions symétriques à une ou deux lettres au plus; quant à la manière de les obtenir, on observera que dans chacun d'eux,  $a^2$  ou  $a^4$  ou  $a^6, \dots$  doit être répété autant de fois que l'on peut former de différences entre la racine  $a$  et toutes les autres, dont le nombre est  $m-1$ ; donc les fonctions  $T.a^2, T.a^4, T.a^6, \dots$  ont toutes  $m-1$  pour coefficient.

Les coefficients des autres fonctions sont d'ailleurs ceux des développemens des puissances  $(a-b)^2, (a-b)^4, (a-b)^6, \dots$ , depuis le second inclusivement jusqu'au coefficient du terme qui tient le milieu, aussi inclusivement. Enfin, les diverses parties sont alternativement positives et négatives, comme dans les développemens de  $(a-b)^2, (a-b)^4, \dots$

Le nombre des sommes  $S_1, S_2, S_3, \dots$  qu'il est nécessaire d'évaluer, est égal au nombre des coefficients  $P, Q, R, \dots$  de l'équation (3); par conséquent, la dernière somme est  $S_n$ .

Cela posé, voici la marche qu'il faut suivre dans la pratique, pour évaluer ces sommes :

On commence par calculer les sommes  $S_1, S_2, S_3, \dots$ , jusqu'à  $S_{n-1}$ , ou  $S_{m(m-1)}$  des racines de la proposée (1); puis, à l'aide des formules des nos 305 et 306, on évalue toutes les fonctions  $T.ab, T.a^2b, T.a^3b^2, \dots$ ; d'où l'on conclut les valeurs de  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{n-1}$ , et par suite, celles de  $P, Q, R, \dots, T, U$ .

313. Soit proposé de former l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation  $x^3 - 7x + 7 = 0$ .

Cette équation étant du 3<sup>e</sup> degré, on a  $m \frac{(m-1)}{2} = 3$  ;  
 ainsi l'équation cherchée est de la forme  $x^3 + P'x^2 + Q'x + R' = 0$  ;  
 c'est-à-dire qu'il y a trois coefficients à déterminer, et par consé-  
 quent, trois sommes  $S'_1, S'_2, S'_3$ , à calculer. Cela posé, on a

$$P = 0, Q = -7, R = 7,$$

d'où l'on déduit, tout calcul fait,

$$S_1 = 0, S_2 = 14, S_3 = -21, S_4 = 98, S_5 = -245, S_6 = 833,$$

$$T.a^2 = S_2 = 14, \quad T.a^6 = S_6 = 833,$$

$$T.ab = Q = -7, \quad T.a^5b = S_5S_1 - S_6 = -833,$$

$$T.a^4 = S_4 = 98, \quad T.a^4b^2 = S_4S_2 - S_6 = 539,$$

$$T.a^3b = S_4 - 98, \quad T.a^3b^3 = \frac{(S_3)^2 - S_6}{2} = -196;$$

$$T.a^2b^2 = \frac{(S_2)^2 - S_4}{2} = \frac{196 - 98}{2} = 49;$$

$$\text{donc } S'_1 = 2T.a^2 - 2T.ab = 42,$$

$$S'_2 = 2T.a^4 - 4T.a^3b + 6T.a^2b^2 = 882,$$

$$S'_3 = 2T.a^6 - 6T.a^5b + 15T.a^4b^2 - 20T.a^3b^3 = 18669,$$

ainsi, à cause des formules

$$S'_1 + P' = 0, S'_2 + P'S'_1 + 2Q' = 0, S'_3 + P'S'_2 + Q'S'_1 + 3R' = 0,$$

$$\text{on a } P' = -S'_1 = -42, Q' = \frac{-S'_2 - P'S'_1}{2} = 441,$$

$$R' = \frac{-S'_3 - P'S'_2 - Q'S'_1}{3} = -49.$$

Donc enfin, l'on obtient

$$x^3 - 42x^2 + 441x - 49 = 0,$$

pour l'équation aux carrés des différences des racines de l'équa-  
 tion  $x^3 - 7x + 7 = 0$ .

Nous engageons les commençans à traiter ce même exemple  
 par la méthode d'élimination, afin de comparer les deux mé-  
 thodes.



314. Cette méthode, pour déterminer les coefficients de l'équation aux carrés des différences, peut être également employée pour déterminer les coefficients de l'équation aux sommes des racines prises deux à deux,  $a+b$ ,  $a+c$ ,  $b+c$ .. (voy. n° 311).

Soit  $x^3 + Px^2 + Qx + R = 0$ , l'équation proposée; l'équation aux sommes  $a+b$ ,  $a+c$ ,  $b+c$ , serait de la forme  $z^3 + P'z^2 + Q'z + R' = 0$ ; et en appelant  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , les sommes des puissances semblables des racines de cette seconde équation, on aurait, pour déterminer  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , les formules

$$S_1 = (a+b) + (a+c) + (b+c) = 2(a+b+c) = 2S,$$

$$S_2 = (a+b)^2 + (a+c)^2 + (b+c)^2 = 2T.a^2 + 2T.ab,$$

$$S_3 = (a+b)^3 + (a+c)^3 + (b+c)^3 = 2T.a^3 + 3T.a^2b.$$

Après avoir calculé les sommes  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  de la proposée, on en déduirait les valeurs de  $T.a^2$ ,  $T.ab$ ,  $T.a^3$ ,  $T.a^2b$ , ce qui ferait connaître  $S'_1$ ,  $S'_2$ ,  $S'_3$ , et l'on obtiendrait enfin  $P'$ ,  $Q'$ ,  $R'$ , d'après les formules

$$S'_1 + P' = 0, \quad S'_2 + P'S'_1 + 2Q' = 0, \quad S'_3 + P'S'_2 + Q'S'_1 + 3R' = 0.$$

On opérerait d'une manière analogue, pour former une équation dont les racines fussent des combinaisons de celles de la proposée, de la forme  $a+b+kab$ ,  $a+c+kac$ ...; on aurait, pour une équation du  $m^{\text{ième}}$  degré,

$$S'_1 = (a+b+kab) + (a+c+kac) + \dots = (m-1)S_1 + kT.ab,$$

$$S'_2 = (a+b+kab)^2 + \dots = (m-1)T.a^2 + 2T.ab + 2kT.a^2b + k^2T.a^2b^2,$$

Nous proposerons les exercices suivants :

Déterminer, 1°. L'équation aux carrés des différences des racines de l'équation  $x^3 - 6x - 7 = 0$ .

(Résultat. ....  $z^3 - 36z^2 + 324z + 459 = 0$ .)

Cet exemple a été traité (n° 289) par la méthode d'élimination.

2°. L'équation des sommes deux à deux des racines de l'équation  $x^3 - 3x + 2 = 0$ .

(Résultat....  $z^3 - 3z - 2 = 0$ .)

3°. L'équation dont les racines soient des combinaisons, de la forme  $a + b + ab$ , des racines de l'équation

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0.$$

(Résultat.....  $z^3 + 10z^2 + 17z - 28 = 0$ .)

4°. L'équation dont les racines soient les sommes deux à deux des racines de l'équation  $x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 42x + 40 = 0$ .

(Résultat.....

$$z^6 - 18z^5 + 98z^4 - 96z^3 - 747z^2 + 2322z - 1944 = 0.)$$

315. Nous terminerons les applications de la théorie des fonctions symétriques par la démonstration d'un très beau théorème sur l'élimination.

Ce théorème, dû à Bezout, consiste en ce que le degré de l'équation finale, qui résulte de l'élimination de l'une des inconnues entre deux équations d'un degré quelconque à deux inconnues, ne peut être plus grand que le produit des degrés des deux équations; et il est justement égal à ce produit, lorsque les équations proposées sont les plus générales de leurs degrés.

Avant de développer cette démonstration; il est indispensable de faire connaître la composition d'une équation complète du même degré à deux inconnues, et la forme sous laquelle on peut toujours la mettre.

Déjà nous avons donné (n° 116) la composition d'une équation du second degré, et nous avons observé que l'on peut toujours la ramener à la forme d'une équation à une seule inconnue  $Mx^2 + Nx + P = 0$ ,  $M$  étant une quantité toute connue.

N un polynôme du premier degré en  $y$ , et P un polynôme du second degré.

En général, une équation à deux inconnues est dite du  $m^{\text{ième}}$  degré, lorsque le plus haut exposant de chaque inconnue étant  $m$ , la somme des exposants de ces deux inconnues dans un même terme, ne surpasse pas  $m$ . Il résulte évidemment de là que toute équation du degré  $m$  peut être ramenée à la forme :

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + \dots + Tx + U = 0,$$

A étant une quantité connue, numérique ou algébrique,

B un polynôme du 1<sup>er</sup> degré en  $y$ , tel que  $ay + b$ ,

C un polynôme du 2<sup>e</sup> degré  $\dots a'y^2 + b'y + c$ ,

D,  $\dots$  du 3<sup>e</sup> degré  $a''y^3 + b''y^2 + c''y + d$ ,

T  $\dots$  du  $m-1^{\text{ième}}$  degré  $gy^{m-1} + g'y^{m-2} + \dots$

U  $\dots$  du  $m^{\text{ième}}$  degré  $hy^m + h'y^{m-1} + \dots$

316. Cela posé, considérons les deux équations à deux inconnues

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0,$$

$$A'x^m + B'x^{m-1} + C'x^{m-2} + \dots + T'x + U' = 0,$$

que nous désignerons, pour abréger, par

$$\begin{cases} M = 0, \\ N = 0. \end{cases}$$

Concevons en outre, quoique nous n'en ayons pas encore les moyens, que la première équation soit résolue complètement par rapport à  $x$ , et donne les  $m$  valeurs  $x=a$ ,  $x=b$ ,  $x=c$ ,  $\dots$  ( $a, b, c, \dots$  étant des fonctions de  $y$ ) ; chacune de ces  $m$  valeurs de  $x$ , substituée dans l'équation  $M=0$ , doit la vérifier, quelque valeur que l'on attribue à  $y$ , après cette substitution.

D'un autre côté, si l'on substitue ces  $m$  valeurs successivement dans le premier membre de l'équation  $N = 0$ , on obtient les expressions

$$A'a^n + B'a^{n-1} + \dots, A'b^n + B'b^{n-1} + \dots, A'c^n + B'c^{n-1} + \dots,$$

qui sont, en général, des fonctions irrationnelles de  $y$ . Or, je dis que toute valeur,  $y = \zeta$ , qui rend nulle l'une de ces fonctions, est une valeur convenable (n° 282). En effet, supposons, par exemple, que  $\zeta$  rende nulle la fonction  $A'a^n + B'a^{n-1} + \dots$ , et désignons par  $x = a$ , ce que devient  $x = a$ , lorsqu'on remplace  $y$  par  $\zeta$  dans  $a$ ; le système ( $x = a$ ,  $y = \zeta$ ) vérifie évidemment  $M = 0$ , puisqu'on a déjà vu que  $x = a$  la vérifie, quel que soit  $y$ . En second lieu,  $y = \zeta$  rendant nulle la fonction  $A'a^n + B'a^{n-1} + \dots$ , qui n'est autre chose que le premier membre de  $N = 0$ , dans lequel on a mis  $a$  à la place de  $x$ , vérifie  $N = 0$  en même temps que  $x = a$ , valeur de  $a$ , qui correspond à  $y = \zeta$ . On voit donc que ( $x = a$ ,  $y = \zeta$ ) forme un système commun aux deux équations  $M = 0$  et  $N = 0$ ; ainsi,  $y = \zeta$  est une valeur convenable.

Réciproquement, toute valeur convenable de  $y$  doit anéantir l'une des fonctions ci-dessus. Car, pour être convenable, il faut qu'elle satisfasse aux deux équations en même temps qu'une certaine valeur de  $x$ ; or, toutes les valeurs de  $x$  convenables sont comprises dans  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $x = c, \dots$ ; et dès que l'on fait  $x = a$  ou  $x = b, \dots$  le premier membre de  $N = 0$  retombe dans l'une des fonctions ci-dessus, qui doit par conséquent s'évanouir par l'hypothèse  $y = \zeta$ .

On peut conclure de là que, si l'on égale à 0 le produit de toutes ces fonctions, l'équation qu'on obtiendra sera (sans aucun facteur étranger) l'équation finale résultant de l'élimination de  $x$  entre les deux équations proposées.

Cette équation finale est donc

$$(A'a^n + B'a^{n-1} + \dots + T'a + U')(A'b^n + B'b^{n-1} + \dots + T'b + U') \\ (A'c^n + B'c^{n-1} + \dots + T'c + U') \dots = 0 \dots (Y).$$

Sa formation semble reposer sur la résolution complète de l'équation  $M=0$ , par rapport à  $x$ ; mais nous allons voir que cela n'est pas nécessaire; et nous reconnaitrons, dans ce qui vient d'être dit, une nouvelle *méthode d'élimination*.

Remarquons d'abord que l'équation (Y) ne change pas, quelque permutation que l'on fasse entre les racines  $a, b, c, \dots$ ; ainsi le premier membre est (n° 303) une fonction symétrique rationnelle et entière des racines de l'équation  $M=0$ , résolue par rapport à  $x$ . Donc, en vertu du théorème n° 310, ce premier membre peut être exprimé au moyen des coefficients  $A, B, C, \dots$  de l'équation  $M=0$ ; et il est possible de former l'équation (Y), sans que l'on soit obligé de résoudre d'abord l'équation  $M=0$ .

Cette méthode, qui est assez simple pour deux équations du second degré, devient très laborieuse, lorsqu'on veut l'appliquer à des équations d'un degré plus élevé. Elle a toutefois, sur la méthode exposée n° 284, et sur plusieurs autres, l'avantage de conduire toujours à la véritable équation finale, sans l'introduction d'aucun facteur étranger.

Mais ici notre principal objet est de démontrer le théorème sur le degré de l'équation finale.

317. Pour déterminer le degré en  $y$  de l'équation (Y), il suffit de considérer un terme de rang quelconque. Or, chaque terme de ce produit se forme de la multiplication d'un terme du premier facteur, par un terme du second, par un terme du troisième...; soient  $Ka^i, Kb^{i'}, Kc^{i''}, \dots$ , des termes pris au hasard dans chacun des  $m$  facteurs; le terme correspondant du produit sera

$$K.K'.K'' \dots \times a^i b^{i'} c^{i''} \dots$$

d'ailleurs, le produit total est symétrique en  $a, b, c, \dots$ ; donc, ce terme fait partie d'une des fonctions symétriques qui entrent dans la composition de (Y); et cette fonction partielle peut elle-même être représentée (n° 305) par

$$K.K'.K'' \dots \times T a^i b^{i'} c^{i''} \dots$$

Il suffit donc de déterminer le plus haut degré en  $y$  de cette fonction.

Si l'on se rappelle la composition des formules qui donnent  $S_1, S_2, S_3, \dots$  (n° 304), et que l'on ait égard aux degrés en  $y$  des coefficients  $A, B, C, \dots$  de l'équation  $M = 0$  (n° 315), on verra que  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$ , sont du 1<sup>er</sup>, 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, ..., et en général, du degré  $k$  en  $y$ . Donc,  $S_1 \times S_2 \times S_3 \dots$  est d'un degré marqué par  $h + h' + h'' + \dots$ ; et d'après les formules du n° 308, qui donnent l'expression d'une fonction symétrique quelconque,  $Ta^h b^{h'} c^{h''} \dots$  est aussi du degré  $h + h' + h'' \dots$  et ne peut surpasser ce degré.

D'un autre côté, soient  $k, k', k'' \dots$  les exposans de  $y$  dans les coefficients  $K, K', K'' \dots$ ; la somme des exposans du produit  $K.K'.K'' \dots$  est  $k + k' + k'' + \dots$ . Ainsi, dans la fonction  $K.K'.K'' \dots \times Ta^h b^{h'} c^{h''} \dots$ , la somme des exposans est  $k + k' + k'' + \dots + h + h' + h'' + \dots$ ; mais, d'après la composition de l'équation  $N = 0$ , l'on a tout au plus,

$$k + h = n, k' + h' = n, k'' + h'' = n, \dots$$

Donc enfin, la fonction symétrique ci-dessus est tout au plus d'un degré marqué par  $n + n + n + \dots$ , ou  $m \times n$ . C. Q. F. D.

N. B. L'équation aux différences étant (n° 288) le résultat de l'élimination de  $x$  entre les équations

$$X = 0,$$

$$Y + \frac{Z}{2} u + \frac{V}{2.3} u^2 + \dots + u^{m-1} = 0,$$

dont la première est du degré  $m$  en  $x$ , et la seconde du degré  $m-1$  en  $x$  et  $u$ , il s'ensuit que cette équation finale doit être du degré  $m(m-1)$ ; et c'est en effet ce qui a été reconnu (n° 290).

Le théorème précédent est également applicable à un nombre  $m$  d'équations renfermant un pareil nombre d'inconnues. (Voy., pour sa démonstration, un *Mémoire de M. Poisson*, XI<sup>e</sup> cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, page 199.)

## CHAPITRE VIII.

*Résolution des Équations numériques à une ou plusieurs inconnues.*

LES principes que nous avons établis dans le chapitre précédent sont applicables à toutes les équations, de quelque nature que soient leurs coefficients, c'est-à-dire qu'ils soient numériques ou algébriques; et ces principes doivent être regardés comme les élémens des méthodes qui ont été employées pour résoudre les équations de degré supérieur.

Nous avons déjà dit que les analystes ne sont parvenus jusqu'à présent qu'à la résolution des équations générales du troisième et du quatrième degrés. Les formules qu'ils ont obtenues pour les valeurs des inconnues, sont si compliquées et d'un usage si peu commode, lorsque toutefois on peut les appliquer (ce qui n'est pas toujours possible), que l'on doit regarder le problème de la résolution des équations algébriques d'un degré quelconque, comme plus curieux qu'utile. Aussi les analystes ont-ils dirigé principalement leurs recherches vers la résolution des *équations numériques*, c'est-à-dire de celles qui proviennent de la traduction algébrique d'un problème dont les données sont des nombres particuliers; et ils ont trouvé des méthodes au moyen desquelles, *une équation numérique d'un degré quelconque étant donnée*, on peut toujours déterminer les racines qu'elle renferme.

C'est l'ensemble de ces méthodes que nous nous proposons de développer dans la première partie de ce chapitre.

La seconde aura pour objet le complément de l'élimination, ou la résolution des équations numériques à plusieurs inconnues.

[Pour la généralité de nos raisonnemens, nous représenterons encore l'équation proposée par  $x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \dots = 0$ ; mais les lettres P, Q, ... seront censées désigner des nombres particuliers et des quantités réelles positives et négatives.]

### § 1<sup>re</sup>. Principes fondamentaux. Limites des racines.

318. PREMIER PRINCIPLE. Si deux nombres  $p$  et  $q$ , substitués à la place de  $x$  dans une équation numérique, donnent deux résultats de signes contraires, ces deux nombres comprennent au moins une racine réelle de la proposée.

$$\text{Soit } x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \dots + Tx + U = 0$$

L'équation proposée. Son premier membre renfermant en général des termes positifs et des termes négatifs, désignons par A l'ensemble des termes positifs, et par  $-B$  l'ensemble des termes négatifs; l'équation prend alors la forme

$$A - B = 0.$$

Soit en outre  $p < q$ , et admettons que  $p$ , substitué à la place de  $x$ , donnant un résultat négatif,  $q$  donne un résultat positif.

Cela posé, puisque le premier membre devient négatif par la substitution de  $p$ , et positif par la substitution de  $q$ , il s'ensuit que l'on a, dans le premier cas,  $A < B$ , et dans le second,  $A > B$ . Or, il résulte de la nature des quantités A et B, qui ne contiennent que des nombres absolus et des puissances entières et positives de  $x$ , que ces quantités croissent l'une et l'autre à mesure que  $x$  augmente; et si l'on conçoit que  $x$  croisse d'une manière continue, depuis  $p$  jusqu'à  $q$ , A et B croîtront aussi d'une manière continue. (\*) Cependant, puisque A, par hypothèse, de plus petit qu'il était que B, devient ensuite plus grand, il faut nécessairement que A ait un accroissement plus rapide que B, qui détruit insensi-

(\*) La continuité dans les nombres n'est qu'une chose idéale; et l'on ne peut la rendre sensible qu'en Géométrie.



blement l'excès que B avait sur A, et finisse par produire un excès en sens contraire. On sent, d'après cela, que du passage de  $A < B$  à  $A > B$ , il doit y avoir un point intermédiaire où A devient égal à B, et le nombre substitué qui correspond à cette circonstance, est racine de l'équation, puisqu'il vérifie  $A - B = 0$ , ou la proposée. Donc, si deux nombres, etc.

Dans la démonstration précédente, nous avons supposé que  $p$  et  $q$  soient deux nombres absolus; mais la proposition n'en est pas moins vraie, dans l'hypothèse où  $p$  et  $q$  sont de signes quelconques.

Pour le prouver, remarquons d'abord que les raisonnemens ci-dessus s'appliquent également au cas où l'un des nombres  $p$  et  $q$ ,  $p$ , par exemple, serait 0; c'est-à-dire qu'on prouverait, dans ce cas, qu'il y a au moins une racine entre 0 et  $q$ .

Cela posé, soient d'abord  $p$  et  $q$  tous deux négatifs, et représentés par  $-p'$  et  $-q'$ .

Si, dans l'équation  $x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \dots + Tx + U = 0$ , on change  $x$  en  $-y$ , ce qui donne pour la transformée

$$(-y)^n + P(-y)^{n-1} + Q(-y)^{n-2} + \dots + T(-y) + U = 0,$$

il est évident que substituer  $-p'$  et  $-q'$  dans la proposée, revient à substituer  $p'$  et  $q'$  dans la transformée; car les résultats de ces substitutions sont toujours

$$(-p')^n + P(-p')^{n-1} + \dots + T(-p') + U,$$

$$\text{et } (-q')^n + P(-q')^{n-1} + \dots + T(-q') + U;$$

or, puisque  $p$  et  $q$ , ou  $-p'$  et  $-q'$ , substituées dans la proposée, donnent deux résultats de signes contraires, il s'ensuit que les nombres absolus  $p'$  et  $q'$ , substitués dans la transformée, donnent aussi deux résultats de signes contraires; ainsi, en vertu de la première partie de la proposition, les deux nombres  $p'$  et  $q'$  comprennent au moins une racine réelle de la transformée; et à cause de la relation  $x = -y$ , les quantités  $-p'$  et  $-q'$ , ou  $p$  et  $q$ , comprennent elles-mêmes au moins une valeur

de  $x$ . Cette démonstration s'appliquerait encore au cas où l'on aurait  $p = 0$  ou  $q = 0$ .

Supposons enfin  $p$  positif et  $q$  négatif ou égal à  $-q'$ ; si l'on fait  $x = 0$  dans l'équation, le premier membre se réduit à son dernier terme, qui est nécessairement de signe différent de celui que donne, soit  $p$ , soit  $-q'$ ; d'où l'on peut conclure qu'il y a une racine comprise entre 0 et  $p$ , ou bien entre 0 et  $-q'$ , et, par conséquent, entre  $p$  et  $-q$  (n° 63).

319. SECOND PRINCIPLE. De ce que deux nombres substitués à la place de  $x$ , dans une équation, donnent deux résultats de signes contraires, on est en droit de conclure qu'ils comprennent au moins une racine réelle; mais on ne peut pas assurer qu'ils n'en comprennent qu'une seule, et ils peuvent en comprendre un nombre impair quelconque. Ceci résulte d'une nouvelle proposition que nous allons démontrer, et qui consiste en ce que, si deux nombres comprennent un nombre impair quelconque  $2n + 1$  de racines réelles, les résultats de leur substitution à la place de  $x$  sont de signes contraires; et s'ils en comprennent un nombre pair quelconque  $2n$ , les résultats de leur substitution sont nécessairement de même signe.

Pour mettre cette proposition dans tout son jour, désignons par  $a, b, c, \dots$  celles des racines de l'équation proposée  $X = 0$ , que l'on suppose comprises entre deux nombres donnés  $p$  et  $q$ , de signes quelconques, et par  $Y$  le produit des facteurs du premier degré en  $x$ , correspondant aux racines réelles non comprises et aux racines imaginaires.

Le premier membre  $X$  de l'équation peut se mettre sous la forme

$$(x - a)(x - b)(x - c) \dots \times Y.$$

Substituons maintenant, dans le produit précédent,  $p$  et  $q$  à la place de  $x$ ; on obtient les deux résultats

$$(p - a)(p - b)(p - c) \dots \times Y',$$

$$(q - a)(q - b)(q - c) \dots \times Y'',$$

$Y'$  et  $Y''$  désignant ce que devient  $Y$ , lorsqu'on y remplace  $x$  par

$p$  et  $q$ ; ces deux quantités  $Y'$  et  $Y''$  sont nécessairement de même signe, puisque autrement, en vertu du premier principe,  $Y=0$  aurait encore au moins une racine réelle comprise entre  $p$  et  $q$ , ce qui serait contre l'hypothèse.

Cela posé, pour déterminer plus facilement les signes des deux résultats ci-dessus, divisons le premier par le second; on obtient  $\frac{(p-a)(p-b)(p-c)\dots \times Y'}{(q-a)(q-b)(q-c)\dots \times Y''}$ , quotient que

l'on peut écrire ainsi:  $\frac{p-a}{q-a} \times \frac{p-b}{q-b} \times \frac{p-c}{q-c} \times \dots \times \frac{Y'}{Y''}$ .

Mais  $p$  et  $q$  comprenant les racines  $a, b, c, d, \dots$ , on a nécessairement

$$p > a, b, c, d, \dots,$$

et

$$q < a, b, c, d, \dots;$$

d'où l'on déduit  $p-a, p-b, p-c, \dots > 0$ ,

et  $q-a, q-b, q-c, \dots < 0$ ;

done, puisque  $p-a$  et  $q-a$  sont de signes contraires, ainsi que  $p-b$  et  $q-b$ ,  $p-c$  et  $q-c, \dots$ , les quotiens partiels  $\frac{p-a}{q-a}, \frac{p-b}{q-b}, \frac{p-c}{q-c}, \dots$  sont tous négatifs; d'ailleurs  $\frac{Y'}{Y''}$  est essentiellement positif, puisque  $Y'$  et  $Y''$  sont de même signe; ainsi, le produit  $\frac{p-a}{q-a} \times \frac{p-b}{q-b} \times \frac{p-c}{q-c} \times \dots \times \frac{Y'}{Y''}$ , sera négatif, si les racines comprises  $a, b, c, \dots$  sont en nombre impair, et positif, si elles sont en nombre pair.

Donc enfin, les deux résultats  $(p-a)(p-b)(p-c)\dots \times Y'$  et  $(q-a)(q-b)(q-c)\dots \times Y''$ , seront de signes contraires ou de même signe, suivant que les racines comprises entre  $p$  et  $q$  seront en nombre impair ou en nombre pair.

Conséquence. On déduit nécessairement de cette proposi-

tion, que, si deux nombres substitués à la place de  $x$ , dans une équation, donnent deux résultats de signes contraires, ils comprennent au moins une racine, mais ils peuvent aussi en comprendre un nombre impair quelconque; et s'ils donnent deux résultats de même signe, ou ils ne comprennent pas de racines, ou bien, ils en comprennent un nombre pair quelconque.

• *Limites des Racines réelles des équations.*

320. Les diverses méthodes de la résolution des équations numériques consistent généralement à substituer des nombres particuliers dans la proposée, pour reconnaître si ces nombres la vérifient, ou bien, s'ils comprennent des racines. Mais pour peu qu'on réfléchisse sur la composition du premier membre d'une équation, on sent que, son premier terme étant positif et affecté de la plus haute puissance de  $x$ , puissance d'autant plus grande, par rapport à celles de degré inférieur, que  $x$  est plus considérable; on sent, dis-je, qu'il doit exister des nombres au-dessus desquels toute substitution devient inutile, parce que ces nombres donneraient des résultats constamment positifs et différens de 0.

On appelle *limite supérieure* des racines positives d'une équation, tout nombre qui surpasse la plus grande des racines positives de cette équation.

Il résulte de cette définition que la limite est susceptible d'une infinité de valeurs; car dès qu'un nombre est reconnu supérieur à la plus grande racine positive, tout nombre plus grand jouit à plus forte raison de cette propriété; mais alors, on doit se proposer de déterminer la limite la plus petite possible: or, on est certain d'avoir une limite, dès que l'on a obtenu un nombre qui, substitué à la place de  $x$ , rend le premier membre positif, et qui est tel en même temps, que tout autre nombre plus grand donne aussi un résultat positif.

Occupons-nous donc de la détermination d'un nombre qui jouisse de cette double propriété.

321. Avant de résoudre cette question, nous nous en proposerons d'abord une plus simple; elle consiste à *déterminer un nombre qui, substitué à la place de  $x$  dans une équation, rende le premier terme  $x^m$  plus grand, à lui seul, que la somme ARITHMÉTIQUE de tous les autres.*

Supposons que tous les termes de l'équation soient négatifs, à partir du second, en sorte que l'on ait

$$x^m - Px^{m-1} - Qx^{m-2} - \dots - Tx - U = 0;$$

il s'agit de trouver pour  $x$  un nombre qui rende

$$x^m > Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U.$$

Désignons par  $k$  le plus grand de tous les coefficients, et remplaçons ces coefficients par celui-là, l'inégalité devient

$$x^m > kx^{m-1} + kx^{m-2} + \dots + kx + k;$$

il est évident que tout nombre mis pour  $x$ , qui satisfera à cette nouvelle condition, satisfera à plus forte raison à la précédente; car cette inégalité revient, en divisant par  $x^m$ , à

$$1 > \frac{k}{x} + \frac{k}{x^2} + \frac{k}{x^3} + \dots + \frac{k}{x^{m-1}} + \frac{k}{x^m}.$$

Cela posé, si l'on fait d'abord  $x = k$  dans celle-ci, le second membre se réduit à  $\frac{k}{k}$  ou 1, plus une suite de fractions positives; ainsi le nombre  $k$  ne satisfait pas à l'inégalité.

Mais si l'on pose  $x = k + 1$ , on obtient, pour ce second membre, la suite des fractions

$$\frac{k}{k+1} + \frac{k}{(k+1)^2} + \frac{k}{(k+1)^3} + \dots + \frac{k}{(k+1)^{m-1}} + \frac{k}{(k+1)^m},$$

qui, considérée dans un ordre inverse, n'est autre chose qu'une progression géométrique croissante, dont le premier terme

est  $\frac{k}{(k+1)^n}$ , la raison  $k+1$ , et le dernier terme  $\frac{k}{k+1}$ ; la somme de tous les termes de cette suite a donc (n° 201) pour valeur,

$$\frac{\frac{k}{k+1} \cdot (k+1) - \frac{k}{(k+1)^n}}{k+1-1}, \text{ ou bien, } 1 - \frac{1}{(k+1)^n},$$

quantité évidemment plus petite que l'unité.

Tout autre nombre  $> k+1$ , mis à la place de  $x$ , rendrait la somme des fractions,  $\frac{k}{x} + \frac{k}{x^2} + \dots$ , plus petite.

Ainsi  $k+1$ , ou le plus grand coefficient de l'équation, augmenté de l'unité, et tout nombre supérieur à  $k+1$ , jouissent de la propriété de rendre le premier terme  $x^m$  plus grand, à lui seul, que la somme arithmétique de tous les autres.

322. *Limite ordinaire des racines positives.* Le nombre que l'on vient d'obtenir peut être considéré comme une première limite, puisque ce nombre, ou tout autre nombre plus grand, rendant le premier terme supérieur à la somme de tous les autres, les résultats des substitutions de ces nombres à la place de  $x$ , doivent être constamment positifs; mais cette limite est ordinairement beaucoup trop grande, parce qu'en général, l'équation renferme plusieurs termes positifs. Cherchons donc une limite qui puisse convenir à toutes les équations.

Désignons par  $x^{m-n}$  la puissance de  $x$  correspondante au premier terme négatif qui vient après le terme  $x^m$ , et considérons le cas qui est évidemment le plus défavorable (mais c'est le plus commode), celui où les termes sont négatifs, à partir de  $x^{m-n}$ , et affectés du plus grand des coefficients négatifs qui entrent dans l'équation.

Soit  $S$  ce coefficient; tâchons d'abord de satisfaire à la condition

$$x^m > Sx^{m-n} + Sx^{m-n-1} + \dots + Sx + S,$$

ou, divisant les deux membres de cette inégalité par  $x^n$ ,

$$1 > \frac{S}{x^2} + \frac{S}{x^{n+1}} + \frac{S}{x^{n+2}} + \dots + \frac{S}{x^{n-1}} + \frac{S}{x^n}.$$

Posons d'abord  $x^n = S$ , ou  $x = \sqrt[n]{S}$ ; on trouve pour le second membre,  $\frac{S}{S}$  ou 1, plus une suite de fractions positives; mais si

l'on fait  $x = \sqrt[n]{S} + 1$ , ou bien,  $x = S' + 1$  (en posant, pour plus de simplicité,  $\sqrt[n]{S} = S'$ , d'où  $S = S'^n$ ), il vient, pour ce second membre,

$$\frac{S'^n}{(S' + 1)^2} + \frac{S'^n}{(S' + 1)^{n+1}} + \dots + \frac{S'^n}{(S' + 1)^{n-1}} + \frac{S'^n}{(S' + 1)^n},$$

série qui n'est autre chose qu'une progression par quotient, dont le premier terme est  $\frac{S'^n}{(S' + 1)^2}$ , la raison  $S' + 1$ , et le dernier terme  $\frac{S'^n}{(S' + 1)^n}$ . La somme de toutes ces fractions a donc pour expression (n° 201),

$$\frac{\frac{S'^n}{(S' + 1)^2} \cdot (S' + 1) - \frac{S'^n}{(S' + 1)^n}}{S' + 1 - 1} = \frac{S'^{n-1}}{(S' + 1)^{n-1}} - \frac{S'^{n-1}}{(S' + 1)^n},$$

quantité évidemment plus petite que 1.

D'ailleurs tout nombre  $> \sqrt[n]{S} + 1$  ou  $\sqrt[n]{S} + 1$ , mis à la place de  $x$ , rendrait la somme des fractions  $\frac{S}{x^2} + \frac{S}{x^{n+1}} + \dots$  plus petite, puisque, les numérateurs restant les mêmes, les dénominateurs augmenteraient. Donc  $\sqrt[n]{S} + 1$ , et tout autre nombre plus grand, jouissent de la propriété de rendre le premier terme  $x^n$  supérieur à la somme arithmétique des seuls termes qui soient négatifs dans l'équation, et par consé-

quent, de donner pour le premier membre, des résultats constamment positifs.

Donc enfin,  $\sqrt[n]{S+1}$ , ou l'unité augmentée de la racine du plus grand coefficient négatif, racine d'un degré marqué par le nombre des termes qui précèdent le premier terme négatif, est la limite supérieure des racines positives de l'équation.

Soit  $n=1$ , auquel cas le premier terme négatif est le second terme de l'équation; la limite devient  $\sqrt{S+1}$ , ou  $S+1$ ; c'est-à-dire le plus grand coefficient négatif, augmenté de l'unité; c'est la limite la plus usitée.

Soit  $n=2$ , auquel cas les deux premiers termes sont positifs, ou le terme en  $x^{n-1}$  manque dans l'équation; la limite est alors  $\sqrt[n]{S+1}$ .

Soit  $n=3$ ; on trouve pour la limite,  $\sqrt[3]{S+1}$ .

On demande, par exemple, la limite supérieure des racines positives des équations

$$x^4 - 5x^3 + 37x^2 - 3x + 39 = 0; \quad \sqrt[4]{S+1} = \sqrt[4]{3} + 1 = 6;$$

$$x^3 + 7x^2 - 12x^2 - 49x^2 + 52x - 13 = 0; \quad \sqrt[3]{S+1} = \sqrt[3]{49} + 1 = 8,$$

$$x^4 + 11x^3 - 25x^2 - 67 = 0; \quad \sqrt[4]{S+1} = \sqrt[4]{67} + 1 = 6;$$

$$3x^3 - 2x^2 - 11x + 4 = 0; \quad \sqrt[3]{S+1} = \sqrt[3]{\frac{11}{3}} + 1 = 5.$$

(Ici le plus grand coefficient négatif est  $-\frac{11}{3}$ , parce qu'il faut d'abord diviser par le coefficient de  $x^3$ .)

323. Souvent, au moyen d'une transformation exécutée sur l'équation, on obtient une limite plus petite que  $\sqrt[n]{S+1}$ .

Soit, par exemple, la première des équations ci-dessus, on peut la mettre sous la forme  $x^3(x-5) + 37x\left(x-\frac{3}{37}\right) + 39 = 0$ .



Or, il est visible qu'en mettant 5 ou tout autre nombre plus grand pour  $x$ , on obtiendrait un résultat constamment positif; donc 5 est une limite, tandis que l'on a trouvé 6, d'après la formule  $\sqrt[3]{S} + 1$ .

De même, la seconde équation revient à

$$x^3(x^3 - 49) + 7\left(x - \frac{12}{7}\right) + 52\left(x - \frac{1}{4}\right) = 0;$$

(en réunissant le premier et le quatrième terme, le second et le

troisième, etc.); or, il est évident que  $x = \sqrt[3]{49}$ , c'est-à-dire, 4 ou tout autre nombre plus grand, donnerait un résultat positif. L'artifice de cette méthode, qui ne peut s'appliquer qu'à certaines équations, consiste à décomposer le premier membre en plusieurs parties composées chacune de deux facteurs, dont le premier soit un monome positif, et l'autre un binome en  $x$  dont le second terme soit numérique et négatif, puis à déterminer  $x$  de manière que tous les facteurs entre parenthèses soient positifs.

Elle est rarement applicable à des équations renfermant plusieurs termes consécutifs affectés du signe —.

Par exemple, on ne peut l'appliquer à une équation telle que

$$x^5 - 5x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 69 = 0.$$

324. *Méthode de Newton pour déterminer la limite la plus petite possible.* Nous ferons encore connaître un autre moyen de déterminer la limite, qui a l'avantage de donner la limite la plus petite possible (en nombres entiers).

Soit  $X = 0$  l'équation proposée; si l'on fait dans cette équation,  $x = x' + u$ ,  $x'$  étant une indéterminée, on obtient (n° 278)

la transformée  $\bar{X}' + Y'u + \frac{Z'}{2}u^2 + \dots + u^m = 0$ . (On connaît

d'ailleurs la loi de formation des coefficients  $\bar{X}'$ ,  $Y'$ ,  $\frac{Z'}{2}$ , etc.).

Cela posé, concevons que, par des essais successifs, on soit parvenu à déterminer pour  $x'$  un nombre qui, substitué dans

$X', Y', \frac{Z'}{2}, \dots$ , rende tous ces coefficients positifs à la fois; je dis que ce nombre est *supérieur à la plus grande racine positive de l'équation*  $X=0$ .

En effet, les coefficients de la transformée étant tous positifs, aucun nombre absolu ne peut vérifier cette équation; ainsi les valeurs réelles de  $u$  doivent être *toutes négatives*; mais de l'équation  $x=x'+u$ , on tire  $u=x-x'$ ; et pour que les valeurs de  $u$  correspondantes à chaque valeur de  $x$  et à la valeur de  $x'$  (déjà déterminée), soient négatives, il faut absolument que la plus grande valeur positive de  $x$  soit moindre que la valeur de  $x'$ ; ce qu'il fallait démontrer.

Voici d'ailleurs la manière d'appliquer la méthode:

Soit l'équation  $x^4 - 5x^3 - 6x^2 - 19x + 7 = 0$ .

Comme  $x'$  est un signe indéterminé, on peut conserver la lettre  $x$  dans la formation des polynomes dérivés, et l'on a

$$\begin{aligned} X &= x^4 - 5x^3 - 6x^2 - 19x + 7, \\ Y &= 4x^3 - 15x^2 - 12x - 19, \\ \frac{Z}{2} &= 6x^2 - 15x - 6, \\ \frac{V}{2.3} &= 4x - 5. \end{aligned}$$

La question est, comme on vient de le voir, ramenée à trouver pour  $x$  un nombre (le plus petit possible) qui rende tous ces polynomes positifs.

Commençons par le polynome du premier degré; il est visible que 2 ou tout autre nombre  $> 2$ , le rend positif.

2, substitué dans le polynome du second degré, donne un résultat négatif; mais 3 ou tout nombre  $> 3$ , donne un résultat positif.

3 et 4, substitués dans le polynome du troisième degré, donnent un résultat négatif; mais 5 donne un résultat positif, et il en serait de même de tout autre nombre plus grand.

Enfin 5, substitué dans  $X$ , donne un résultat négatif, et il

en est de même de 6; car les trois premiers termes . . . . .  
 $x^4 - 5x^3 - 6x^2$  reviennent à  $x^3(x-5) - 6x^2$ , expression qui  
 se réduit à 0; dès que l'on fait  $x=6$ ; mais  $x=7$  donne évi-  
 demment un résultat positif.

Donc 7 est une limite supérieure des racines positives de la  
 proposée; c'est d'ailleurs, en nombres entiers, la limite la plus  
 petite, puisqu'on vient de reconnaître que 6 donnait un résultat  
 négatif; d'où il suit (n° 318), qu'il y a au moins une racine com-  
 prise entre 6 et 7.

En appliquant la méthode à l'équation

$$x^5 - 3x^4 - 8x^3 - 25x^2 + 4x - 39 = 0,$$

on trouverait 6 pour la limite supérieure.

On obtiendrait de même 7 pour la limite supérieure des ra-  
 cines positives de l'équation  $x^5 - 5x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 69 = 0$ .

N. B. Cette méthode n'est guère d'usage que dans la recherche  
 des racines incommensurables.

325. Il nous reste maintenant à déterminer la limite supé-  
 rieure des racines négatives, et les limites inférieures des racines  
 soit positives, soit négatives.

Dorénavant, nous désignerons par la lettre L la limite supé-  
 rieure des racines positives d'une équation, de quelque manière  
 qu'on l'ait obtenue.

1°. Si dans l'équation  $X=0$ , on fait  $x=-y$ , ce qui donne  
 la transformée  $Y=0$ , il est clair que les racines positives de  
 cette nouvelle équation, étant prises avec le signe —, donneront  
 les racines négatives de la proposée; donc en déterminant, par  
 les moyens connus, la limite supérieure L' des racines positives  
 de la transformée, on aura — L' pour la limite supérieure (nu-  
 mériquement) des racines négatives de la proposée.

2°. Si dans l'équation  $X=0$ , on fait  $x=\frac{1}{y}$ , ce qui donne  
 une transformée  $Y=0$  (que l'on forme en renversant l'ordre  
 des termes de la proposée et divisant tous les termes par le

dernier), il résulte de la relation  $x = \frac{1}{y}$ , qu'aux plus grandes valeurs positives de  $y$  correspondent les plus petites de  $x$ ; donc, en désignant par  $L^*$  la limite supérieure des racines positives de la transformée, on aura  $\frac{1}{L^*}$  pour la limite inférieure des racines positives de la proposée.

3°. Enfin, si dans la proposée, on remplace  $x$  par  $-\frac{1}{y}$ , et qu'on cherche la limite supérieure  $L^*$  des racines positives de la transformée  $Y = 0$ ,  $-\frac{1}{L^*}$  sera la limite inférieure (numériquement) des racines négatives de la proposée.

326. Nous terminerons la théorie des limites par quelques observations utiles dans la recherche de ces limites.

Premièrement, toute équation qui n'a que des permanences de signe, c'est-à-dire dont tous les termes sont positifs, ne peut avoir pour racines réelles que des nombres négatifs; car tout nombre positif mis à la place de  $x$  rendrait le premier membre essentiellement positif.

En second lieu, toute équation complète, dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, c'est-à-dire qui n'a que des variations de signe, ne peut avoir pour racines réelles que des nombres positifs; car il est aisé de reconnaître que tout nombre négatif mis à la place de  $x$  dans la proposée, rend tous les termes positifs, si l'équation est de degré pair, et tous les termes négatifs, si l'équation est de degré impair. Donc, dans aucun cas, la somme des termes ne peut devenir nulle.

Il en est de même de toute équation incomplète, telle que, si l'on change  $x$  en  $-\frac{1}{y}$ , il en résulte une transformée qui n'a que des permanences.

*Conséquences déduites des principes précédens.*

Le principe fondamental de la résolution des équations numériques, et ceux que nous venons d'établir sur les limites, ont conduit les géomètres à des conséquences très importantes.

327. Première conséquence. *Toute équation de degré impair dont les coefficients sont réels, a au moins une racine réelle de signe contraire à son dernier terme.*

En effet, soit  $x^m + Px^{m-1} + \dots + Tx \pm U = 0$ , l'équation proposée; et considérons d'abord le cas où le dernier terme est négatif.

Si l'on fait  $x = 0$  dans l'équation, le premier membre se réduit à  $-U$ . D'un autre côté, substituons à la place de  $x$ ,  $K + 1$ , ou (n° 321) le plus grand coefficient de l'équation, augmenté de l'unité; comme, par cette substitution, le premier terme  $x^m$ , est à lui seul plus grand que la somme arithmétique de tous les autres termes, il s'ensuit que le résultat de la substitution est positif; donc, en vertu du principe (n° 318), il y a au moins une racine comprise entre 0 et  $K + 1$ , laquelle racine est positive, et par conséquent de signe contraire au dernier terme.

Supposons actuellement le dernier terme positif.

En faisant toujours  $x = 0$ , on trouve pour résultat  $+U$ ; mais en mettant pour  $x$ ,  $-(K + 1)$ , on obtiendra un résultat nécessairement négatif, puisque le premier terme  $x^m$  devient négatif par cette substitution, et donne son signe à toute l'expression; donc l'équation a au moins une racine comprise entre 0 et  $-(K + 1)$ , c'est à dire négative ou de signe contraire au dernier terme.

Seconde conséquence. *Toute équation de degré pair, à coefficients réels, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative.*

En effet, soit  $-U$  son dernier terme; en faisant  $x = 0$ , on trouve pour résultat  $-U$ . Substituons ensuite, soit  $K + 1$ ,

soit  $-(K+1)$ ,  $K$  étant toujours (n° 321) le plus grand coefficient de l'équation : comme  $m$  est pair, le premier terme  $x^m$  restera positif; d'ailleurs il devient plus grand, par ces substitutions, que la somme de tous les autres; donc les résultats des deux substitutions sont l'un et l'autre positifs, ou de signe contraire à celui que donne l'hypothèse  $x=0$ ; ainsi l'équation a au moins deux racines réelles, l'une comprise entre 0 et  $K+1$ , ou positive, et l'autre comprise entre 0 et  $-(K+1)$ , ou négative.

*N. B.* On ne peut rien conclure pour toute équation de degré pair dont le dernier terme est positif; et même il est aisé de former des équations qui n'aient que des racines imaginaires; il suffit, pour cela, de multiplier entre eux plusieurs trinômes du second degré qui, égalés séparément à 0, ne donneraient que des racines imaginaires; il est clair que l'équation ainsi formée n'aurait elle-même que des racines imaginaires.

*Remarque sur les deux conséquences précédentes.* En rapprochant ces conséquences, de la proposition (n° 250) que toute équation a au moins une racine, on voit que cette proposition hypothétique se trouve maintenant démontrée pour la plupart des équations; d'ailleurs, les démonstrations des conséquences ci-dessus sont fondées sur le principe du n° 318 et sur celui du n° 321, qui sont tout-à-fait indépendans de la théorie établie dans le septième chapitre.

328. Troisième conséquence. *Si une équation, dont les coefficients sont réels, renferme des racines imaginaires, ces racines ne peuvent être qu'en nombre pair.*

En effet, concevons que l'on ait divisé le premier membre de la proposée par tous les facteurs simples qui correspondent aux racines réelles; le polynôme quotient que l'on obtiendra, aura ses coefficients réels (d'après la loi de formation n° 253); de plus, il doit être de degré pair; car, s'il était de degré impair, on l'égalerait à zéro, et l'équation résultante aurait encore (n° 327) au moins une racine réelle, ce qui serait contre la nature de cette équation.

*Remarque.* Le polynôme quotient dont nous venons de parler, jouit d'ailleurs d'une propriété caractéristique, c'est-à-dire appartenant exclusivement aux équations qui n'ont que des racines imaginaires, c'est de rester constamment positif, quelque valeur réelle que l'on y mette à la place de  $x$ .

En effet, s'il pouvait devenir négatif, comme on obtiendrait aussi un résultat positif, en substituant pour  $x$ ,  $K + 1$  ou le plus grand coefficient augmenté de l'unité, il s'ensuivrait que ce polynôme égalé à zéro, aurait au moins une racine réelle comprise entre  $K + 1$  et le nombre qui aurait donné un résultat négatif.

Il suit encore de là, que le dernier terme de ce polynôme doit être positif, puisque autrement,  $x = 0$  donnerait un résultat négatif.

Nous démontrerons, dans le neuvième chapitre, que non-seulement les racines imaginaires sont en nombre pair dans toute équation, mais encore qu'elles s'y trouvent par couples, et qu'elles sont de la forme  $a \pm b\sqrt{-1}$ , c'est-à-dire de la forme des racines imaginaires d'une équation du second degré.

329. Quatrième conséquence. Toutes les fois que le dernier terme d'une équation est positif, le nombre des racines réelles positives de l'équation est pair; et toutes les fois qu'il est négatif, le nombre des racines réelles positives est impair.

En effet, supposons d'abord que le dernier terme soit  $+U$ , ou positif. Comme en faisant  $x = 0$ , on a pour résultat  $+U$ , et qu'en faisant  $x = K + 1$ , on a aussi un résultat positif, il s'ensuit que 0 et  $K + 1$  donnent deux résultats de même signe, et par conséquent (n° 319), que le nombre des racines réelles qu'ils comprennent est nul ou un nombre pair quelconque.

Si, au contraire, le dernier terme est  $-U$ , alors 0 et  $K + 1$  donnent deux résultats de signes contraires et comprennent par conséquent une seule racine ou un nombre impair quelconque de racines réelles.

La réciproque de cette proposition est évidente.

330. RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES. Voici une règle qui fait connaître le plus grand nombre de racines positives et le plus grand nombre de racines négatives qu'une équation numérique peut renfermer :

*Une équation d'un degré quelconque ne peut avoir plus de racines positives que de VARIATIONS de signes, ni un nombre de racines négatives plus grand que celui des PERMANENCES.*

La proposition serait évidemment démontrée, si l'on pouvait faire voir que la multiplication du premier membre d'une équation par un facteur  $x - a$ , correspondant à une racine positive, introduit AU MOINS UNE VARIATION de plus, et que la multiplication par un facteur  $x + a$ , introduit AU MOINS UNE PERMANENCE de plus.

Soit donc l'équation

$$x^m \pm Ax^{m-1} \pm Bx^{m-2} \pm Cx^{m-3} \pm \dots \pm Tx \pm U = 0,$$

dans laquelle les signes se succèdent d'une manière quelconque; ou à, en multipliant par  $x - a$ ,

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x^{m+1} \pm A & x^m \pm B & x^{m-1} \pm C & x^{m-2} \pm \dots & \pm U & x \\ \hline -a & \mp Aa & \mp Ba & & \mp Ta & \mp Ua. \end{array}$$

Les coefficients qui, dans ce produit, forment la première ligne horizontale, sont ceux de la proposée, pris avec le même signe; et les coefficients de la seconde ligne sont formés de ceux de la première, multipliés par  $a$ , mais pris avec un signe contraire et avancés d'un rang vers la droite.

Cela posé, tant que chaque coefficient de la ligne supérieure sera plus grand que celui qui lui correspond dans la ligne inférieure, il déterminera le signe du coefficient total; ainsi, dans ce cas, il y aura, depuis le premier terme jusqu'à l'avant-dernier inclusivement, les mêmes variations et les mêmes permanences que dans la proposée; mais le dernier terme  $\mp Ua$  ayant un signe contraire à celui du coefficient supérieur de l'avant-dernier, il existera nécessairement, au produit, une nouvelle variation que la proposée n'avait pas.



Si un coefficient inférieur est de signe contraire à son correspondant supérieur, et est plus grand que lui, il y a nécessairement une permanence qui se change en une variation; car le signe du terme dans lequel cela arrive, étant le même que celui du coefficient inférieur, est contraire au signe du terme précédent, qu'on a supposé le même que celui de son coefficient supérieur. On voit donc que, chaque fois qu'on descend de la ligne supérieure dans la ligne inférieure, pour déterminer le signe, il y a une variation qui ne se trouve pas dans la proposée; et si, après ce passage, on reste toujours dans la ligne inférieure, on retrouve les mêmes variations et les mêmes permanences que dans la proposée, puisque les coefficients de cette ligne sont tous de signes contraires à ceux des coefficients primitifs. Quand on remonte de la ligne inférieure à la ligne supérieure, il peut en résulter indifféremment une variation ou une permanence. Or, en supposant même que ce passage produisit dans tous les cas, une permanence, comme le dernier terme  $\mp Ua$  fait partie de la seconde ligne, il faudrait toujours revenir une fois de plus dans cette ligne que dans la première. Donc la nouvelle équation doit avoir au moins une variation de plus que la proposée; et il en serait de même à chaque racine positive qu'on introduirait.

On démontrerait d'une manière absolument analogue, que la multiplication par un facteur  $x + a$ , correspondant à une racine négative, introduirait au moins une permanence de plus. Donc, dans toute équation, le nombre des racines positives ne saurait surpasser celui des VARIATIONS de signe et le nombre des racines négatives, celui des PERMANENCES.

331. CONSÉQUENCE. Toutes les fois qu'une équation n'a que des racines réelles, le nombre des racines positives est égal au nombre total des variations, et le nombre des racines négatives au nombre total des permanences.

En effet, soient  $m$  le degré de l'équation,  $n$  le nombre des variations de signe qu'elle renferme,  $p$  le nombre des permanences; on a nécessairement  $m = n + p$ . Soient d'ailleurs  $n'$  le nombre

des racines positives, et  $p'$  le nombre des racines négatives; on a encore  $m = n' + p'$ ; d'où l'on déduit

$$n + p = n' + p'.$$

Or, on vient de voir que  $n'$  ne peut être  $> n$ , et  $p'$  ne peut être  $> p$ ; donc il faut que l'on ait  $n' = n$ , et  $p' = p$ .

332. *Remarque.* Lorsqu'une équation manque de quelques termes, on peut souvent, au moyen de la règle précédente, reconnaître la présence de racines imaginaires.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

$p$  et  $q$  étant essentiellement positifs; rétablissons le terme qui manque, en l'affectant du coefficient  $\pm 0$ ; il vient

$$x^3 \pm 0.x^2 + px + q = 0.$$

En n'ayant égard qu'aux signes supérieurs, on ne voit que des permanences, tandis que le signe inférieur donne deux variations. Cela prouve que l'équation a des racines imaginaires; car si elles étaient toutes trois réelles, il faudrait, en vertu du signe supérieur, qu'elles fussent toutes trois négatives; et, en vertu du signe inférieur, qu'il y en eût deux positives et une négative, résultats contradictoires.

On ne peut rien conclure si l'équation est de la forme

$$x^3 - px + q = 0;$$

car rétablissons le terme  $\pm 0.x^2$ ; il vient

$$x^3 \pm 0.x^2 - px + q,$$

équation qui présente une permanence et deux variations, soit que l'on prenne le signe supérieur, soit que l'on prenne le signe inférieur. Ainsi, cette équation peut avoir ses trois racines réelles, savoir, deux positives et une négative; ou bien, elle a deux racines imaginaires et une négative, puisque son dernier terme est positif (n° 329). (\*)

---

(\*) M. Budant de Boislaurent, dans la dernière édition de son ouvrage intitulé, *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques*, établit plusieurs théorèmes faisant suite à la règle de Descartes, et qui sont

Passons actuellement à l'exposition des diverses méthodes de la résolution des équations numériques.

## § II. Recherche des Racines commensurables des équations numériques.

333. Les racines réelles commensurables doivent être l'objet des premières recherches. Ces racines peuvent être entières ou fractionnaires.

Observons d'abord que toute équation dont le premier terme a pour coefficient l'unité, et dont tous les autres coefficients sont des nombres entiers, ne peut avoir pour racines commensurables que des nombres entiers.

En effet, soit l'équation

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0,$$

dans laquelle P, Q, . . . T, U, sont des nombres entiers, et supposons qu'elle puisse avoir pour racine un nombre fractionnaire commensurable tel que  $\frac{a}{b}$ ; il vient, par la substitution,

$$\frac{a^m}{b^m} + P \frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} + Q \frac{a^{m-2}}{b^{m-2}} + \dots + T \frac{a}{b} + U = 0,$$

d'où, multipliant toute l'équation par  $b^{m-1}$  et transposant,

$$\frac{a^m}{b} = -Pa^{m-1} - Qa^{m-2}b - \dots - Tab^{m-2} - Ub^{m-1};$$

mais le second membre de cette égalité se compose d'une suite de nombres entiers, tandis que le premier membre est essentiellement fractionnaire, car  $a$  et  $b$  pouvant toujours être supposés premiers entre eux, il en est de même (Arith., n° 230) de  $a^m$  et  $b$ , donc cette égalité ne saurait exister.

Ainsi, il est impossible qu'aucun nombre fractionnaire commensurable satisfasse à l'équation. Or, on a vu (n° 280),

propres à faire reconnaître l'absence de racines réelles dans une équation donnée.

comment, étant donnée une équation dont les coefficients sont rationnels, mais fractionnaires, on peut la transformer en une autre dont les coefficients soient entiers, son premier terme conservant d'ailleurs l'unité pour coefficient. Donc la recherche des racines commensurables (entières ou fractionnaires) d'une équation, peut toujours être ramenée à une simple recherche de racines entières.

334. Cela posé, reprenons l'équation générale

$$x^m + Px^{m-1} + \dots + Rx^3 + Sx^2 + Tx + U = 0.$$

(Pour l'exposition de la méthode, il faut nécessairement écrire les quatre ou cinq derniers termes.)

Désignons par  $a$  un nombre entier, positif ou négatif, qui doit vérifier l'équation, et cherchons à quelles conditions il doit satisfaire pour être reconnu racine.

Si  $a$  est racine, on doit avoir l'égalité

$$a^m + Pa^{m-1} + \dots + Ra^3 + Sa^2 + Ta + U = 0 \dots (1);$$

ainsi, en remplaçant  $a$  par tous les nombres entiers positifs ou négatifs, depuis 1 et  $-1$  jusqu'aux limites  $+L$  et  $-L$  (n° 325) des racines positives et négatives, ceux qui vérifieraient l'égalité ci-dessus seraient reconnus racines. Mais on conçoit combien ces essais seraient longs et pénibles; on a donc cherché à déduire de l'égalité (1), qui est une condition nécessaire et suffisante, d'autres conditions équivalentes et plus simples à vérifier.

Transposons tous les termes, excepté le dernier, et divisons par  $a$ ; l'égalité (1) peut être mise sous la forme

$$\frac{U}{a} = -a^{m-1} - Pa^{m-2} - \dots - Ra^2 - Sa - T \dots (2);$$

or, le second membre de cette nouvelle égalité est un nombre entier; donc il faut que  $\frac{U}{a}$  soit un nombre entier; ainsi, déjà les racines entières de l'équation sont comprises parmi les diviseurs du dernier terme.

Transposons actuellement dans l'égalité (2) le terme  $-T$ , et divisons par  $a$ ; il vient, en posant pour plus de simplicité,

$$\frac{U}{a} + T = T',$$

$$\frac{T'}{a} = -a^{m-1} - Pa^{m-2} - \dots - Ra - S \quad (3);$$

le second membre de l'égalité (3) est un nombre entier; donc il faut que  $\frac{T'}{a}$ , ou le quotient de la division de  $\frac{U}{a} + T$  par  $a$ , soit un nombre entier.

Transposons de nouveau le terme  $-S$ , et divisons par  $a$ ; il vient, en posant

$$\frac{T'}{a} + S = S',$$

$$\frac{S'}{a} = -a^{m-1} - Pa^{m-2} - \dots - R, \dots \quad (4);$$

le second membre de cette égalité est un nombre entier; donc il faut que  $\frac{S'}{a}$ , ou le quotient de la division de  $\frac{T'}{a} + S$  par  $a$ , soit un nombre entier.

En continuant ainsi de transposer dans le premier membre tous les termes du second, on parviendra, après la  $m-1^{\text{ère}}$  transformation, à une égalité de la forme  $\frac{Q'}{a} = -a - P$ .

Transposant enfin le terme  $-P$ , divisant par  $a$ , et posant

$$\frac{Q'}{a} + P = P',$$

on trouve  $\frac{P'}{a} = -1$ , ou  $\frac{P'}{a} + 1 = 0$ .

Cette égalité, qui n'est d'ailleurs qu'une transformée de l'égalité (1), est la dernière condition à laquelle il faut et il suffit que le nombre entier  $a$  satisfasse pour être reconnu racine.

En rapprochant les conditions précédentes, on peut conclure

que pour qu'un nombre entier  $a$ , positif ou négatif, soit racine de l'équation proposée, il faut

*Que le quotient du dernier terme divisé par  $a$  soit entier;*

*Qu'en ajoutant à ce quotient le coefficient de  $x^1$  (pris avec son signe), le quotient de cette somme divisée par  $a$  soit entier;*

*Qu'en ajoutant à ce nouveau quotient le coefficient de  $x^2$ , le quotient de cette nouvelle somme par  $a$  soit entier; et ainsi de suite;*

*Qu'enfin, si l'on ajoute le coefficient du second terme de l'équation, ou de  $x^{n-1}$ , au quotient précédent, le quotient de la nouvelle somme divisée par  $a$ , soit entier et égal à  $-1$ ; ou bien encore, que le résultat de l'addition de l'unité ou du coefficient de  $x^n$  au quotient précédent, soit égal à 0.*

Tout nombre qui satisfera à ces épreuves réunies sera racine, et ceux qui n'y satisferont pas devront être rejetés.

Afin de déterminer à la fois toutes les racines entières d'une équation, voici la marche qu'il convient de suivre.

Après avoir déterminé tous les diviseurs du dernier terme (Arith., n° 148), on écrit sur une même ligne horizontale, et tant avec le signe  $+$  qu'avec le signe  $-$ , les diviseurs compris entre les limites  $+L$  et  $-L$ ; puis, au-dessous de ces diviseurs, on écrit les quotiens du dernier terme par chacun d'eux.

On ajoute ensuite à chacun des quotiens le coefficient de  $x^1$ , ce qui donne des sommes que l'on place au-dessous des quotiens qui leur correspondent; puis on divise ces nouvelles sommes par chacun des diviseurs, ce qui donne des quotiens que l'on écrit au-dessous des sommes correspondantes (ou a le soin de rejeter les quotiens fractionnaires et les diviseurs qui ont donné ces quotiens); et ainsi de suite.

Observons en outre que, si quelques termes manquent dans l'équation particulière proposée, il faut en tenir compte, en regardant chacun de leurs coefficients comme égal à 0.

Enfin, il est inutile d'appliquer la méthode aux diviseurs  $+$

et  $-1$ , parce que leur substitution dans l'équation réduit le premier membre à la série des coefficients, et il est facile de s'assurer directement si ces deux nombres satisfont ou ne satisfont pas à l'équation.

Soit, pour premier exemple, l'équation

$$x^3 - x^2 = 13x + 16x - 48 = 0.$$

La limite supérieure des racines positives de cette équation est  $13 + 1$  ou  $14$  [On ne considère pas ici le coefficient  $48$ , parce que les deux derniers termes revenant à  $16(x - 3)$ , dès que l'on fait  $x > 3$ , cette partie est essentiellement positive].

On trouverait d'ailleurs (n° 325) pour la limite supérieure des racines négatives,  $-(1 + \sqrt{48})$ , ou  $-8$ .

Cela posé, les diviseurs de  $48$  jusqu'à  $14$  sont  $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ ; d'ailleurs, aucun des deux nombres  $+1, -1$ , ne satisfait à l'équation, car le coefficient  $-48$  est à lui seul numériquement plus grand que tous les autres réunis; ainsi, l'on ne doit soumettre aux épreuves que les *diviseurs positifs* compris depuis  $2$  jusqu'à  $12$ , et les *diviseurs négatifs* compris depuis  $-2$  jusqu'à  $-6$ .

Voici le tableau des calculs, d'après la marche indiquée :

|       |      |     |      |      |      |      |      |      |      |    |
|-------|------|-----|------|------|------|------|------|------|------|----|
| 12,   | 8,   | 6,  | 4,   | 3,   | 2,   | -2,  | -3,  | -4,  | -6   |    |
| -     | 4,   | -6, | -8,  | -12, | -16, | +24, | +24, | +16, | +12, | +8 |
| + 12, | +10, | +8, | +4,  | 0,   | -8,  | +40, | +32, | +28, | +24  |    |
| + 4,  | "    | "   | +1,  | 0,   | -4,  | -20, | "    | -7,  | -4   |    |
| - 12, | -2,  | "   | -12, | -13, | -17, | -33, | "    | -20, | -17  |    |
| - 1,  | "    | "   | -3,  | "    | "    | "    | "    | +5,  | "    |    |
| - 2,  | "    | "   | -4,  | "    | "    | "    | "    | +4,  | "    |    |
| "     | "    | "   | -1,  | "    | "    | "    | "    | -1,  | "    |    |

La *première* ligne est celle des diviseurs; la *seconde*, celle des quotiens de la division du dernier terme,  $-48$ , par chacun des diviseurs.

La *troisième* est la ligne des quotiens que l'on vient d'obtenir, augmentés du coefficient  $+16$  de la proposée, et la *qua-*

*trième* celle des quotiens de ces sommes divisées par chacun des diviseurs; cette seconde condition exclut d'abord les diviseurs  $+8$ ,  $+6$  et  $-3$ .

La *cinquième* est la ligne des quotiens précédens augmentés du coefficient  $-13$  de la proposée, et la *sixième* celle des quotiens des nouvelles sommes par chacun des diviseurs; cette troisième condition exclut les nouveaux diviseurs  $3$ ,  $2$ ,  $+2$  et  $-6$ .

Enfin, la *septième* est la ligne des troisièmes quotiens, augmentés du coefficient  $-1$  de la proposée, et la *huitième* celle des quotiens des dernières sommes par chacun des diviseurs. Il n'y a que les diviseurs  $+4$  et  $-4$  qui donnent  $-1$ ; donc  $+4$  et  $-4$  sont les seules racines entières de la proposée.

En effet, si l'on divise  $x^4 - x^3 - 13x^2 + 16x - 48$ , par le produit  $(x-4)(x+4)$ , ou  $x^2 - 16$ , il vient pour quotient  $x^2 - x + 3$ , polynome qui, égalé à zéro, donne

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-11};$$

ainsi les quatre racines sont  $4$ ,  $-4$  et  $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-11}$ .

335. *Remarque.* Comme dans les applications de la méthode, on peut commettre quelques erreurs d'addition ou de division, et laisser ainsi échapper quelques racines, il est convenable, après avoir divisé le premier membre de la proposée par chacun des facteurs du premier degré, correspondant aux racines déjà obtenues, il est convenable, dis-je, d'*appliquer de nouveau la méthode à l'équation résultante*, qui est d'un degré plus simple, et dont les coefficients sont aussi plus simples que ceux de la proposée.

Il y a même une circonstance où cette équation résultante peut encore renfermer des racines commensurables, sans que l'on ait commis aucune erreur; c'est lorsque la proposée renferme des racines égales commensurables. Comme la méthode des racines égales est plus compliquée que celle des racines



commensurables, il faut toujours, une équation numérique étant donnée, commencer par la soumettre à la méthode des racines commensurables. Or, cette méthode suffit bien pour obtenir les racines différentes, mais elle n'indique pas si une même racine n'entre qu'une fois, ou se trouve plusieurs fois dans la proposée. On peut s'en assurer de deux manières, *ou bien*, en soumettant de nouveau à la méthode l'équation qui résulte de la suppression des racines déjà mises en évidence; *ou bien*, en essayant la division du premier membre de cette équation par les facteurs du premier degré qui correspondent aux racines trouvées.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 171x^2 + 216x - 108 = 0.$$

La limite supérieure des racines positives de cette équation est, d'après la décomposition (n° 323),  $13 + 1$ , ou 14; elle n'a pas de racines négatives, puisque l'équation ne renferme que des variations de signe (n° 326).

Les diviseurs de 108, au-dessous de 14, sont

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12;

d'ailleurs +1 ne satisfait pas à l'équation, car il vient, pour résultat de la substitution, -8; ainsi, 2, 3, 4, 6, 9, 12, sont les seuls nombres à soumettre aux épreuves.

|        |        |        |        |        |       |
|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
| 12,    | 9,     | 6,     | 4,     | 3,     | 2     |
| - 9,   | - 12,  | - 18,  | - 27,  | - 36,  | - 54  |
| + 207, | + 204, | + 198, | + 189, | + 180, | + 162 |
| "      | "      | + 33,  | "      | + 60,  | + 81  |
| "      | "      | - 138, | "      | - 111, | - 90  |
| "      | "      | - 23,  | "      | - 37,  | - 45  |
| "      | "      | + 44,  | "      | + 30,  | + 22  |
| "      | "      | "      | "      | + 10,  | + 11  |
| "      | "      | "      | "      | - 3,   | - 2   |
| "      | "      | "      | "      | - 1,   | - 1   |

On voit, par l'application de la méthode, que 3 et 2 sont racines de la proposée.

Effectuant la division du premier membre de cette équation par  $(x-3)(x-2)$ , ou  $x^2-5x+6$ , on trouve pour quotient

$$x^3-8x^2+21x-18=0,$$

$$\begin{array}{r} 3, \quad 2; \\ - 6, - 9 \\ + 15, + 12 \\ + 5, + 6 \\ - 3, - 2 \\ - 1, - 1. \end{array}$$

En appliquant de nouveau la méthode, on reconnaît que +3 et +2 sont encore racines de l'équation

$$x^3-8x^2+21x-18=0.$$

Divisant celle-ci par  $x^2-5x+6$ , on obtient pour quotient  $x-3=0$ , d'où  $x=3$ ; ainsi la proposée peut se mettre sous la forme  $(x-3)^3(x-2)^2=0$ .

336. Lorsque le nombre des diviseurs du dernier terme, qui se trouvent compris entre les deux limites +L et -L, est très grand, on peut restreindre le nombre de ceux susceptibles d'être soumis aux épreuves de la méthode précédente, par une règle d'un usage facile.

Soit l'équation  $x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\dots+Tx+U=0$ ,

dans laquelle nous supposons toujours que les coefficients soient entiers.

On sait que,  $a$  étant racine de cette équation, son premier membre est divisible par  $x-a$ ; ainsi l'on a l'identité

$$x^m+Px^{m-1}+\dots+Tx+U=(x-a)(x^{m-1}+P'x^{m-2}+\dots+T'x+U').$$

P, Q... T, U' sont, d'après la loi de formation du n° 253, des nombres entiers aussi bien que  $a$ , P, Q... T, U. Cela posé, comme l'équation précédente doit se vérifier, quel que soit  $x$ ,

faisons  $x = 1$ , il vient

$$1 + P + Q + \dots + T + U = (1 - a)(1 + P' + \dots + T' + U'),$$

$$\text{d'où } \frac{1 + P + Q + \dots + T + U}{1 - a} = 1 + P' + \dots + T' + U';$$

le second membre de cette égalité est un nombre entier, donc il doit être de même du premier membre; ainsi  $a$  étant un nombre entier positif ou négatif, ne peut être racine, qu'autant que  $1 - a$  divise le résultat de la substitution de  $+1$  dans la proposée.

On prouverait de même, en faisant  $x = -1$ , que  $-1 - a$  doit diviser le résultat de la substitution de  $-1$ ; d'où résulte la règle suivante:

*Substituez successivement  $+1$  et  $-1$  dans la proposée, et designez par M et M' les valeurs numériques des résultats de cette double substitution.*

(Si l'un des résultats était 0, auquel cas  $+1$  ou  $-1$  serait racine, il faudrait commencer par supprimer cette racine dans la proposée, avant d'appliquer la règle.)

1°. *Tout diviseur positif du dernier terme qui, diminué de 1, ne divise pas M, et qui, augmenté de 1, ne divise pas M', doit être rejeté.*

2°. *Tout diviseur négatif dont la valeur numérique, augmentée de 1, ne divise pas M, et diminuée de 1, ne divise pas M', doit être rejeté.*

Afin de mettre plus facilement en évidence ces deux caractères d'exclusion, on peut décomposer d'abord les deux résultats M et M' dans leurs diviseurs (*Arith.*, n° 148).

Soit, pour exemple, proposé de déterminer les racines commensurables de l'équation  $x^4 - 5x^3 - 37x^2 + 257x - 360 = 0$ .

La limite supérieure des racines positives de cette équation est  $37 + 1$  ou 38, parce que  $257x - 360$  revient à  $257\left(x - \frac{360}{257}\right)$ ;

la limite supérieure des négatives est  $-(1 + \sqrt{360})$  ou  $-20$ . Les diviseurs de 360, que l'on doit soumettre aux épreuves de la méthode du n° 334, sont donc

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, et  $-1, -2, -3, -4, -5, -6, -8, -9, -10, -12, -15, -18$ ;

le résultat de la substitution de  $+1$  dans la proposée est, en faisant abstraction du signe, 144 ou  $2^4 \cdot 3^2$ ; le résultat de la substitution de  $-1$  est 648 ou  $2^3 \cdot 3^4$ .

Cela posé, passons d'abord en revue les diviseurs positifs, à partir de 36 qui est le plus grand.

$36 + 1$  ou  $35 = 7 \times 5$ , ne divise pas 144, qui est égal à  $2^4 \cdot 3^2$ ; ainsi 36 doit être rejeté.

On rejettera, par la même raison, 30, 24, 20, 18, 15, 12.  $10 + 1$  ou 9 divise 144; mais  $10 + 1$  ou 11 ne divise pas 648, qui est égal à  $2^3 \cdot 3^4$ ; ainsi 10 doit être rejeté.

On reconnaîtra encore que 9, 8, 6, 4 doivent être rejetés; c'est-à-dire que les seuls diviseurs positifs qui satisfont à la règle, sont 5, 3 et 2.

Quant aux diviseurs négatifs,  $18 + 1$  ou 19, ne divise pas 144; ainsi  $-18$  doit être rejeté.

$15 + 1$  ou 16 divise 144; mais  $15 - 1$  ou 14 ne divise pas 648; donc  $-15$  doit être rejeté.

On reconnaîtra pareillement que  $-12, -10, -9, -8, -6, -4$  doivent être rejetés. Ainsi, l'on ne doit soumettre aux épreuves de la méthode du n° 334, que les diviseurs  $+5, -3$  et  $-2$ . Reprenons maintenant l'équation

$$x^4 - 5x^3 - 37x^2 + 257x - 360 = 0,$$

et voyons quels sont ceux des diviseurs  $+5, +3, +2, -2, -3, -5$  qui la vérifient.

$$\begin{array}{r}
 + \quad 5, + \quad 3, + \quad 2, - \quad 2, - \quad 3, - \quad 5 \\
 - \quad 72, - \quad 120, - \quad 180, + \quad 180, + \quad 120, + \quad 72 \\
 + \quad 185, + \quad 137, + \quad 77, + \quad 437, + \quad 377, + \quad 329 \\
 + \quad 37, + \quad " , \quad " , \quad " , \quad " , \quad " \\
 0, + \quad " , \quad " , \quad " , \quad " , \quad " \\
 0, + \quad " , \quad " , \quad " , \quad " , \quad " \\
 - \quad 5, + \quad " , \quad " , \quad " , \quad " , \quad " \\
 - \quad 1, + \quad " , \quad " , \quad " , \quad " , \quad "
 \end{array}$$

le diviseur 5 est le seul qui remplisse toutes les conditions, et qui soit par conséquent *racine* de l'équation.

En effectuant la division de la proposée par  $x - 5$ , on trouve pour résultat,  $x^3 - 37x + 72 = 0$ , équation qui n'a plus que des racines incommensurables.

Voici de nouveaux exercices :

$$\begin{array}{l}
 1^{\circ} \quad x^3 - 5x^2 + 25x - 21 = 0. \\
 (x-1)(x-3)(x^2 - x + 7) = 0.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2^{\circ} \quad 15x^3 - 19x^2 + 6x + 15x^4 - 19x + 6 = 0. \\
 (3x-2)(5x-3)(x^2+1) = 0.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 3^{\circ} \quad 9x^3 + 30x^2 + 22x^4 + 10x^5 + 7x^6 - 20x + 4 = 0. \\
 (x+2)^2(3x-1)^2(x^2+1) = 0.
 \end{array}$$

337. Ce qui précède suffit pour la détermination des racines commensurables de toute équation numérique dont les coefficients sont *rationnels, entiers ou fractionnaires*. Cependant nous observerons qu'il y a des questions dont les énoncés conduisent à des équations de degré supérieur, et qui, par leur nature, n'admettent que des nombres entiers pour *solutions*; c'est-à-dire que toute solution fractionnaire commensurable ou incommensurable doit être regardée comme tout-à-fait étrangère à la question.

Soit, par exemple, *proposé de déterminer la base du système de numération dans lequel le nombre 2147, écrit dans le système décimal, serait représenté par l'ensemble des chiffres 32042 (système cherché)*.

Désignons par  $x$  la base inconnue; 2, 4x, 0.  $x^2$ ,  $2x^3$ ,  $3x^4$  représenteront les valeurs relatives des chiffres 2, 4, 0, 2 et 3 du nombre 32042; ainsi, l'on aura l'équation

$$3x^4 + 2x^3 + 0.x^2 + 4x + 2 = 2147,$$

$$\text{ou bien } 3x^4 + 2x^3 + 4x - 2145 = 0.$$

à résoudre en nombres entiers et positifs, car  $x$  doit être, par sa nature, un nombre entier absolu.

Or, pour peu qu'on réfléchisse sur la méthode exposée n° 334, pour trouver les racines entières d'une équation dont le coefficient du premier terme est l'unité, on verra qu'elle est également applicable au cas où le coefficient du premier terme est un nombre entier quelconque; la seule différence, si l'équation est, par exemple, de la forme

$$Ax^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Sx^2 + Tx + U = 0,$$

est que, lorsqu'on est parvenu à la dernière des conditions que comporte la méthode, le résultat, au lieu d'être égal à  $-1$ , doit être égal à  $-A$ .

On peut d'ailleurs reconnaître l'exactitude de cette assertion, en reprenant les mêmes transformations et les mêmes raisonnemens que ceux qui ont été faits n° 334.

Ainsi, pour trouver les racines commensurables entières d'une équation dont le premier terme a un coefficient différent de l'unité, il n'est pas nécessaire d'opérer la disparition de ce coefficient, opération qui (n° 280) a l'inconvénient de conduire à une équation dont les coefficients sont très grands.

D'après cela, recherchons les racines entières de l'équation

$$3x^4 + 2x^3 + 4x - 2145 = 0.$$

La limite supérieure des racines positives est (n° 322)

$$1 + \sqrt[4]{2145} = 1 + 7 = 8,$$

le nombre 2145 est décomposable (*Arith.* n° 148) en  $3 \times 5 \times 11 \times 13$ ; ainsi, il n'y a lieu à essayer que les nombres

3 et 5,

$$\begin{array}{rcl}
 & 5, & 3, \\
 - & 429, & - 715, \\
 - & 425, & - 711, \\
 - & 85, & - 237, \\
 - & 85, & - 237, \\
 - & 17, & - 79, \\
 - & 15, & - 77, \\
 - & 3, & - 1.
 \end{array}$$

Le seul nombre 5 donne pour dernier résultat,  $-3$ , ou le coefficient du premier terme, pris en signe contraire; ainsi cinq est la base du système cherché.

En effet, 32042, écrit dans le système *quinnaire*, équivaut à  $3 \times 5^4 + 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 4 \times 5 + 2$ , ou effectuant,  $3 \times 625 + 2 \times 125 + 4 \times 5 + 2 = 2147$ , dans le système décimal.

On peut s'exercer sur les exemples suivants :

1°. Déterminer la base du système de numération dans lequel 7329 (système décimal) est représenté par 5563 (système cherché) [ $x = onze$ ].

2°. La base du système dans lequel 81479 (système décimal) est représenté par 456356 (système cherché) [ $x = sept$ ].

338. Recherche des diviseurs commensurables du second degré d'une équation. Observations préliminaires.

La méthode des racines commensurables, exposée n° 334, est aussi appelée *méthode des diviseurs commensurables du premier degré*, parce que, connaissant une racine commensurable, entière ou fractionnaire, le premier membre de l'équation est (n° 251) divisible exactement par le facteur du premier degré en  $x$ , correspondant à cette racine; et les coefficients de ce facteur sont nécessairement commensurables eux-mêmes.

Lorsqu'une équation numérique est débarrassée de ses diviseurs commensurables du premier degré, l'équation résultante ne renferme plus que des racines incommensurables, réelles ou imaginaires; mais on conçoit que plusieurs des facteurs du

premier degré qui correspondent à ces racines, quoique ayant des coefficients incommensurables, peuvent fort bien, par leur combinaison deux à deux, donner naissance à des produits dont les coefficients soient rationnels; c'est ainsi que  $x - \sqrt{3}$ , multiplié par  $x + \sqrt{3}$ , donne pour produit,  $x^2 - 3$ .

De même,

$$(x - 1 + \sqrt{-5})(x - 1 - \sqrt{-5}) = x^2 - 2x + 6.$$

Or, si l'on avait quelque moyen de découvrir dans une équation, *les diviseurs commensurables* du second degré, en les égalant à 0, on en déduirait des racines de l'équation proposée, et, de plus, on les obtiendrait sous leur véritable forme.

Nous allons voir comment les principes de l'élimination et la méthode du n° 334 conduisent à ce but.

339. Soit  $X = 0$  une équation débarrassée de ses diviseurs commensurables du premier degré.

Désignons par  $x^2 + px + q$  l'un quelconque des diviseurs du second degré de  $X$ ;  $p$  et  $q$  sont deux *indéterminées* dont il faut tâcher d'obtenir les valeurs, *en nombres commensurables*, s'il est possible.

Pour cela, *divisons*  $X$  par  $x^2 + px + q$ , et concevons que l'on ait poussé l'opération jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un reste du premier degré en  $x$ , de la forme  $Mx + N$ ,  $M$  et  $N$  étant des indéterminées fonctions de  $p$  et de  $q$ . En égalant ce reste à 0, on établira la condition que  $x^2 + px + q$  devienne diviseur exact de  $X$ ; d'ailleurs, cette division doit se faire, indépendamment de toute valeur particulière attribuée à  $x$ ; donc, en vertu du principe n° 188, sur les équations identiques, l'équation  $Mx + N$  se partagera nécessairement en deux autres

$$M = 0, \quad N = 0, \quad \text{ou bien,} \quad F(p, q) = 0, \quad F'(p, q) = 0.$$

Cela posé, la question sera ramenée à *trouver* (en nombres commensurables), tous les systèmes de valeurs de  $p$  et  $q$  propres à vérifier ces deux équations.



On commencera par former, d'après les méthodes connues, l'équation finale en  $p$ , à laquelle on appliquera la méthode des racines commensurables (n° 334). Après avoir obtenu toutes les valeurs rationnelles de  $p$ , on les substituera (n° 285) dans le reste du premier degré par rapport à  $q$ , lequel reste, égalé ensuite à 0, donnera les valeurs rationnelles de  $q$ , correspondantes aux valeurs de  $p$  déjà trouvées. Enfin, on substituera chacun des systèmes de valeurs de  $p$  et  $q$  dans le trinôme  $x^2 + px + q$ ; ce qui donnera autant de diviseurs commensurables du second degré.

Il est évident que l'équation finale en  $p$  doit être d'un degré marqué par  $m \left( \frac{m-1}{2} \right)$ ,  $m$  étant le degré de l'équation, puisque c'est l'expression d'un nombre total des diviseurs commensurables ou incommensurables du second degré. D'après cela, on peut juger, combien cette méthode, facile en théorie, est compliquée dans la pratique. Aussi l'usage en est-il peu fréquent.

On voit assez, ce qu'il faudrait faire pour obtenir les diviseurs commensurables du 3<sup>ième</sup>, 4<sup>ième</sup>, ... degré; mais ces dernières questions ne sont d'aucune utilité (\*).

### § III. Recherche des Racines réelles incommensurables.

340. Lorsqu'on a débarrassé une équation de tous les diviseurs du premier degré qui correspondent à ses racines commensurables, l'équation résultante contient encore des racines incommensurables, réelles ou imaginaires.

La véritable forme des racines réelles incommensurables d'une équation d'un degré quelconque restera inconnue, tant qu'on n'aura pas de méthode générale pour résoudre les équations de degré supérieur. Mais si la détermination de leur

(\*) Dans la note placée à la fin de l'ouvrage, nous nous proposons de dire quelques mots sur la décomposition d'un polynôme rationnel et entier quelconque en ses facteurs premiers.

forme est encore un problème à résoudre, il n'en est pas ainsi de la valeur numérique de chacune de ces racines. En effet, il existe des méthodes pour obtenir ces valeurs avec tout le degré d'approximation qu'on peut désirer.

Pour plus de simplicité, nous diviserons cette théorie en deux parties :

*Dans la première, nous supposerons que la proposée soit telle, que la différence entre deux quelconques des racines réelles soit plus grande que l'unité; et, dans la seconde, que quelques-unes de ces différences puissent être plus petites que l'unité.*

PREMIÈRE PARTIE. *Cas où la différence entre deux racines réelles quelconques est plus grande que l'unité.*

[Nous admettrons encore, dans tout ce qui va suivre, que l'on ait déterminé les limites  $+L$  et  $-L'$ , les plus resserrées possibles, soit par la méthode des décompositions (n° 323), soit par la méthode de Newton (n° 324).]

341. Chacune des racines incommensurables étant nécessairement composée d'une partie entière (qui peut quelquefois être 0) et d'une partie plus petite que l'unité, le premier objet dont nous avons à nous occuper consiste à déterminer la partie entière de chaque racine.

Pour cela, il faut substituer à la place de  $x$ , dans l'équation, la suite naturelle des nombres 0, 1, 2, 3..., et  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$ ..., compris entre  $+L$  et  $-L'$ . Comme entre deux nombres substitués qui donnent deux résultats de signes contraires, il doit (n° 318) exister au moins une racine réelle, il s'ensuit que chaque couple de nombres donnant des résultats de signes contraires, comprendra une racine réelle, et n'en comprendra qu'une, puisque, par hypothèse, les racines ont entre elles une différence plus grande que l'unité. D'ailleurs, la partie entière de la racine comprise sera le plus petit des deux nombres substitués.

Cela posé, il pourra arriver deux cas: ou bien, l'on obtiendra par ces différentes substitutions, autant de changemens

de signe (ou de couples de résultats de signes contraires) qu'il y a d'unités dans le degré de l'équation ; auquel cas, on pourra conclure que toutes les racines sont réelles. Ou le nombre des changemens de signe sera moindre que le degré de l'équation, et, dans ce cas, il y aura autant de racines réelles que de changemens de signe ; les autres racines seront imaginaires. Dans les deux cas, cette méthode de substitution fera connaître la partie entière de chacune des racines réelles de la proposée.

Il reste maintenant à déterminer la partie plus petite que l'unité.

### 342. Méthode d'approximation de Lagrange.

Soit  $X = 0$  une équation dont toutes les racines réelles ont une partie entière différente, que l'on suppose avoir été déjà déterminée.

Désignons par  $a$  et  $a + 1$  deux nombres entiers consécutifs qui comprennent l'une d'elles ; le nombre  $a$  exprime la partie entière de cette racine.

Pour obtenir la partie plus petite que l'unité, faisons dans l'équation  $X = 0$ , ou

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0, \quad x = a + \frac{1}{y};$$

il en résulte la transformée

$$X'y^m + Y'y^{m-1} + \frac{Z'}{2}y^{m-2} + \dots + 1 = 0.$$

[Pour obtenir cette transformée, on commence par remplacer  $x$  par  $a + u$ , ce qui donne (n° 278)

$$X' + Y'u + \frac{Z'}{2}u^2 + \dots + u^m = 0,$$

$X'$  désignant ce que devient  $X$ , lorsqu'on y met  $a$  pour  $x$ , et  $Y', Z', \dots$ , étant des polynômes dérivés de  $X'$  d'après la loi établie n° 278 ; puis on remet  $\frac{1}{y}$  pour  $u$ , et l'on élève les dénominateurs.]

Appelons, pour plus de simplicité,  $Y = 0$  cette équation transformée, laquelle est de même degré que la proposée, et qui a par conséquent  $m$  racines. Puisque la relation  $x = a + \frac{1}{y}$ , doit donner toutes les valeurs de  $x$ , connaissant les valeurs de  $y$ , et que, par hypothèse,  $a$  et  $a + 1$  comprennent une racine réelle et n'en comprennent qu'une seule, il faut nécessairement que  $\frac{1}{y}$  ait une seule de ses  $m$  valeurs, positive et plus petite que 1; ce qui exige que l'une des  $m$  valeurs de  $y$  soit positive et plus grande que 1; de plus, qu'il n'y en ait qu'une seule de cette espèce; autrement, ce serait supposer que  $a$  et  $a + 1$  comprendraient plus d'une valeur de  $x$ .

Si donc, dans l'équation  $Y = 0$ , on substitue la série des nombres entiers 1, 2, 3, ..., on est certain d'obtenir tôt ou tard un changement de signe; et les deux nombres qui produiront ce changement de signe, comprendront la valeur de  $y$  cherchée.

Soient  $b$  et  $b + 1$  ces deux nombres, on fera dans  $Y = 0$ ,  $y = b + \frac{1}{y}$ , ce qui donnera une nouvelle transformée  $Y_1 = 0$  (que l'on obtiendra par le moyen indiqué ci-dessus); et cette équation aura encore une seule racine réelle positive, plus grande que 1, qui sera mise en évidence par la substitution des nombres entiers 1, 2, 3, ... dans  $Y_1 = 0$ .

Soient  $c$  et  $c + 1$  les nombres consécutifs qui, ayant dû produire un changement de signe, comprennent la valeur de  $y'$ ; on fera encore dans l'équation  $Y_1 = 0$ ,  $y' = c + \frac{1}{y}$ ; ce qui donnera la transformée  $Y_2 = 0$ , ayant une seule racine réelle positive plus grande que 1.

Soient  $d$  et  $d + 1$  les deux nombres qui la comprennent; on posera de nouveau  $y' = d + \frac{1}{y}$ , et l'on continuera cette suite de transformations aussi loin que l'on voudra.

Rapprochons maintenant les relations

$$x = a + \frac{1}{y}, \quad y = b + \frac{1}{y'}, \quad y' = c + \frac{1}{y''}, \quad y'' = d + \frac{1}{y'''} \dots;$$

il en résulte

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \dots}}}$$

Or on sait que, dans une fraction continue, plus on prend de fractions intégrantes, plus on approche de la valeur du nombre réduit en fraction continue; et le degré d'approximation s'estime (*Arith.*, n° 174), par l'unité divisée par le carré du dénominateur de la dernière réduite. Ainsi la méthode précédente donnera la valeur de  $x$  cherchée, avec tel degré d'approximation que l'on voudra.

343. Appliquons la théorie précédente à l'équation

$$x^3 - 5x - 3 = 0 \dots (1).$$

D'abord, les limites supérieures des racines positives et négatives sont, comme il est facile de s'en assurer,  $+3$  et  $-2$ .

Faisons donc dans l'équation,

$$x = -2, -1, 0, 1, 2, 3;$$

il vient pour

$$x = -2 \dots -1,$$

$$x = -1 \dots +1,$$

$$x = 0 \dots -3,$$

$$x = 1 \dots -7,$$

$$x = 2 \dots -5,$$

$$x = 3 \dots +9.$$

Comme on obtient ici trois changemens de signe, il s'ensuit que l'équation a ses trois racines réelles; savoir, une positive comprise entre 2 et 3; et deux négatives comprises entre 0 et  $-1$ , puis entre  $-1$  et  $-2$ .

Occupons-nous premièrement de la valeur positive comprise entre 2 et 3.

Posons dans l'équation (1),  $x = 2 + \frac{1}{y}$ ; il en résulte une équation de la forme

$$X'y^3 + Y'y^2 + \frac{Z'}{2}y + 1 = 0,$$

dans laquelle on a (q<sup>o</sup> 278)

$$X' = (2)^3 - 5(2)' - 3 = -5,$$

$$Y' = 3(2)^2 - 5 = 7,$$

$$\frac{Z'}{2} = 3(2) = 6,$$

$$\frac{V'}{2.3} = 1;$$

ce qui donne, par la substitution et après le changement des signes,

$$5y^3 - 7y^2 - 6y - 1 = 0, \quad (2).$$

Faisant dans cette équation  $y = 1, 2, 3, \dots$ , on trouve pour

$$y = 1, \dots - 9,$$

$$y = 2, \dots - 1,$$

$$y = 3, \dots + 53;$$

donc la valeur cherchée de  $y$  est comprise entre 2 et 3.

Posons dans l'équation (2),  $y = 2 + \frac{1}{y'}$ ; il en résulte l'équation

$$X'y'^3 + Y'y'^2 + \frac{Z''}{2}y' + \frac{V''}{2.3} = 0,$$

dans laquelle

$$X'' = 5(2)^3 - 7(2)^2 - 6(2) - 1 = -1,$$

$$Y'' = 15(2)^2 - 14(2) - 6 = 26,$$

$$\frac{Z''}{2} = 15(2) - 7 = 23,$$

$$\frac{V''}{2.3} = 5;$$

ce qui donne par la substitution,

$$y'^3 - 26y'^2 - 23y' - 5 = 0 \dots (3)$$

Comme cette équation revient à

$$y'^2(y' - 26) - 23y' - 5 = 0,$$

il est visible que toute valeur plus petite que 26, substituée pour  $y'$ , donnerait un résultat négatif.

Mais si l'on pose  $y' = 26$ , il en résulte  $-603$ ,

$$y' = 27 \dots \dots \dots + 103;$$

d'où l'on voit que  $y'$  est compris entre 26 et 27.

Posons donc dans l'équation (3),  $y' = 26 + \frac{1}{y''}$ , on obtient

$$X''y''^3 + Y''y''^2 + \frac{Z''}{2}y'' + \frac{V''}{2.3} = 0,$$

dans laquelle  $X'' = (26)^3 - 26(26)^2 - 23(26) - 5 = -603$ ,

$$Y'' = 3(26)^2 - 52(26) - 23 = 653,$$

$$\frac{Z''}{2} = 3(26) - 26 = 52,$$

$$\frac{V''}{2.3} = 1,$$

ce qui donne la nouvelle transformée

$$603y''^3 - 653y''^2 - 52y'' - 1 = 0 \dots (4),$$

équation qui revient à celle-ci,

$$y''(603y'' - 653) - 52y'' - 1 = 0.$$

Comme  $y'' = 1$ , donne pour résultat  $-103$ ,

$$\text{et } y'' = 2 \dots \dots \dots + 2107,$$

il s'ensuit que  $y''$  est compris entre 1 et 2.

Posons de nouveau dans l'équation (4),  $y'' = 1 + \frac{1}{y'''}$ , on

obtient

$$X''y''' + Y''y'' + \frac{Z''}{2}y'' + \frac{V''}{2.3} = 0,$$

équation dans laquelle

$$X'' = 603(1)' - 653(1)'' - 52(1)''' - 1 = -103,$$

$$Y'' = 1809(1)' - 1306(1)'' - 52 = 451,$$

$$\frac{Z''}{2} = 1809(1)' - 653 = 1156,$$

$$\frac{V''}{2.3} = 603;$$

ce qui donne la transformée

$$103y''' - 451y'' + 1156y' - 603 = 0,$$

ou bien,  $y'''(103y'' - 451) - 1156y' - 603 = 0.$

Il est facile de reconnaître que la valeur de  $y''$  est comprise entre 5 et 6; en sorte que, si l'on voulait continuer l'opération, il faudrait supposer  $y'' = 5 + \frac{1}{y'}$ . Mais arrêtons-nous aux résultats déjà obtenus.

Les équations

$$x = 2 + \frac{1}{y}, y = 2 + \frac{1}{y'}, y' = 26 + \frac{1}{y''}, y'' = 1 + \frac{1}{y'''}, y''' = 5 + \frac{1}{y''''}$$

donnent pour la valeur de  $x$ ,

$$x = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{26 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}$$

Les réduites consécutives de cette fraction continue étant

$$\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{132}{53}, \frac{137}{55}, \frac{817}{328},$$



on peut prendre la dernière pour la valeur approchée de  $x$  ; l'erreur commise est (*Arith.*, n° 174) moindre que  $\frac{1}{(328)^2}$  ou...

$$\frac{1}{107584}$$

On si l'on réduit  $\frac{817}{328}$  en décimales, et que l'on pousse l'opération jusqu'aux 100000<sup>èmes</sup> inclusivement, on trouve 2,49085, qui est censé représenter la valeur de  $x$  à 0,00001 près.

Cette valeur est trop faible pour deux raisons, premièrement, parce que la réduite  $\frac{817}{328}$  est de rang impair; en second lieu, parce que 2,49085 est elle-même une fraction plus petite que  $\frac{817}{328}$ . Il suit de là qu'il peut y avoir lieu à augmenter le dernier chiffre 5 d'une unité.

En effet, si l'on substitue 2,49085 et 2,49086 dans la proposée, on trouve deux résultats négatifs, ce qui prouve que la racine cherchée ne peut être comprise entre ces deux nombres. Mais comme en substituant 2,49087, on obtient un résultat positif, il s'ensuit que  $x$  est compris entre 2,49086 et 2,49087. Donc enfin 2,49086 exprime la valeur de  $x$ , à 0,00001 près.

344. Passons à la détermination des valeurs négatives.

Pour plus de simplicité, changeons  $x$  en  $-x$  dans la proposée  $x^3 - 5x - 3 = 0$ ; il vient

$$-x^3 + 5x - 3 = 0, \quad \text{ou bien,} \quad x^3 - 5x + 3 = 0,$$

équation dont les racines positives, prises avec le signe  $-$ , seront les racines négatives de la proposée. Ainsi, la question est ramenée à déterminer les racines positives de la nouvelle équation.

L'une de ces racines est comprise entre 1 et 2, l'autre entre 0 et 1. Voici, en abrégé, le tableau des calculs relatifs à la détermination de chacune d'elles:

1°. Racine comprise entre 1 et 2.

$$x^3 - 5x + 3 = 0,$$

$$x = 1 + \frac{1}{y};$$

1<sup>re</sup> transformée,  $y^3 + 3y^2 - 3y - 1 = 0;$

$$y = 1 \dots \dots - 1,$$

$$y = 2 \dots \dots + 9,$$

$$y = 1 + \frac{1}{y};$$

2<sup>e</sup> transformée,  $y' - 4y^2 - 5y' - 1 = 0;$

$$y' = 4 \dots \dots - 21,$$

$$y' = 5 \dots \dots - 1,$$

$$y' = 6 \dots \dots + 41,$$

$$y' = 5 + \frac{1}{y};$$

3<sup>e</sup> transformée,  $y'' - 30y'' - 7y' - 1 = 0;$

$$y'' = 30 \dots \dots - 211,$$

$$y'' = 31 \dots \dots + 743,$$

$$y'' = 30 + \frac{1}{y};$$

donc

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{30}}}.$$

Réduites consécutives,  $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{11}{6}, \frac{332}{181};$

$$\frac{332}{181} = 1,8342 \text{ à } 0,0001 \text{ près.}$$

Ainsi, la valeur de  $x$ , comprise entre 1 et 2, est . . . .  
 $x = 1,8342$  à 0,0001 près.

Cette valeur peut être vérifiée aisément par la substitution, des deux nombres 1,8342 et 1,8343 dans l'équation.

2°. Valeur comprise entre 0 et 1.

$$x^2 - 5x + 3 = 0,$$

$$x = \frac{1}{y};$$

1<sup>re</sup> transformée,  $3y^2 - 5y + 1 = 0;$

$$y = 1 \dots\dots - 1,$$

$$y = 2 \dots\dots + 5,$$

$$y = 1 + \frac{1}{y};$$

2<sup>e</sup> transformée,  $y'^2 + y' - 4y' - 3 = 0;$

$$y' = 1 \dots\dots - 3,$$

$$y' = 2 \dots\dots + 1,$$

$$y' = 1 + \frac{1}{y'};$$

3<sup>e</sup> transformée,  $5y''^2 - y'' - 4y'' - 1 = 0;$

$$y'' = 1 \dots\dots - 1,$$

$$y'' = 2 \dots\dots + 27,$$

$$y'' = 1 + \frac{1}{y''};$$

4<sup>e</sup> transformée,  $y'''^2 - 9y''' - 14y''' - 5 = 0;$

$$y''' = 9 \dots\dots + 131,$$

$$y''' = 10 \dots\dots - 45,$$

$$y''' = 11 \dots\dots + 83,$$

$$y''' = 10 + \frac{1}{y'''};$$

5<sup>e</sup> transformée,  $45y^{iv2} - 106y^{iv2} - 21y^{iv2} - 1 = 0,$

ou bien,  $y^{iv2}(45y^{iv2} - 106) - 21y^{iv2} - 1 = 0;$

$$y^{iv2} = 2 \dots\dots - 107,$$

$$y^{iv2} = 3 \dots\dots + 197,$$

$$y^{iv2} = 2 + \frac{1}{y^{iv2}};$$

donc, 
$$x = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{10 + \frac{1}{2}}}}}$$

Réduites consécutives,

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{21}{32}, \frac{44}{67},$$

$$\frac{44}{67} = 0,6566 \text{ à } 0,0001 \text{ près.}$$

ainsi la valeur de  $x$  comprise entre 0 et 1 est 0,6566 à 0,0001 près.

Donc enfin les deux racines négatives de l'équation proposée  $x^3 - 5x - 3 = 0$ , sont

$$x = -1,8342 \text{ et } x = -0,6566.$$

Ces exemples suffisent pour mettre au fait de la méthode de Lagrange.

345. *Méthode de Newton.* Il existe une autre méthode d'approximation, qui a souvent l'avantage de donner des approximations plus rapides.

Pour en donner une première idée et la faire comprendre plus facilement, nous reprendrons l'équation particulière...  $x^3 - 5x - 3 = 0$ , dont nous nous proposerons de déterminer la racine comprise entre 2 et 3.

La racine cherchée étant comprise entre 2 et 3, il faut tâcher de resserrer ces deux limites; pour cela, considérons le moyen terme  $2\frac{1}{2}$  ou 2,5 et substituons ce nouveau nombre dans l'équation  $x^3 - 5x - 3 = 0$ ; il vient pour résultat +0,125. D'ailleurs, 2 a déjà donné pour résultat -5; ainsi la racine est comprise entre 2 et 2,5.

Considérons un nouveau nombre compris entre 2 et 2,5;

mais comme, d'après les résultats donnés par 2 et 2,5, il est à présumer que la racine est plus voisine de 2,5 que de 2, posons  $x = 2,4$ ; on obtient pour résultat de la substitution,  $-1,176$ ; tandis que 2,5 avait donné  $+0,125$ . Ainsi la racine est comprise entre 2,4 et 2,5.

En continuant ainsi de prendre des moyens termes, on parviendrait à resserrer de plus en plus les deux limites de la racine. Mais lorsqu'une fois on a obtenu, comme dans ce cas-ci, la valeur de  $x$  à moins de 0,1, on peut en approcher davantage par un autre moyen; et c'est en cela que consiste principalement la méthode de Newton.

Faisons dans l'équation  $x^3 - 5x - 3 = 0$ ,

$$x = 2,4 + u.$$

On obtient (n° 278) la transformée

$$X' + Y'u + \frac{Z'}{2}u^2 + u^3 = 0,$$

dans laquelle  $X' = (2,4)^3 - 5(2,4) - 3 = -1,176$ ,

$$Y' = 3(2,4)^2 - 5 = 12,28,$$

$$\frac{Z'}{2} = 3(2,4) = 7,2.$$

L'équation en  $u$  étant du 3<sup>e</sup> degré, ne peut être immédiatement résolue; mais en transposant tous les termes à l'exception du terme  $Y'u$ , et divisant les deux membres par  $Y'$ , on peut la mettre sous la forme

$$u = -\frac{X'}{Y'} - \frac{Z'}{2 \cdot Y'}u^2 - \frac{1}{Y'}u^3.$$

Cela posé, puisque l'une des trois racines de cette équation doit être moindre que  $\frac{1}{10}$ , d'après la relation  $x = 2,4 + u$ , les valeurs correspondantes de  $u^2$  et de  $u^3$  sont moindres que  $\frac{1}{100}$  et  $\frac{1}{1000}$ . D'ailleurs, l'inspection des valeurs numériques

de  $Y'$  et de  $Z'$  prouve que  $\frac{Z'}{2 \cdot Y'}$  est  $< 1$ ; ainsi la valeur de  $u$  ne différant numériquement de  $-\frac{X'}{Y'}$  que par la quantité  $\dots$   
 $\frac{Z'}{2 \cdot Y'} u^2 + \frac{1}{Y'} u^3$  qui, le plus souvent, est au-dessous de  $\frac{1}{100}$ ,  
 cette valeur de  $u$ , dis-je, est exprimée par  $-\frac{X'}{Y'}$ , à 0,01 près.

Comme, dans cet exemple,

$$-\frac{X'}{Y'} = \frac{+1,176}{12,28} = \frac{1176}{12280} = 0,09 \dots,$$

il en résulte  $u = 0,09$ , à  $\frac{1}{100}$  près, et par conséquent,

$$x = 2,4 + 0,09 = 2,49, \text{ à } \frac{1}{100} \text{ près.}$$

En effet, 2,49 substitué dans le premier membre de la proposée, donne pour résultat  $-0,011751$ ;  
 tandis que 2,50 avait donné  $+0,125$ .

Pour obtenir une nouvelle approximation, faisons dans la proposée,  $x = 2,49 + u$ , on a l'équation

$$X'' + X' u + \frac{Z''}{2} u^2 + u^3 = 0,$$

dans laquelle  $X'' = (2,49)^3 - 5(2,49) - 3 = -0,011751$ ,

$$Y'' = 3(2,49)^2 - 5 = 13,6063,$$

$$\frac{Z''}{2} = 3(2,49)^2 = 7,47.$$

Mais l'équation en  $u$  peut s'écrire ainsi:

$$u = -\frac{X''}{Y''} - \frac{Z''}{2 \cdot Y''} u^2 - \frac{1}{Y''} u^3,$$

et puisque l'une des valeurs de  $u$  doit être moindre que  $\frac{1}{100}$ ,

les valeurs correspondantes de  $u^2$ ,  $u^3$ , sont moindres que

$\frac{1}{10000}$ ,  $\frac{1}{1000000}$ ; donc  $-\frac{X}{Y}$  peut représenter la valeur de  $u$ , à  $\frac{1}{10000}$  près.

Comme on a

$$-\frac{X}{Y} = \frac{0,011751}{13,6003} = \frac{11751}{13600300} = 0,0008 \dots$$

il s'ensuit que  $u = 0,0008$ , à  $\frac{1}{10000}$  près, et par conséquent,

$$x = 2,49 + 0,0008 = 2,4908, \text{ à } \frac{1}{10000} \text{ près.}$$

Il serait, en effet, facile de reconnaître que 2,4908 et 2,4909, substitués dans la proposée, donnent deux résultats de signes contraires.

En posant de nouveau  $x = 2,4908 + u$ , on obtiendrait une valeur approchée de  $x$ , à moins de  $\frac{1}{100000000}$ , ou d'un cent-millionième.

Ordinairement, chaque opération nouvelle donne pour la racine un nombre de chiffres décimaux double de celui de l'opération précédente.

346. Voici en quoi consiste la méthode générale :

Soient  $p$  et  $p+1$  deux nombres qui comprennent l'une des racines de l'équation  $X = 0$ .

On commence par déterminer la valeur de cette racine à  $\frac{1}{10}$  près, en substituant une suite de nombres compris entre  $p$  et  $p+1$ , et continuant jusqu'à ce que deux de ces moyens termes ne diffèrent entre eux que de  $\frac{1}{10}$ .

Cela posé, appelant  $x'$  la valeur de  $x$  obtenue à moins de

$\frac{1}{10}$ , on pose dans l'équation  $X = 0$ ,

$$x = x' + u,$$

ce qui donne la transformée

$$X' + Y'u + \frac{Z'}{2} u^2 + \dots + u^n = 0,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$u = -\frac{X'}{Y'} - \frac{Z'}{2 \cdot Y'} u^2 - \dots - \frac{1}{Y'} u^n,$$

$X', Y', Z', \dots$  sont d'ailleurs des quantités faciles à calculer (n° 278).

Comme dans le second membre de cette équation, l'ensemble des termes qui suivent  $-\frac{X'}{Y'}$ , est ordinairement au-dessous de

$\frac{1}{100}$ , on les néglige, et calculant  $-\frac{X'}{Y'}$  à  $\frac{1}{100}$  près, on ajoute le résultat à  $x'$ , ce qui donne une nouvelle valeur  $x''$  approchée à moins de  $\frac{1}{100}$ .

Pour obtenir une 3<sup>e</sup> approximation, l'on pose dans l'équation,  $x = x'' + u'$ , et l'on obtient la transformée

$$X'' + Y''u' + \frac{Z''}{2} u'^2 + \dots + u'^n = 0;$$

$$\text{d'où } u' = -\frac{X''}{Y''} - \frac{Z''}{2 \cdot Y''} u'^2 - \dots - \frac{1}{Y''} u'^n.$$

Négligeant tous les termes  $-\frac{Z''}{2 \cdot Y''} - \dots - \frac{1}{Y''} u'^n$ , dont l'ensemble est supposé moindre que 0,0001, on calcule  $-\frac{X''}{Y''}$  en poussant l'opération jusqu'aux 10000<sup>èmes</sup>, et l'on ajoute le résultat à  $x''$ ; ce qui donne une 3<sup>e</sup> valeur  $x'''$  approchée à moins de  $\frac{1}{10000}$ .



Pour avoir une nouvelle approximation, on remplace  $x$  par  $x' + u$  dans la proposée.

On calcule l'expression  $-\frac{X'}{Y'}$ , qui résulte de cette transformation, et l'on pousse l'opération jusqu'au 8<sup>e</sup> chiffre décimal inclusivement, puis l'on ajoute ce résultat à  $x'$ , et ainsi de suite.

On répète cette série d'opérations pour chacune des racines positives. Quant aux racines négatives, on ramène leur recherche à celle des racines positives, en changeant  $x$  en  $-x$  dans la proposée.

347. *Première remarque.* La méthode précédente est fondée sur ce que, dans la transformée,

$$X' + Y'u + \frac{Z'}{2}u^2 + \dots + u^n = 0,$$

$$\text{qui revient à } u = -\frac{X'}{Y'} - \frac{Z'}{2Y'}u^2 - \dots - \frac{1}{Y'}u^n,$$

on peut négliger tous les termes affectés de  $u^2$ ,  $u^3$ ,  $u^4$ , ..., sans erreur sensible sur les 100<sup>èmes</sup> à la première opération, sur les 10000<sup>èmes</sup> à la seconde, etc.; mais cette méthode est quelquefois en défaut, ainsi que Lagrange le prouve dans son *Traité de la résolution des Equations numériques*.

On a toutefois un moyen de s'assurer, à la fin de chaque opération, si la méthode a donné le degré d'approximation que l'on croyait devoir obtenir.

Par exemple, pour reconnaître si 2,4908 exprime la racine positive de  $x^3 - 5x - 3 = 0$ , à  $\frac{1}{10000}$  près, on substitue dans cette équation 2,4908, puis 2,4909, ou 2,4907, suivant que le résultat de la substitution de 2,4908 est de signe contraire au résultat de la substitution de 3 ou de 2; et si les deux nombres 2,4908 et 2,4909, ou bien 2,4908 et 2,4907, donnent deux résultats de signes contraires, nul doute que 2,4908 ne soit une valeur exacte à  $\frac{1}{10000}$  près, soit en moins, soit en

*plus.* S'il n'en est pas ainsi, l'on augmente ou diminue le dernier chiffre d'une ou de plusieurs unités (de dix millièmes), jusqu'à ce qu'on obtienne deux nombres qui, par leur substitution, donnent deux résultats de signes contraires.

348. *Seconde remarque.* Il y a aussi des cas où, dès la première opération, il est nécessaire de calculer la quantité  $\frac{X'}{Y}$  jusqu'aux 1000<sup>èmes</sup>, et même jusqu'aux 10000<sup>èmes</sup>.

Soit l'équation  $x^3 - 6x - 7 = 0$ , dont il est aisé de s'assurer que l'une des racines est comprise entre 2 et 3; quant aux deux autres, elles sont imaginaires (comme nous le verrons n° 353).

On reconnaîtra d'abord facilement, par la substitution des moyens termes, que la racine réelle est comprise entre 2,9 et 3).

Maintenant, faisons dans l'équation,  $x = 2,9 + u$ ; il en résulte la transformée

$$X' + Y'u + \frac{Z'}{2} u^2 + u^3 = 0,$$

dans laquelle

$$X' = (2,9)^3 - 6(2,9) - 7 = -0,011,$$

$$Y' = 3(2,9)^2 - 6 = 19,23,$$

$$\frac{Z'}{2} = 3(2,9) = 8,7.$$

Négligeant les termes en  $u^2$  et  $u^3$ , on a

$$u = -\frac{X'}{Y'} = \frac{0,011}{19,23} = \frac{11}{19230}.$$

Or, si l'on réduit cette expression en fraction décimale, on trouve des zéros pour les trois premiers chiffres décimaux, et 5 pour le 4<sup>e</sup> chiffre; c'est-à-dire que l'on a  $u = 0,0005$ , résultat qui, ajouté à 2,9, donne (en ne tenant compte que des quatre premiers chiffres décimaux),  $x = 2,9005$ .

Pour vérifier cette valeur, il faut substituer 2,9005 dans

la proposée, ce qui donne  $-0,00138$ , résultat de signe contraire à celui que donne  $x=3$ ; mais en substituant...  $x=2,9006$ , on trouve  $+0,00054$ , qui est de signe contraire à  $-0,00138$ . Donc  $2,9005$  exprime la valeur de  $x$ , à moins de  $\frac{1}{10000}$ .

349. *Rapprochement des deux méthodes.* La méthode d'approximation de Lagrange, quoiqu'en général moins expéditive que celle de Newton, a sur celle-ci l'avantage de donner à chaque opération une approximation toujours certaine.

On pourrait même à la rigueur trouver, par la méthode de Lagrange, les racines commensurables. La fraction continue que l'on obtiendrait, serait alors composée d'un nombre limité de fractions intégrantes; c'est-à-dire qu'en continuant les opérations convenablement, on parviendrait à une équation  $Y_{(n)} = 0$ , dont la racine positive plus grande que 1, serait égale à un nombre entier; et toutes les réduites consécutives étant formées, la dernière représenterait la vraie valeur de la racine commensurable.

Ce moyen est sans contredit moins simple que la méthode exposée n° 334; mais c'est le seul qu'on pourrait employer si l'on supposait que quelques-uns des coefficients fussent irrationnels; car la méthode ordinaire n'est applicable qu'aux équations dont tous les coefficients sont des nombres commensurables.

La méthode de Newton ne pourrait pas donner ces mêmes racines exactement; puisque, d'après sa nature, on n'obtient les valeurs numériques des racines que sous la forme de fractions décimales.

Nous observerons toutefois que l'application simultanée des deux méthodes à une même équation, peut abrégér beaucoup les calculs. Ainsi, par exemple, après avoir d'abord employé la méthode des fractions continues, pour obtenir chacune des racines, à  $\frac{1}{10}$  et même à  $\frac{1}{100}$  près, rien n'empêche d'avoir en-

suite recours à la méthode de Newton, pour obtenir un plus grand degré d'approximation.

Enfin nous renvoyons, pour de plus amples détails sur les méthodes d'approximation, à l'excellent *Traité de la résolution des Équations numériques*. Nous indiquerons encore l'ouvrage déjà cité page 496, et ayant pour titre : *Nouvelle Méthode pour résoudre les Équations numériques*, par M. Budan; ainsi que le *Supplément à l'Essai sur la Théorie des Nombres*, par Legendre, ouvrage dans lequel ce géomètre fait connaître une nouvelle méthode qui, dans certains cas, est plus simple et plus expéditive que celles de Lagrange et de Newton.

SECONDE PARTIE. Cas où la différence entre deux racines réelles d'une équation peut être moindre que l'unité (n° 340).

350. Lorsque, par la substitution des nombres entiers consécutifs, compris entre les limites  $+L$  et  $-L$ , on obtient autant de changemens de signe qu'il y a d'unités dans le degré de l'équation, il est clair que toutes les racines de l'équation sont réelles, et que chacune d'elles a une partie entière différente.

Mais si le nombre des changemens de signe est moindre que le degré de la proposée, cela peut provenir ou de ce que l'équation a des racines réelles et des racines imaginaires, ou bien, de ce que plusieurs racines incommensurables sont comprises entre deux nombres entiers consécutifs. En effet, on a vu (n° 319) que deux nombres qui, substitués dans le premier membre d'une équation, donnent des résultats de signes contraires, peuvent comprendre un nombre impair quelconque de racines réelles, et que deux nombres qui donnent des résultats de même signe, peuvent en comprendre un nombre pair quelconque.

Par exemple, si une équation devait avoir pour racines,  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{3}$ , nombres compris entre 1 et 2, il arriverait que 1 et 2, substitués dans la proposée, donneraient des résultats de même signe.

Parcilleusement, qu'une équation ait pour valeurs  $\sqrt{11}$ ,  $\sqrt{13}$ ,  $\sqrt{15}$ , qui se trouvent compris entre 3 et 4, ces deux derniers

nombre substitués donneraient des résultats de signes différens.

On voit donc que la méthode de substitution des nombres entiers consécutifs serait, dans ce cas, insuffisante pour mettre en évidence toutes les racines réelles de la proposée, et qu'elle aurait l'inconvénient de laisser échapper quelques racines.

Cet inconvénient disparaîtrait, si l'on pouvait déterminer, *a priori*, une quantité  $\delta$ , numériquement moindre que la plus petite des différences qui existent entre deux quelconques des racines réelles d'une équation proposée. Car en mettant cette quantité  $\delta$  pour intervalle entre deux substitutions successives, il est évident que deux nombres qui auraient entre eux la différence  $\delta$ , et qui, étant substitués, donneraient des résultats de signes contraires, comprendraient une racine et n'en comprendraient qu'une; s'ils donnaient des résultats de même signe, ils ne comprendraient aucune racine; c'est-à-dire qu'alors le nombre des racines réelles de l'équation serait égal au nombre des changemens de signe.

351. Voyons donc s'il n'y aurait pas quelque moyen de déterminer la quantité  $\delta$ . Or cela est facile d'après l'équation aux carrés des différences.

En effet, désignons par  $X = 0$  l'équation proposée, et par  $Z = 0$  l'équation aux carrés des différences, équation que nous avons (n<sup>os</sup> 299 et 312) appris à former.

Remarquons d'abord que, le carré de la différence entre deux racines réelles quelconques de la proposée étant positif, on ne doit chercher les carrés des différences entre les racines réelles que parmi les racines positives de l'équation  $Z = 0$ . (Ses racines négatives correspondent à des différences entre des racines imaginaires, ou entre une racine réelle et une racine imaginaire.) Donc, si l'on cherche la limite inférieure des racines positives de l'équation  $Z = 0$ , et qu'on en extraie la racine carrée, on sera certain d'avoir une quantité moindre que la plus petite différence entre deux racines réelles de la proposée, c'est-à-dire la quantité cherchée  $\delta$ .

Pour obtenir cette limite, il faut (n° 325), poser  $x = \frac{1}{l}$  dans  $Z = 0$ , ce qui donne la transformée  $V = 0$ . Soit  $l$  la limite supérieure des racines positives de  $V = 0$ ,  $\frac{1}{l}$  sera la limite inférieure de  $Z = 0$ ; ainsi  $\frac{1}{\sqrt{l}}$  est la quantité  $\delta$  qu'il s'agissait de déterminer.

Lorsqu'en recherchant la limite  $l$  la plus resserrée possible (par la méthode de Newton ou celle des décompositions, n° 323), on trouve  $l < 1$ , il en résulte  $\frac{1}{\sqrt{l}} > 1$ ; et cela indique que la différence entre deux racines réelles quelconques est plus grande que l'unité. Dès lors, on est certain que le nombre des racines réelles de la proposée est égal au nombre de changemens de signe qu'on avait d'abord obtenus par la substitution des nombres entiers consécutifs.

Mais ordinairement, on trouve  $l > 1$ , d'où  $\frac{1}{\sqrt{l}} < 1$ . Dans ce cas, comme  $\sqrt{l}$  est en général incommensurable, il convient de remplacer  $\sqrt{l}$  par le nombre entier  $k$ , immédiatement supérieur, ce qui donne  $\frac{1}{k} < \frac{1}{\sqrt{l}}$ , et à plus forte raison,  $\frac{1}{k}$  moindre que la plus petite des différences entre les racines réelles. On pourrait donc mettre  $\frac{1}{k}$  pour intervalle entre deux substitutions consécutives; c'est-à-dire qu'en substituant dans  $X = 0$ , la suite des nombres

$$0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, 1, 1 + \frac{1}{k}, 1 + \frac{2}{k}, \dots, 2, 2 + \frac{1}{k}, \dots \text{ jusqu'à } L,$$

$$\text{et } 0, -\frac{1}{k}, -\frac{2}{k}, \dots, -1, \dots, \text{ jusqu'à } -L,$$

on obtiendrait autant de changemens de signe que l'équation doit avoir de racines réelles.

Mais on peut encore éviter la substitution de nombres fractionnaires par la transformation suivante : Posons dans l'équation,  $x = \frac{y}{k}$ ; il en résulte (n° 280) une équation dont les racines sont  $k$  fois plus grandes que celles de la proposée. Par conséquent, les différences entre ces nouvelles racines sont elles-mêmes  $k$  fois plus grandes que les différences correspondantes entre les racines de la proposée; en sorte que si  $a - b$  désigne la plus petite des différences relatives à  $X = 0$ , comme on avait  $a - b > \frac{1}{k}$ , il en résulte  $ka - kb > 1$ . Donc la nouvelle équation  $Y = 0$  est telle, que les différences entre toutes ces racines réelles, considérées deux à deux, sont plus grandes que l'unité.

Donc enfin, si l'on substitue dans cette équation la suite naturelle des nombres 0, 1, 2, 3, et  $-1, -2, -3, \dots$  compris entre les deux limites, on obtiendra autant de changemens de signe que l'équation  $Y = 0$  aura de racines réelles. (Les deux limites de  $Y = 0$  sont d'ailleurs  $+kL$  et  $-kL'$ , si  $+L$  et  $-L'$  désignent celles de  $X = 0$ .)

352. Résumons ce qui vient d'être dit :

Pour mettre en évidence toutes les racines réelles incommensurables d'une équation  $X = 0$ , il faut

1°. Former l'équation aux carrés des différences,  $Z = 0$ ;

2°. déterminer la limite inférieure  $\frac{1}{k}$  des racines positives de cette dernière équation, si cette quantité  $\frac{1}{k}$  est plus grande que

l'unité, c'est une preuve que la différence entre deux racines réelles quelconques de la proposée est aussi plus grande que l'unité; dès lors la substitution des nombres entiers consécutifs dans la proposée, suffit pour mettre toutes les racines réelles en

évidence; 3°. mais si l'on a  $\frac{1}{k}$  ou  $\frac{1}{\sqrt{k}} < 1$ , on remplace  $\frac{1}{\sqrt{k}}$  par  $\frac{1}{k}$ ,  $k$  étant le nombre entier immédiatement supérieur à

$\sqrt{l}$ , et l'on fait  $x = \frac{y}{k}$  dans la proposée, ce qui donne une équation  $Y = 0$ , dont on recherche toutes les racines réelles, d'après la méthode exposée dans la première partie de ce paragraphe.

4°. Enfin, l'on substitue à la place de  $y$  toutes ses valeurs dans la relation  $x = \frac{y}{k}$ ; et l'on obtient ainsi toutes les racines réelles de la proposée.

N. B. Observons que si, pour mettre toutes les racines réelles de  $X = 0$  en évidence, on a été obligé de la transformer en une autre dont les racines soient  $k$  fois plus grandes que celles de la proposée, ces dernières sont déjà obtenues à une fraction près  $\frac{1}{k}$ . Cela résulte évidemment de la relation  $x = \frac{y}{k}$ .

353. Appliquons ces principes à quelques exemples.

Soit, en premier lieu, l'équation

$$x^3 - 6x - 7 = 0.$$

Les limites supérieures des racines positives et négatives sont, comme il est aisé de s'en assurer,  $+3, -2$ .

Or, en substituant les nombres  $+3, +2, +1, 0, -1, -2$ , on trouve pour résultats,  $+2, -11, -12, -7, -2, -3$ ; et l'on voit que  $+3$  et  $+2$  sont les seuls nombres qui donnent deux résultats de signes contraires. D'où l'on peut conclure que l'équation a une seule racine réelle et deux racines imaginaires, ou bien, que ses trois racines sont réelles, mais que leurs différences deux à deux sont moindres que l'unité.

Pour faire cesser toute incertitude, formons l'équation aux carrés des différences. On a trouvé (n° 289) pour cette équation,

$$z^3 - 36z^2 + 324z + 459 = 0.$$

Faisons, dans cette équation,  $z = \frac{1}{y}$ ; il en résulte



$$v^3 + \frac{324}{459} v^2 - \frac{36}{459} v + \frac{1}{459} = 0,$$

équation que l'on peut écrire ainsi :

$$v^3 + \frac{1}{459} + \frac{36}{459} v (9v - 1) = 0.$$

Or, il est visible que  $v = 0$  ou  $> \frac{1}{9}$  donne un résultat positif ; ainsi, la limite supérieure  $l$  des racines positives de cette équation étant plus petite que l'unité, la quantité correspondante  $\frac{1}{l}$  est  $> 1$  ; et par conséquent les différences entre les racines réelles de la proposée sont plus grandes que l'unité. D'ailleurs, la substitution des nombres naturels dans la proposée n'a produit qu'un seul changement de signe ; donc enfin l'équation proposée a une seule racine réelle, qui est comprise entre 2 et 3.

Calculons la partie plus petite que l'unité, de cette racine, par la méthode de Lagrange.

$$x^3 - 6x - 7 = 0.$$

$$x = 2 + \frac{1}{y};$$

$$1^{\text{re}} \text{ transformée } 11y^3 - 6y^2 - 6y - 1 = 0;$$

$$y = 1, \text{ donne } -2,$$

$$y = 2, \dots + 51,$$

$$y = 1 + \frac{1}{y};$$

$$2^{\text{e}} \text{ transformée } 2y'^3 - 15y' - 27y' - 11 = 0,$$

$$\text{ou bien, } y'^3 (2y' - 15) - 27y' - 11 = 0;$$

$$y' = 8 \text{ donne } -163,$$

$$y' = 9, \dots - 11,$$

$$y' = 10, \dots + 219,$$

$$y' = 9 + \frac{1}{y'};$$

3<sup>e</sup> transformée  $11y''^3 - 189y''^2 - 39y'' - 2 = 0$ ,

ou  $y''(11y'' - 189) - 39y'' - 2 = 0$ ;

$$y'' = 17 \text{ donne } -1243,$$

$$y'' = 18 \dots + 2212,$$

$$y'' = 17 + \frac{1}{y''}.$$

Rapprochons les équations

$$x = 2 + \frac{1}{y}, y = 1 + \frac{1}{y'}, y' = 9 + \frac{1}{y''}, y'' = 17 + \frac{1}{y''};$$

on obtient la fraction continue

$$x = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{17}}},$$

dont les réduites sont  $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{29}{10}, \frac{496}{171}$ ,

et la dernière,  $\frac{496}{171}$ , convertie en décimales, donne 2,9005 pour

la valeur de  $x$  à  $\frac{1}{10000}$  près.

(Voyez le n<sup>o</sup> 348, où cette équation a déjà été traitée par la méthode de Newton.)

354. Soit pour second exemple, l'équation

$$8x^3 - 6x - 1 = 0 \dots (1).$$

Les limites supérieures des racines positives et négatives sont  $+1$  et  $-1$ .

Faisant, dans cette équation,  $x = +1, 0, -1$ , on trouve pour résultats  $\dots +1, -1, -3$ ; la substitution ne donne lieu qu'à un seul changement de signe; ainsi nous devons avoir recours à l'équation aux carrés des différences.

Si l'on forme cette équation, soit par la méthode d'élimination (n° 290), soit par les fonctions symétriques (n° 272), on trouve pour résultat,

$$64z^3 - 288z^2 + 324z - 81 = 0.$$

Posons  $z = \frac{1}{v}$ ; il en résulte

$$81v^3 - 324v^2 + 288v - 64 = 0,$$

équation qui peut être mise sous la forme

$$81v^3(v-4) + 32(9v-2) = 0;$$

et il est facile de reconnaître que 3 est, en nombres entiers, la limite supérieure la plus restreinte des racines positives; ainsi

l'on a  $l=3$ ; d'où  $\frac{1}{l} = \frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{\sqrt{l}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Remplaçant  $\sqrt{3}$  par le nombre entier 2, immédiatement supérieur, on obtient  $\frac{1}{2}$  pour la quantité moindre que la plus petite différence qui puisse exister entre les racines réelles de la proposée.

Faisons donc, conformément à la règle du n° 352,  $x = \frac{y}{2}$  dans la proposée; on obtient

$$y^3 - 3y - 1 = 0 \dots (3);$$

équation dont toutes les racines réelles ont entre elles une différence plus grande que l'unité.

Les limites supérieures des racines positives et négatives étant d'ailleurs  $+2$  et  $-2$ , il suffit de faire, dans l'équation (3)...

$$y = +2, +1, 0, -1, -2,$$

ce qui donne les résultats...  $+1, -3, -1, +1, -3$ ;

on obtient évidemment par ces substitutions trois changemens de signe. Ainsi, l'équation (3) a trois racines réelles, l'une

comprise entre 1 et 2, une autre entre 0 et -1, et la troisième entre -1 et -2.

Donc enfin, l'équation (1) a elle-même ses trois racines réelles, l'une comprise entre  $\frac{1}{2}$  et 1, la seconde entre 0 et  $-\frac{1}{2}$ , la troisième entre  $-\frac{1}{2}$  et -1.

Pour approcher davantage de ces racines, on appliquera d'abord à l'équation (3) l'une des deux méthodes d'approximation; après quoi l'on substituera les valeurs de  $y$  obtenues, dans la relation  $x = \frac{y}{2}$ , et l'on obtiendra les valeurs de  $x$  correspondantes.

On trouvera par ce moyen

$$\text{pour l'équation } y^3 - 3y - 1 = 0 \quad \begin{cases} y = 1,847, \\ y = -0,347, \\ y = -1,532, \end{cases}$$

$$\text{et pour l'équation } 8x^3 - 6x - 1 = 0 \quad \begin{cases} x = 0,9397, \\ x = -0,1737, \\ x = -0,7660. \end{cases}$$

Ces valeurs sont exactes à 0,0001 près.

355. *Première remarque.* La méthode exposée n° 352 pour mettre en évidence les racines incommensurables, lorsque les différences entre les racines peuvent être plus petites que l'unité, ne saurait être appliquée à une équation renfermant des racines égales.

En effet, supposons que l'équation ait deux racines réelles égales à  $a$ ; comme ces deux racines ne forment qu'un seul et même nombre, elles sont nécessairement comprises entre deux nombres substitués, quelque petite que soit la différence de ces derniers nombres. Ainsi, ces nombres qui comprennent deux racines, devront (n° 317) donner deux résultats de même signe, aussi bien que deux nombres qui n'en comprendraient pas. Si l'équation pouvait avoir trois racines égales à  $a$ , les deux nombres qui les comprendraient donneraient deux ré-

sultats de signes contraires, aussi bien que deux nombres qui comprendraient une seule fois cette racine. Observons d'ailleurs que, l'équation  $X = 0$  ayant des racines égales, l'équation aux carrés des différences,  $Z = 0$ , aurait nécessairement des racines égales à 0; et alors la limite inférieure des racines positives de cette dernière équation serait 0; c'est-à-dire qu'il faudrait mettre un intervalle nul entre deux substitutions, ce qui serait absurde.

Concluons de là qu'avant d'appliquer la méthode du n° 352; il est nécessaire de débarrasser la proposée des racines égales qu'elle peut avoir (voyez n° 296).

356. *Seconde remarque.* Ce que nous venons de dire suffit pour faire sentir combien l'application de la méthode du n° 352, à des équations particulières, est laborieuse, puisqu'elle suppose, outre la recherche des racines égales, la formation de l'équation aux carrés des différences. Or, dès que la proposée est d'un degré supérieur au 4<sup>e</sup>, les calculs relatifs à la détermination de cette dernière équation sont impraticables par leur longueur. Il est donc à propos de faire connaître quelques circonstances dans lesquelles on peut éviter tous ces calculs.

1°. Si, en substituant les nombres 0, 1, 2..., -1, -2, -3..., compris entre + L et - L', on obtient autant de changemens de signe qu'il y a d'unités dans le degré de la proposée, on est certain (n° 341) que toutes les racines de l'équation sont réelles, et que chacune d'elles a une partie entière différente.

2°. Il peut se faire que, sans connaître les racines d'une équation, l'on sache, à priori, combien elle doit avoir de racines réelles (la Trigonométrie en offre des exemples). Cela posé, il se présente deux cas :

Où la substitution des nombres 0, 1, 2..., -1, -2..., donne lieu à autant de changemens de signe que l'équation a de racines réelles; dans ce cas, toutes les racines réelles sont encore mises en évidence, et chacune d'elles a une partie entière différente.

Où bien, le nombre des changemens de signe est *moindre* que celui des racines réelles. Comme, dans ce cas, on est assuré d'avoir laissé échapper quelques racines dont les différences sont moindres que l'unité, il faut tâcher de rendre ces différences plus grandes. Pour cela, on fait dans la proposée,

$$x = \frac{y}{k}, k \text{ étant une indéterminée, ce qui donne la trans-}$$

formée  $Y = 0$ , dont les racines sont  $k$  fois plus grandes que celles de la proposée (il en est par conséquent de même des différences). On donne ensuite à  $k$  différentes valeurs. Soit, en premier lieu,  $k = 3$ ; substituant dans  $Y = 0$  la série des nombres naturels, on voit si le nombre des changemens de signe devient égal au nombre des racines réelles que l'on sait devoir exister dans la proposée. Si l'hypothèse  $k = 3$  ne réussit pas, on fait  $k = 4, 5, \dots$ , jusqu'à ce qu'enfin l'on obtienne pour la transformée correspondante le nombre de changemens de signe exigé (\*).

N. B. Il faut bien observer ici qu'on suppose que l'équation ne puisse pas avoir de racines égales, à moins qu'elles ne soient imaginaires.

357. Nous terminerons ce paragraphe par l'exposition d'une méthode pour convertir en fraction continue l'expression d'une racine de degré quelconque d'un nombre.

Soit  $P$  un nombre absolu dont il faut extraire la racine  $m^{\text{ième}}$ .

Si l'on pose  $\sqrt[m]{P} = x$ , il en résulte  $x^m - P = 0$ , équation qui n'a évidemment qu'une seule racine réelle et positive. En lui appliquant la méthode de Lagrange, on obtiendra cette racine sous la forme d'une fraction continue, qui exprimera alors la racine  $m^{\text{ième}}$  demandée.

Soit, par exemple,  $\sqrt[3]{11}$  à développer en fraction continue. La question se réduit à résoudre l'équation  $x^3 - 11 = 0$ .

---

(\*) Voyez mon Traité de Géométrie analytique, pour la détermination du nombre des racines réelles d'une équation par des intersections de courbes.

Comme en faisant  $x = 2$  et  $y = 3$  dans le premier membre, on obtient deux résultats de signes contraires,  $-3$  et  $+16$ , il s'ensuit que la racine est comprise entre 2 et 3.

Faisons donc  $x = 2 + \frac{1}{y}$ ; il vient pour

$$1^{\text{re}} \text{ transformée, } 3y^3 - 12y^2 - 6y - 1 = 0,$$

$$\text{ou bien, } 3y^3(y - 4) - 6y - 1 = 0;$$

$$y = 4 \text{ donne } -25,$$

$$y = 5 \dots\dots + 16,$$

$$\text{d'où } y = 4 + \frac{1}{y'};$$

$$2^{\text{e}} \text{ transformée, } 25y'^3 - 42y'^2 - 24y' - 3 = 0,$$

$$\text{ou bien, } y'^2(25y' - 42) - 24y' - 3 = 0;$$

$$y' = 2 \dots\dots\dots - 19,$$

$$y' = 3 \dots\dots\dots + 222,$$

$$\text{d'où } y' = 2 + \frac{1}{y''};$$

$$3^{\text{e}} \text{ transformée, } 19y''^3 - 108y''^2 - 108y'' - 25 = 0,$$

$$\text{ou } y''^2(19y'' - 108) - 108y'' - 25 = 0,$$

$$y'' = 6 \dots\dots\dots - 467,$$

$$y'' = 7 \dots\dots\dots + 1441,$$

$$\text{d'où } y'' = 6 + \frac{1}{y'''}.$$

Ainsi la valeur de  $x$  a pour expression,

$$x = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6 + \dots}}}$$

Les quatre premières réduites étant.

$$\frac{2}{1}, \frac{9}{4}, \frac{20}{9}, \frac{129}{58},$$

la quatrième, convertie en décimales, donne 3,224 à 0,001

près, puisque l'on a évidemment,  $\frac{1}{(58)^2} < \frac{1}{1000}$ .

Cette valeur de  $\sqrt[3]{11}$  est un peu trop forte.

358. Nous indiquerons à cette occasion le moyen de développer toute espèce de nombre incommensurable en fraction continue. Ce moyen suppose que, de quelque manière que ce soit, on ait la possibilité d'extraire de ce nombre la partie entière qui s'y trouve contenue.

Cela posé, soit A le nombre proposé, et désignons par  $a$  sa partie entière. Si du nombre A on retranche  $a$ , la différence  $A - a$  est plus petite que l'unité; donc  $\frac{1}{A-a}$  est un nombre plus grand que l'unité, qui peut être désigné par B.

(De la relation  $\frac{1}{A-a} = B$ , on tire d'ailleurs.....

$$A = a + \frac{1}{B}.)$$

Soit maintenant  $b$  la partie entière de B, partie que l'on est censé savoir déterminer; la différence  $B - b$  est une fraction, et par conséquent,  $\frac{1}{B-b}$  est un nombre plus grand que l'unité, qui peut être désigné par C.

(De la relation  $\frac{1}{B-b} = C$ , l'on tire  $B = b + \frac{1}{C}.$ )

Soit encore  $c$  la partie entière de C; la différence  $C - c$  est une fraction; ainsi  $\frac{1}{C-c}$  est un nombre plus grand que l'unité, qui peut être représenté par D.

(La relation  $\frac{1}{C-c} = D$  donne  $C = c + \frac{1}{D}.$ )

Et ainsi de suite.

Rapprochons actuellement les équations



$$A = a + \frac{1}{B}, \quad B = b + \frac{1}{C}, \quad C = c + \frac{1}{D}.$$

il en résulte 
$$A = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{D}}}$$

359. La méthode exposée en Arithmétique, pour le développement en fraction continue des nombres fractionnaires commensurables, est un cas particulier de celle-ci.

En effet, soit  $A = \frac{347}{89}$ , par exemple.

Pour extraire la partie entière contenue dans ce nombre, il faut effectuer la division, ce qui donne  $a = 3$  et  $A - a = \frac{80}{89}$ ;

d'où  $\frac{1}{A-a}$  ou  $B = \frac{89}{80}$ .

Opérant sur B comme on a opéré sur A, on trouve  $b = 1$  et  $B - b = \frac{9}{80}$ ; d'où  $\frac{1}{B-b}$  ou  $C = \frac{80}{9}$ .

Opérant sur C comme on a opéré sur A et B, on trouve  $c = 8$  et  $C - c = \frac{8}{9}$ ; d'où  $\frac{1}{C-c}$  ou  $D = \frac{9}{8}$ .

Opérant enfin sur D comme on a opéré sur A, B, C, on obtient  $d = 1$  et  $D - d = \frac{1}{8}$ ; d'où  $\frac{1}{D-d}$  ou  $E = 8$ .

Ici l'opération s'arrête, et l'on obtient enfin,

$$A = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8}}}}$$

Ceci conduit évidemment au procédé établi (*Arith.* n° 167).

360. La même méthode s'applique aux *irrationnelles* du second degré; mais il faut y joindre les transformations indiquées n° 91.

Soit, par exemple,  $A = \sqrt{6}$ .

- Il est évident d'abord que ce nombre est compris entre 2 et 3; ainsi, l'on a  $a=2$ ; d'où,  $A-a = \sqrt{6}-2$  et  $\frac{1}{A-a}$

$$\text{ou } B = \frac{1}{\sqrt{6}-2}.$$

Pour obtenir la partie entière contenue dans B, observons que l'on peut (n° 91) multiplier les deux termes de  $\frac{1}{\sqrt{6}-2}$  par

$$\sqrt{6}+2, \text{ ce qui donne } B = \frac{\sqrt{6}+2}{2}. \text{ Or, le numérateur de}$$

cette expression est évidemment égal à 4 plus une fraction; donc, la partie entière de B, ou  $b=2$ , et par conséquent,

$$B-b = \frac{\sqrt{6}+2}{2} - 2 = \frac{\sqrt{6}-2}{2}; \text{ d'où } \frac{1}{B-b}, \text{ ou } \dots$$

$$C = \frac{2}{\sqrt{6}-2}.$$

Opérons maintenant sur C comme on a opéré sur B; il vient  $C = \frac{2(\sqrt{6}+2)}{2}$ , ou bien,  $C = \sqrt{6}+2$ . La partie entière de

ce nombre est égale à 4; et l'on a  $c=4$ ; d'où.....

$$C-c = \sqrt{6}+2-4 = \sqrt{6}-2, \text{ et par conséquent, } \frac{1}{C-c}$$

$$\text{ou } D = \frac{1}{\sqrt{6}-2}.$$

Sans aller plus loin, observons que cette expression de D est identique avec celle de B; donc, puisque l'on a trouvé

$$B = 2 + \frac{1}{C} \text{ et } C = 4 + \frac{1}{D}, \text{ on obtiendra de même, } D = 2 + \frac{1}{E},$$

$$E = 4 + \frac{1}{F}; \text{ et ainsi de suite.}$$

$$\text{Donc enfin, } \sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \dots}}}}$$

A partir de la troisième fraction intégrante, les dénominateurs se répètent périodiquement de deux en deux.

On trouverait, d'après le même procédé,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}; \quad \sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots}}}$$

Tous les nombres *irrationnels du second degré* jouissent de cette propriété curieuse, de donner naissance à des *fractions continues périodiques*. Nous ne pouvons en donner ici la démonstration, parce qu'elle dépend de l'analyse indéterminée du *second degré*, pour laquelle nous avons déjà (n° 142) renvoyé à la *Théorie des Nombres*, de Legendre.

La réciproque est vraie aussi, c'est-à-dire que toute fraction continue périodique appartient à un nombre irrationnel du second degré.

#### § IV. Suite de l'Élimination.

361. Après avoir fait connaître les différens moyens de résoudre (du moins en nombres réels) les équations d'un degré quelconque à une seule inconnue, il convient de s'occuper de la résolution des équations à plusieurs inconnues.

Lorsque le nombre des équations proposées est égal à celui des inconnues, elles n'admettent, en général, qu'un nombre limité de systèmes de valeurs pour ces inconnues. Or, la détermination complète de tous ces systèmes constitue le problème général de l'élimination.

Nous avons déjà exposé (n° 282 et suivans) une partie de ce

problème, celle qui a pour objet de former l'équation finale, c'est-à-dire une équation, fonction d'une seule des inconnues, qui donne toutes les valeurs de cette inconnue, propres à vérifier les équations proposées, en même temps que certaines valeurs des autres inconnues.

La seconde partie consiste à résoudre l'équation finale et à déterminer les valeurs des autres inconnues, correspondantes à celles de l'inconnue qui entre dans cette équation.

Nous considérerons plus particulièrement ici le cas de deux équations à deux inconnues.

362. Avant d'entrer dans tous les détails relatifs à la seconde partie de l'élimination, il est nécessaire de revenir sur la manière dont on forme l'équation finale.

Lorsqu'on emploie la méthode par le commun diviseur, pour éliminer l'une des inconnues, on parvient bien à une équation qui renferme toutes les valeurs convenables de l'autre inconnue; mais cette équation contient aussi généralement des valeurs étrangères; c'est ce que nous nous proposons de faire voir actuellement.

(Pour abrégé, nous conviendrons d'appeler *solution* de deux équations en  $x$  et  $y$ , tout système de valeurs de  $x$  et  $y$  qui, substituées dans ces équations,  $y$  satisfait; c'est-à-dire qui rendent les premiers membres identiquement nuls.)

363. Soient donc deux équations d'un degré quelconque,  $A=0$ ,  $B=0$ ; et, après avoir ordonné les premiers membres par rapport à  $x$ , par exemple, appliquons-leur le procédé du plus grand commun diviseur, avec les modifications qui ont pour objet de rendre les quotiens et les restes entiers. (Nous supposons d'ailleurs, pour le moment, que dans le cours du calcul, on ne supprime aucun facteur fonction de  $y$ ; car on verra plus tard que ces facteurs égaux à 0, peuvent donner des valeurs convenables.)

Désignons par  $a, a', a'', \dots$  les différens facteurs introduits; ces facteurs étant, en général, des fonctions de  $y$ ; soient en outre,  $Q, Q', Q'', \dots R, R', R'', \dots$  les quotiens et les restes successifs.

La série des opérations donnera lieu aux identités suivantes,

$$aA = BQ + R. \dots (1),$$

$$a'B = RQ' + R', \dots (2),$$

$$a''R = R'Q'' + R'' \dots (3),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a^{(n)}R^{(n-1)} = R^{(n-1)}Q^{(n)} + R^{(n)} \dots (n);$$

( $R^{(n)}$  est supposé le reste indépendant de  $x$  et fonction de  $y$  seulement.)

Cela posé, l'identité (1) fait voir que toute solution ( $n^o$  362) du système  $[A=0, B=0]$ , satisfait nécessairement à  $R=0$ ; car  $a$  et  $Q$  étant des polynomes entiers en  $x$  et  $y$ , ne peuvent devenir infinis pour des valeurs particulières attribuées à  $x$  et  $y$ . Ainsi les solutions du système  $[A=0, B=0]$  conviennent au système  $[B=0, R=0]$ .

L'identité (2) prouve également que toute solution du système  $[B=0, R=0]$ , satisfait à  $R'=0$ ; d'où l'on peut conclure que les solutions du système  $[A=0, B=0]$  conviennent encore au système  $[R=0, R'=0]$ .

L'identité (3) démontre que toute solution du système  $[R=0, R'=0]$  satisfait à  $R''=0$ . Donc, les solutions de  $[A=0, B=0]$  conviennent au nouveau système  $[R=0, R'=0, R''=0]$ . Et ainsi de suite.

D'où il suit enfin, que toutes les solutions du système proposé  $[A=0, B=0]$  se trouvent nécessairement comprises dans le dernier système  $[R^{(n-1)}=0, R^{(n)}=0]$ .

Ainsi l'équation  $R^{(n)}=0$  renferme toutes les valeurs convenables de  $y$ .

Je dis maintenant qu'elle peut renfermer des valeurs étrangères.

Pour cela, reprenons les identités (1), (2), (3) ... (n).

On reconnaît, par l'identité (1) que toute solution du système  $[B=0, R=0]$ , satisfait à  $aA=0$ . Or, cette dernière équation se divise en deux autres,  $a=0$  et  $A=0$ ; d'où il suit

que les solutions de  $[B=0, R=0]$  comprennent non-seulement les solutions du système proposé  $[A=0, B=0]$ , mais encore toutes les solutions du système  $[a=0, B=0]$ .

De même, à cause de l'identité (2), toute solution de  $[R=0, R'=0]$ , satisfait à  $a'B=0$ , qui peut être décomposée en deux autres équations  $a'=0$  et  $B=0$ ; donc, les solutions de  $[R=0, R'=0]$  comprennent les solutions du système  $[B=0, R=0]$ , et celles du système  $[a'=0, R=0]$ . Mais on vient de voir que le système  $[B=0, R=0]$ , renferme déjà toutes les solutions des deux systèmes  $[A=0, B=0]$  et  $[a=0, B=0]$ . Donc, le système  $[R=0, R'=0]$ , renferme toutes les solutions des trois systèmes

$$[A=0, B=0], [a=0, B=0], [a'=0, R=0].$$

En continuant ces raisonnemens on verra que le dernier système d'équations  $[R^{(n-1)}=0, R^{(n)}=0]$  comprend non-seulement toutes les solutions du système proposé  $[A=0, B=0]$ , mais encore toutes les solutions des systèmes

$$[a=0, B=0], [a'=0, R=0] \dots [a^{(n)}=0, R^{(n-1)}=0].$$

364. Si l'on était certain qu'en substituant dans l'équation  $B=0$ , chacune des valeurs de  $y$  que donne  $a=0$ , on pût tirer du résultat de cette substitution, une ou plusieurs valeurs de  $x$ , toutes les solutions qu'on obtiendrait ainsi, se trouveraient dans  $[R^{(n-1)}=0, R^{(n)}=0]$  et seraient étrangères à  $[A=0, B=0]$ . Dès lors, pour débarrasser  $R^{(n)}=0$  des valeurs de  $y$  correspondantes à ces solutions étrangères, il suffirait de diviser  $R^{(n)}$  par  $a$ , qui, comme on l'a déjà vu, n'est fonction que de  $y$ .

Même raisonnement par rapport aux autres facteurs  $a', a'' \dots$ , introduits dans le cours du calcul.

Il suit de là que, si l'on divisait  $R^{(n)}$  par le produit  $\dots \times a' \times a'' \dots \times a^{(n)}$ , le quotient résultant égalé à 0, serait la véritable équation finale.

Mais il n'en est pas toujours ainsi, parce que telle valeur de  $y$ , tirée de  $a=0$ , laquelle, dans tous les cas, doit anéantir le

coefficient du premier terme de  $B$ , peut aussi éliminer les coefficients des puissances inférieures de  $x$  jusqu'à la première inclusivement; et dans ce cas, il n'y aurait aucune valeur de  $x$  correspondante.

365. L'exemple suivant éclaircira ce que nous venons de dire.

Soit proposé d'éliminer entre les deux équations

$$y^3x - 3y^2x - y^2 + 2 = 0 \dots\dots\dots (1),$$

$$(y^2 - 3y + 2)x^2 + (y - 1)x - 3y + 1 = 0 \dots (2).$$

Pour éliminer  $x$  entre ces deux équations, il faut, en prenant le polynome (1) pour dividende, et le polynome (2) pour diviseur, il faut, dis-je, multiplier (1) par le facteur  $y^2 - 3y + 2$ , coefficient du premier terme du diviseur.

Cette préparation faite, on effectue la division, ce qui donne pour reste,

$$(-3y^5 + 8y^4 - 5y^3)x + 2y^4 + 2y^3 - 6y + 4 \dots (3).$$

Prenons maintenant le polynome (2) pour dividende et le reste (3) pour diviseur.

Comme le coefficient du premier terme de ce reste, savoir :

$$-3y^5 + 8y^4 - 5y^3,$$

revient à  $-y^3(3y^2 - 8y + 5),$

ou bien encore, à  $-y^3(y - 1)(3y - 5),$

et que le coefficient du premier terme du polynome (2), savoir :

$$y^2 - 3y + 2,$$

peut se décomposer en  $(y - 1)(y - 2),$

il s'ensuit que, pour obtenir des quotiens et des restes entiers, il suffit de multiplier le polynome (2) par  $y^6(y - 1)(3y - 5)^2.$

Effectuant cette multiplication, puis la division du polynome (2) ainsi préparé, par le reste (3), on obtient un certain quotient qu'il est inutile d'écrire ici; et le dernier reste,

c'est-à-dire le polynome indépendant de  $x$ , égalé à 0, donne

$$\left. \begin{aligned} 27y^{10} - 136y^9 + 214y^8 - 112y^7 + 65y^6 - 100y^5 \\ + 30y^4 - 24y^3 + 120y^2 - 112y + 32 \dots\dots \end{aligned} \right\} = 0 \dots (4).$$

Voyons maintenant quels peuvent être les facteurs étrangers renfermés dans cette équation.

1°. Comme on a multiplié le premier membre de l'équation (1) par le facteur  $y^3 - 3y + 2$ , qui, étant décomposé, revient à  $(y - 1)(y - 2)$ , il s'ensuit que l'équation (4) peut contenir comme facteurs étrangers les deux binomes  $y - 1$  et  $y - 2$ .

Cependant, il est aisé de vérifier que cette équation n'est pas satisfaite par  $y = 1$ , mais qu'elle l'est par  $y = 2$ ; le quotient de la division par  $y - 2$  est exact et égal à

$$\begin{aligned} 27y^9 - 82y^8 + 56y^7 - 12y^6 + 41y^5 - 18y^4 - 6y^3 \\ - 36y^2 + 48y - 16 \dots\dots (5). \end{aligned}$$

Pour comprendre comment le facteur  $y - 1$  ne fait pas partie du polynome (4), il suffit d'observer que, si l'on fait  $y = 1$  dans l'équation (2), toutes les puissances de  $x$  disparaissent, et alors il n'en résulte aucune valeur correspondante pour  $x$ .

Au contraire, soit posé  $y = 2$  dans l'équation (2); elle se réduit à  $x - 5 = 0$ , d'où  $x = 5$ ; c'est-à-dire que les deux équations

$$y^3 - 3y + 2 = 0,$$

et  $(y^3 - 3y + 2)x^2 + (y - 1)x - 3y + 1 = 0,$

admettent pour *solution unique*, les valeurs  $x = 5$  et  $y = 2$ .

L'équation (4) doit donc contenir le facteur  $y - 2$ , qui correspond à cette solution, mais ne peut renfermer le facteur  $y - 1$ , auquel ne répond aucune solution.

2°. Dans la seconde opération principale, pour rendre la division possible, on a introduit le facteur  $y^6 (y - 1) (3y - 5)^2$ .

Mais il est facile de reconnaître qu'aucun des facteurs simples, dont se compose ce produit, ne peut entrer dans l'équa-



tion finale ; car en faisant  $y = 0$ , ou  $y = 1$ , ou  $y = \frac{5}{3}$ , dans le reste (3) égalé à 0, la partie affectée de  $x$  disparaît, et il n'en résulte aucune valeur pour  $x$ .

En général, l'introduction du facteur  $a^{(n)}$  (n° 363) dans le reste qui précède le reste du 1<sup>er</sup> degré, n'influe jamais sur l'équation finale, parce que les valeurs de  $y$ , tirées de ce facteur égalé à zéro, réduisent le reste du premier degré à une quantité numérique ; donc il ne peut y avoir aucune valeur de  $x$  correspondante.

Traçons encore le même exemple, en prenant le polynôme (2) pour dividende et le polynôme (1) pour diviseur.

Il faut pour cela multiplier (2) par  $y^3$ , coefficient du premier terme de (1).

Cela fait, on effectue la division, ce qui donne un certain quotient et un reste du premier degré, savoir :

$$(3y^3 - 8y^2 + 5y^2)x - 2y^4 - 2y^3 + 6y - 4 \dots (6).$$

Prenons à son tour le polynôme (1) pour dividende et le reste (6) pour diviseur.

Comme le coefficient du premier terme de ce reste revient à

$$y^3(3y^3 - 8y^2 + 5)$$

ou bien, à

$$y^3(y - 1)(3y - 5),$$

et que le coefficient du premier terme de (1) est  $y^3$ , il suffit de multiplier (1) par  $y^3(y - 1)^2(3y - 5)^2$ .

Après cette préparation, on effectue la division, et l'on obtient pour reste indépendant de  $x$ ,

$$27y^9 - 82y^8 + 50y^7 - 12y^6 + 41y^5 - 18y^4 - 6y^3 - 36y^2 + 48y - 16,$$

résultat identique avec le quotient (5) qu'on avait obtenu en divisant le reste (4) par le facteur  $y - 2$ .

Ici, aucun des facteurs introduits dans le cours du calcul ne se retrouve dans l'équation finale ; et la raison en est que le

facteur  $y^3$ , par lequel on a multiplié (2), étant égalé à 0, le diviseur (1) se réduit à une quantité indépendante de  $x$ ; par conséquent, il n'y a aucune valeur de  $x$  qui corresponde à  $y = 0$ .

366. Si l'on a bien compris ce qui s'est passé dans l'exemple précédent, on entendra aussi facilement LA RÈGLE SUIVANTE, pour débarrasser l'équation finale des facteurs étrangers qu'elle peut renfermer :

Désignons par  $F(y)$  l'un quelconque des facteurs introduits dans le cours du calcul, et par

$$bx^n + cx^{n-1} + dx^{n-2} + \dots + tx + u,$$

le reste-diviseur qui lui correspond; en sorte que les facteurs simples de  $F(y)$  soient des facteurs du coefficient  $b$ .

Premièrement, si, comme cela arrive le plus souvent,  $F(y)$  est immédiatement décomposable en facteurs simples, on égale chacun d'eux à 0, et l'on en tire une valeur de  $y$ .

Lorsqu'aucune de ces valeurs n'anéantit à la fois tous les coefficients  $b, c, d, \dots$ , jusqu'à  $t$  inclusivement, on est certain que  $F(y)$  se trouve tout entier dans l'équation finale, et l'on divise alors le premier membre de cette équation par ce facteur, comme étant étranger.

Si une ou plusieurs valeurs anéantissent à la fois  $b, c, d, \dots, t$ , les facteurs simples correspondans ne se retrouvent pas dans l'équation finale, qui ne renferme de facteurs étrangers provenant de  $F(y)$ , que les facteurs simples dont les valeurs ne rendent pas nulles à la fois  $b, c, d, \dots, t$ . On divise alors le premier membre de l'équation finale par le produit de ces derniers facteurs.

Secondement, si l'équation  $F(y) = 0$ , ne peut pas être immédiatement résolue, ce qui arrive, par exemple, dans le cas où le coefficient  $b$  est du 3<sup>e</sup> degré ou d'un degré supérieur, on recherche le plus grand commun diviseur entre  $F(y)$  et tous les coefficients  $b, c, d, \dots, t$  (voyez n<sup>o</sup> 262). Si l'on n'en trouve pas, on peut encore regarder comme certain que  $F(y)$  se

trouve tout entier dans l'équation finale, et on la débarrasse de ce facteur.

Mais s'il en existe un, soit  $F'(y)$  ce facteur commun; on divise  $F(y)$  par  $F'(y)$ , ce qui donne le quotient  $F''(y)$ , qui est alors le seul facteur étranger [provenant de l'introduction du facteur  $F'(y)$ ] que comprend l'équation finale. Donc il faut diviser le premier membre de cette équation par  $F''(y)$ .

Ce raisonnement s'appliquerait à tout autre facteur introduit.

(Nous n'examinerons pas ici le cas où le facteur commun à  $b, c, d, \dots, l$ , se trouverait aussi dans  $u$ ; c'est une circonstance pour laquelle nous renvoyons aux nos 379 et 382).

On voit donc qu'il est toujours possible de débarrasser l'équation finale des facteurs étrangers qu'elle peut renfermer, et cela, sans supposer connue aucune des méthodes pour résoudre une équation à une seule inconnue (voyez n° 285).

367. *Première remarque.* La méthode d'élimination par le commun diviseur, appliquée à deux équations du second degré en  $x$  et  $y$ , conduit toujours à la véritable équation finale.

En effet, on a vu (n° 116) que deux équations de cette espèce peuvent être ramenées à la forme

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ et } a'x^2 + b'x + c' = 0;$$

$a$  et  $a'$  étant des quantités numériques.

Cela posé, la première préparation à faire subir à l'un des polynômes, se réduisant à l'introduction d'un facteur numérique, ne peut influer sur l'équation finale. Quant à la seconde, qui consiste à multiplier l'un des polynômes proposés par la seconde puissance du coefficient de  $x$  dans le reste du 1<sup>er</sup> degré  $a''x + b''$ , nous avons déjà prouvé (n° 365) que ce facteur introduit ne pouvait entrer dans l'équation finale.

Il en est de même toutes les fois que l'une des équations proposées est du second degré en  $x$  (quel que soit d'ailleurs le degré en  $y$ ); pourvu que le coefficient de  $x^2$  soit une quantité numérique.

368. *Seconde remarque.* Le degré de l'équation finale à la-

quelle on parvient, fait souvent reconnaître la présence des facteurs étrangers. En effet, on a démontré (n° 315) que le degré de l'équation finale ne saurait surpasser le produit des degrés des deux équations proposées. Si donc l'on parvient à une équation d'un degré plus élevé, on est certain qu'il y a des valeurs étrangères. Mais de ce que le degré est précisément égal au produit des degrés des deux équations, on ne peut pas conclure qu'il n'y a pas de valeurs étrangères; car la véritable équation finale est quelquefois moindre que le produit des deux degrés. Il peut même arriver que le degré soit nul, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'équation finale (voyez le n° 374).

En général, le degré de l'équation finale est égal au nombre des solutions dont les équations sont susceptibles.

369. Passons actuellement à la détermination de tous les systèmes de valeurs propres à vérifier deux équations données.

Soient, pour premier exemple, les deux équations

$$y^2 - 3x + 1 = 0 \dots (1),$$

$$(y^2 - 1)x^2 + x - 2 = 0 \dots (2),$$

Après avoir introduit dans le polynôme (1) le facteur...  $(y - 1)^2$ , on effectue la division, et l'on trouve pour premier reste,

$$(y^2 - 5y + 3)x - y^2 + 4y - 1 \dots (3).$$

Multipliant ensuite le polynôme (2) par  $(y^2 - 5y + 3)^2$  et divisant le résultat par le reste (3), on obtient pour le reste fonction de  $y$  seulement,

$$y^5 - 10y^4 + 37y^3 - 64y^2 + 52y - 16 \dots (4).$$

Comme pour effectuer la première opération, on a été obligé d'introduire le facteur  $(y - 1)^2$ , et que  $y = 1$ , substitué dans l'équation (2), donne  $x = 2$ , il s'ensuit que ce facteur doit entrer comme étranger, dans le polynôme (4).

Divisons donc ce polynôme par  $(y - 1)^2$ ; il vient pour résultat,

$$y^3 - 8y^2 + 20y - 16 = 0 \dots (5),$$

équation qui est la véritable équation finale. Si l'on applique à cette équation la méthode des racines commensurables, on trouve pour racines,  $y = 2, y = 2, y = 4$ .

Pour obtenir les trois valeurs de  $x$  correspondantes, il faut, comme on l'a vu (n° 285), substituer chacune de ces valeurs dans le reste du premier degré, et l'on obtient  $x = 1, x = 1, x = -1$ ; c'est-à-dire que les équations proposées admettent trois solutions, dont deux sont égales à  $(x = 1, y = 2)$ ; et la troisième est  $(x = -1, y = 4)$ .

En effet, supposons dans les équations (1) et (2),  $y = 2$ , il vient

$$2x^3 - 3x + 1 \quad \text{et} \quad x^2 + x - 2,$$

polynômes qui, comme il est aisé de s'en assurer, admettent le commun diviseur  $x - 1$ .

Pareillement,  $y = 4$  substitué dans (1) et (2), donne

$$4x^3 - 3x + 1 \quad \text{et} \quad 3x^2 + x - 2,$$

qui admettent le commun diviseur  $x + 1$ .

370. Soient encore les deux équations

$$x^3 - (3y-3)x^2 + (3y^2-6y-1)x - y^3 + 3y^2 + y - 3 = 0 \dots (1)$$

$$x^2 + (2y+4)x + y^2 + 4y + 3 = 0 \dots (2)$$

En appliquant le procédé ordinaire, on obtient pour reste du premier degré,

$$(3y^2 + 3y)x + y^3 + 6y^2 + 5y \dots (3),$$

et pour reste indépendant de  $x$ ,

$$y^5 + 3y^3 + y^2 - 3y^2 - 2y^2 = 0 \dots (4).$$

C'est la véritable équation finale; car, d'après ce qui a été dit n° 367, l'équation (2) étant du second degré, et le coefficient de  $x^2$  étant numérique, l'introduction d'un facteur dans le cours du calcul, ne change rien à l'équation finale.

Cela posé, si l'on résout l'équation (4), on reconnaît facilement qu'elle peut être mise sous la forme

$$y^2(y+1)^2(y+1)(y+2)=0.$$

Considérons d'abord les deux valeurs de  $y$  qui n'entrent qu'une fois dans cette équation.

En faisant  $y=1$  dans le reste (3) et égalant ce reste à 0, on trouve  $6x+12=0$ , d'où l'on déduit  $x=-2$ ; c'est-à-dire que le facteur  $x+2$  devient commun aux deux proposées.

Substituant de même  $y=-1$  dans le reste (3), on obtient  $6x+6=0$ , d'où  $x=-1$ ; donc,  $x+1$  devient diviseur commun des deux équations.

Mais si l'on porte  $y=0$  dans le reste (3), tous les termes de ce reste disparaissent; c'est-à-dire que l'on trouve  $0.x=0$ , d'où  $x=\frac{0}{0}$ .

Pour expliquer cette circonstance, il faut observer que l'hypothèse  $y=0$  rendant nul le reste du premier degré en  $x$ , il est à présumer que c'est le reste du second degré qui devient *diviseur exact* des deux polynomes. En effet, remontons à ce reste du second degré, c'est-à-dire à l'équation (2); il vient, par la substitution de  $y=0$ ,

$$x^2+4x+3.$$

Posant de même  $y=0$  dans le premier membre de l'équation (1), on trouve

$$x^3+3x^2-x-3.$$

Or, il est aisé de reconnaître que ce dernier polynome est divisible par le précédent, et donne pour quotient  $x-1$ .

De l'équation  $x^2+4x+3=0$ , on tire d'ailleurs

$$x=-1, \quad x=-3;$$

et ce sont les deux valeurs de  $x$  correspondantes à  $y=0$ .

Il reste encore à considérer la valeur  $y=-1$ . L'hypothèse

$y = -1$ , introduite dans le reste (3), anéantit encore tous les termes, c'est-à-dire que l'on trouve  $0.x = 0$ , d'où  $x = \frac{0}{0}$ .

Mais si l'on remonte au diviseur du second degré, ou à l'équation (2), il vient par la substitution de  $y = -1$ ,

$$x^2 + 2x = 0,$$

d'où l'on tire  $x = 0$ ,  $x = -2$ .

La même valeur  $y = -1$  reportée dans (1), la réduit à

$$x^3 + 6x^2 + 8x = 0,$$

dont le premier membre est divisible par  $x^2 + 2x$ , et donne pour quotient  $x + 4$ .

Récapitulant ce qui vient d'être dit, on trouve, pour les solutions des équations proposées,

$$\begin{array}{ccccccc} y = & 1, & 2, & 0, & 0, & -1, & -1, \\ x = & -2, & -1, & -1, & -3, & 0, & -2. \end{array}$$

371. *N. B.* Il est à remarquer ici, 1°. que le nombre de solutions est égal au produit des degrés des équations; 2°. que chacune des valeurs de  $y$ , à laquelle il correspond deux valeurs de  $x$ , entre deux fois dans l'équation finale.

Ce résultat est conforme à ce que nous avons dit n° 368, savoir, que le degré de l'équation finale doit être égal au nombre des solutions de la question.

372. Le cas particulier que nous venons d'examiner étant l'un des plus importans de l'élimination, nous allons entrer dans quelques détails à ce sujet.

Toutes les fois que la substitution de l'une des valeurs de l'équation finale en  $y$ , dans le reste du premier degré en  $x$ , anéantit tous ses termes, c'est une preuve certaine qu'à cette valeur de  $y$  il correspond plus d'une valeur de  $x$ , ou, ce qui revient au même, un commun diviseur des deux proposées, d'un degré supérieur au premier.

Pour obtenir ce commun diviseur, ou les valeurs de  $x$  cor-

respondantes à la valeur de  $y$ , il faut la substituer dans le reste du second degré. Si tous les termes de ce reste s'évanouissent encore, on remonte au reste du 3<sup>e</sup> degré, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on en trouve un dont tous les termes ne s'évanouissent plus; et c'est alors le diviseur commun des deux proposées. Égalant ce reste à 0, et résolvant l'équation résultante, on obtient toutes les valeurs de  $x$  correspondantes à la valeur de  $y$  que l'on a considérée.

La réciproque est vraie, c'est-à-dire que, toutes les fois qu'à une même valeur de  $y$ , il doit correspondre deux, trois...,  $n$  valeurs de  $x$ , il arrive nécessairement que les restes du 1<sup>er</sup>, 2<sup>ème</sup>, ...,  $n-1$ <sup>ème</sup> degré s'évanouissent; et le reste du  $n$ <sup>ème</sup> degré, égalé à 0, donne les  $n$  valeurs de  $x$ .

Le facteur du premier degré correspondant à cette valeur de  $y$ , entre d'ailleurs à la  $n$ <sup>ème</sup> puissance dans l'équation finale, conformément à la remarque du n° 371.

373. Quand on substitue dans le reste du premier degré en  $x$ , qu'on suppose de la forme  $Mx + N$ ,  $M$  et  $N$  étant généralement des fonctions de  $y$ , quand on substitue, dis-je, à la place de  $y$  une des valeurs tirées de l'équation finale, il peut arriver deux cas singuliers dont il est bon de faire mention.

1°.  $N$  peut se réduire à 0 par l'effet de cette substitution, et  $M$  à une quantité numérique quelconque.

Dans ce cas, il est évident que la valeur de  $x$  correspondante se réduit à zéro, puisque l'on a

$$x = -\frac{N}{M} = 0.$$

2°.  $N$  peut se réduire à une quantité numérique, et  $M$  à 0.

Dans ce cas, l'équation  $x = -\frac{N}{M}$  donne  $x = -\frac{N}{0}$ , c'est-à-dire que la valeur de  $x$  correspondante devient infinie. Ce résultat, que l'on obtient quelquefois dans les formules du premier et du second degré, peut fort bien convenir



à la question, si elle est de nature à admettre des *solutions infinies* pour  $x$  et *finies* pour  $y$ . La Géométrie analytique en offre des exemples nombreux.

374. Jusqu'à présent, nous avons supposé que l'application de la méthode conduise à une équation finale en  $y$ ; mais il n'en est pas toujours ainsi.

Le reste indépendant de  $x$ , auquel on parvient nécessairement tôt ou tard, peut se réduire à une quantité numérique quelconque, ou à 0.

Examinons d'abord le cas où l'on parvient à un *reste numérique*, c'est-à-dire *indépendant de  $x$  et de  $y$* .

Ce résultat prouve évidemment que les deux équations sont *incompatibles*, ou n'admettent *aucune solution*, puisque, d'après la méthode du n° 284, pour former l'équation finale il faudrait égaler le reste à 0, ce qui conduirait à une absurdité.

En effet, comme en appliquant aux deux polynômes proposés le procédé du commun diviseur, on trouve un *reste numérique*, avant aucune substitution particulière faite pour  $y$ , si l'on donne à cette inconnue une valeur quelconque, et qu'on applique aux deux polynômes résultant de cette substitution le même procédé, on doit nécessairement retrouver le même reste. D'où l'on voit qu'aucune valeur de  $y$  ne peut introduire de commun diviseur en  $x$ , condition qui cependant est inséparable de toute valeur convenable de  $y$ .

Soient, par exemple, les deux équations

$$yx^3 - (y^3 - 3y - 1)x + y = 0, \quad x^3 - y^3 + 3 = 0,$$

$$\begin{array}{r} yx^3 - y^3 \quad \left| \begin{array}{l} x + y \\ x - y \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} x^3 - y^3 \\ + 3 \end{array} \right\} \frac{x^3 - y^3}{yx} \\ + 3y \quad \left| \begin{array}{l} x + y \\ x - y \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} x^3 - y^3 \\ + 3 \end{array} \right\} \frac{x^3 - y^3}{yx} \\ + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x + y \\ x - y \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} x^3 - y^3 \\ + 3 \end{array} \right\} \frac{x^3 - y^3}{yx} \end{array}$$

1<sup>er</sup> reste....  $x + y$

2<sup>e</sup> reste....  $x - y$

Done les équations sont *incompatibles*.

Dans cet exemple, l'impossibilité de l'existence simultanée des deux équations peut être mise en évidence. En effet, il résulte de la première opération, que l'équation en  $x^3$  peut être mise sous la forme

$$(x^3 - y^3 + 3)yx + x + y = 0.$$

D'ailleurs l'équation en  $x^3$  est

$$x^3 - y^3 + 3 = 0;$$

or, toute solution de cette dernière équation anéantit la première partie de l'équation précédente; donc, pour que ces deux équations existent simultanément, il faut que l'on ait à la fois

$$x + y = 0 \text{ et } x^3 - y^3 + 3 = 0,$$

ce qui est impossible, puisque  $x + y = 0$  donne

$$x^3 - y^3 = 0,$$

résultat contradictoire avec  $x^3 - y^3 + 3 = 0$ , tant que  $x$  et  $y$  seront des quantités finies.

375. Considérons actuellement le cas où *le reste est nul*.

Ce résultat prouve que les premiers membres des deux équations ont un commun diviseur en  $x$ , avant aucune substitution particulière pour  $y$  (voyez n° 283), et que ces équations sont indéterminées.

Soit  $D$  le facteur commun aux deux premiers membres; on peut mettre les deux proposées sous la forme

$$A' \times D = 0, \quad B' \times D = 0.$$

Cela posé, l'on voit qu'elles peuvent être satisfaites, soit en posant séparément  $D = 0$ , soit en posant  $A' = 0$ ,  $B' = 0$ .

(Nous ne parlons point des solutions qui pourraient être fournies par  $A' = 0$  et  $D = 0$ , ou bien par  $B' = 0$  et  $D = 0$ , parce qu'elles se trouvent implicitement renfermées dans l'équation unique  $D = 0$ .)

Si maintenant on supprime le facteur  $D$  dans les premiers membres des deux équations, les résultantes seront  $A' = 0$ ,

$B' = 0$ , et n'admettront plus qu'un nombre limité de solutions.

Or, comme il est possible que le facteur commun qui existe entre les deux proposées, et qui les rend *indéterminées*, soit tout-à-fait étranger à la question qui a donné lieu aux équations, que d'ailleurs ce facteur, égalé à zéro, peut n'admettre que des *solutions imaginaires* (telle serait, par exemple, l'équation  $D = x^2 + y^2 + 1 = 0$ , qui donne pour  $y$  des valeurs imaginaires correspondantes à des valeurs de  $x$  réelles, et réciproquement), on conçoit qu'il peut être utile de connaître les solutions des équations  $A' = 0$  et  $B' = 0$ .

Prenons, pour fixer les idées, l'exemple suivant :

Soient les deux équations :

$$x^3 - 3yx^2 + 3y^2x - 5x^2 + 10yx + 6x - y^3 - 5y^2 - 6y = 0 \dots (1),$$

$$x^3 - 5yx^2 + 8y^2x - x - 4y^3 + y = 0 \dots \dots \dots (2).$$

Ordonnant ces deux polynômes par rapport à  $x$ , et divisant (1) par (2), on obtient pour premier reste,

$$(2y - 5)x^2 - (5y^2 - 10y - 7)x + 3y^3 - 5y^2 - 7y \dots (3).$$

Prenant ce reste pour diviseur, le polynôme (2) pour dividende, et faisant la préparation d'usage, on trouve pour second reste,

$$(y^4 - 10y^3 + 35y^2 - 50y + 24)x - y^5 + 10y^4 - 35y^3 + 50y^2 - 24y \dots (4).$$

Enfin, après avoir multiplié le polynôme (3) par le carré du coefficient de  $x$  dans (4), si l'on divise le polynôme (3) ainsi préparé, par (4), on parvient à un reste nul.

Ce résultat semblerait indiquer que (4) est diviseur commun des deux polynômes (1) et (2), puisque la dernière division est exacte; mais cela est évidemment impossible, d'après l'inspection du reste (4), dont les coefficients sont des fonctions en  $y$ , tandis que le coefficient de  $x^3$  dans (1) et (2) est égal à l'unité.

Pour expliquer cette contradiction, il faut observer qu'on a multiplié (3) par le carré du coefficient dont  $x$  est affecté dans (4), sans s'assurer d'abord (n° 38) si ce coefficient n'est pas facteur de la partie de (4) affectée de  $x^0$ . Or, c'est précisément ce qui a lieu ; car cette partie revient à

$$-y(y^4 - 10y^3 + 35y^2 - 50y + 24).$$

Il résulte de cette remarque que ce n'est pas (4) qui est un diviseur commun aux deux proposées, mais (4) débarrassé du facteur  $y^4 - 10y^3 + 35y^2 - 50y + 24$ , ou bien,  $x - y$ .

Supprimant donc le facteur  $x - y$  dans les deux polynômes (1) et (2), on obtient pour résultats,

$$x^2 - (2y + 5)x + y^2 + 5y + 6 = 0 \dots (5),$$

$$\text{et } x^2 - 4yx + 4y^2 - 1 = 0 \dots \dots \dots (6).$$

Concluons de là que, toutes les fois qu'on opère sur deux équations dont les premiers membres, ordonnés par rapport à  $x$ , ont des coefficients premiers entre eux, si l'on parvient, après un certain nombre d'opérations, à un reste nul, et que les coefficients du reste précédent ne soient pas premiers entre eux, ce n'est pas ce reste qui est commun diviseur des deux proposées, mais bien ce reste divisé par le facteur commun à ses coefficients.

Il resterait maintenant à appliquer de nouveau aux deux équations (5) et (6) le procédé de l'élimination, afin d'en déduire l'équation finale qui leur correspond, et, par suite, toutes les solutions des équations (5) et (6). Mais nous allons faire voir que ce calcul est inutile, c'est-à-dire que la première série d'opérations donne l'équation finale relative aux deux équations (5) et (6), ainsi que le reste du 1<sup>er</sup> degré en  $x$  correspondant à cette équation finale.

376. Pour nous rendre compte de cette circonstance d'une manière générale, considérons les deux équations  $A = 0$ ,

$B = 0$ , que nous supposons renfermer un commun diviseur en  $x$  et  $y$ , ou bien en  $x$  seulement.

En appliquant d'abord le procédé aux deux polynômes, on trouvera une première série de quotiens et une première série de restes, lesquels restes (n° 265) contiendront également le facteur commun. Mais si l'on supprime ce facteur dans  $A$  et  $B$ , et qu'on veuille ensuite agir sur les polynômes résultans  $A'$  et  $B'$ , on retrouvera nécessairement les mêmes quotiens et des restes qui ne différeront de ceux de la première série d'opérations, qu'en ce qu'ils ne contiendront plus le facteur commun; donc le dernier reste, entre autres, de la seconde série d'opérations, ne différera du dernier reste de la première série, que parce que le facteur commun ne s'y trouvera plus.

Ainsi déjà, le premier membre de l'équation finale qui correspond à  $A' = 0$ ,  $B' = 0$ , n'est autre chose que le dernier reste de la première série d'opérations, débarrassé du facteur commun à  $A$  et  $B$ ; en d'autres termes, c'est le facteur fonction de  $y$  qui existe entre les coefficients de ce reste.

Quant au reste du premier degré en  $x$  de la seconde série d'opérations, il doit être égal à l'avant-dernier reste de la première série, divisé par le facteur commun; c'est donc le dernier quotient de la première série.

Dans l'exemple précédent, l'équation finale relative aux deux équations (5) et (6) est

$$y^4 - 10y^3 + 35y^2 - 50y + 24 = 0 \dots (7);$$

et le reste du premier degré en  $x$  n'est autre chose que le quotient du reste (3) par  $x - y$ ; ou bien,

$$(2y - 5)x - 3y^2 + 5y + 7 \dots (8).$$

L'équation (7), résolue d'après la méthode des racines commensurables, donne pour valeurs

$$y = 1, 2, 3, 4.$$

Substituant chacune de ces valeurs dans le reste (8), et ré-

solvant ce reste égal à zéro, on trouve pour les valeurs de  $x$  correspondantes,

$$x = 3, 5, 5, 7.$$

377. Considérons, pour second exemple, les deux équations

$$x^3 - (3y - 1)x^2 + (y^2 - 2y)x + y^3 + y = 0 \dots (1),$$

$$x^3 - (y - 1)x^2 - (y - 1)x + 1 = 0 \dots (2).$$

On obtient d'abord pour reste du 2<sup>e</sup> degré,

$$2yx^2 - (y^2 - y - 1)x - y^3 - y + 1 \dots (3),$$

et pour reste du premier degré,

$$(y^4 - 5y^3 + 2y - 1)x + y^4 - 5y^3 + 2y - 1 \dots (4).$$

Mais au lieu d'opérer comme dans l'exemple précédent, c'est-à-dire au lieu de multiplier (3) par le carré de ...  $y^4 - 5y^3 + 2y - 1$ , et de diviser (3) ainsi préparé, par (4), on peut observer sur-le-champ que le reste (4) revient à

$$(y^4 - 5y^3 + 2y - 1)(x + 1).$$

Omettant alors le facteur en  $y$  et divisant (3) par  $x + 1$ , on obtient un quotient exact et égal à

$$2yx - y^2 - y + 1 \dots (5).$$

D'où l'on peut conclure que  $x + 1$  est diviseur commun des deux proposées.

Ces équations débarrassées du facteur  $x + 1$ , se réduisent à

$$x^2 - 3yx + y^3 + y = 0 \dots (6),$$

$$x^2 - xy + 1 = 0 \dots (7);$$

et la question est ramenée à éliminer entre ces deux équations. Or, d'après ce qui a été dit précédemment, on a pour équation finale,

$$y^4 - 5y^3 + 2y - 1 = 0,$$

et pour l'équation du premier degré en  $x$  correspondante, le

résultat (5) égalé à 0, c'est-à-dire

$$2y^2 - y^2 - y + 1 = 0.$$

La première de ces deux équations n'admettant pas de racines commensurables, il faudrait appliquer la méthode des racines incommensurables; après quoi l'on substituerait chacune des valeurs de  $y$  obtenues, dans la seconde équation qui donnerait alors les valeurs de  $x$  correspondantes.

## ÉLIMINATION AVEC SIMPLIFICATION.

378. Les principes qui viennent d'être établis suffisent, à la rigueur, pour tout système d'équations à deux inconnues. Cependant il y a des circonstances où l'on peut apporter de très grandes simplifications dans la détermination, soit de l'équation finale, soit des systèmes de valeurs de  $x$  et de  $y$ .

Reprenons les deux équations déjà traitées n° 370,

$$x^3 - (3y-3)x^2 + (3y^2-6y-1)x - y^3 + 3y^2 + y - 3 = 0 \dots (1),$$

$$x^3 + (2y+4)x + y^3 + 4y + 3 = 0 \dots (2),$$

Après être parvenu au reste du premier degré

$$(3y^2 + 3y)x + y^3 + 6y^2 + 5y \dots (3),$$

on peut observer que le coefficient de  $x$  revient à

$$3y(y+1),$$

et le coefficient de  $x^0$ , à  $y(y^2 + 6y + 5)$ ;

d'où l'on voit d'abord que  $y$  est facteur commun à ces deux coefficients; d'ailleurs  $y^2 + 6y + 5$  devenant nul par l'hypothèse  $y = -1$ , il s'ensuit que  $y+1$  divise ce polynôme. Donc  $y(y+1)$  est diviseur commun des deux coefficients du reste (3).

Cela posé, puisqu'en faisant, soit  $y = 0$ , soit  $y = -1$ , dans le reste (3), ce reste s'évanouit, il en résulte que chacune de ces valeurs, substituée dans le reste du second degré

ou dans (2), rend ce reste diviseur commun des deux propositions.

On peut donc provisoirement supprimer ces deux facteurs, sauf à les introduire à la fin du calcul dans l'équation finale, comme devant en faire partie.

Divisant donc (3) par  $y(y+1)$ , on obtient pour résultat,

$$3x + y + 5 \dots (4).$$

Prenant (2) pour dividende et (4) pour diviseur, on parvient, toute réduction faite, à l'équation finale

$$y^2 + y - 2 = 0 \dots (5).$$

Remarquons maintenant que, puisqu'on a supprimé, dans le cours du calcul, les facteurs  $y$  et  $y+1$ , à chacun desquels correspondent deux valeurs de  $x$ , on doit introduire ces mêmes facteurs à la seconde puissance dans le résultat (en vertu de ce qui a été dit n° 371); et il vient

$$y^2(y+1)^2(y^2+y-2)=0,$$

pour la véritable équation finale. C'est l'équation trouvée n° 370 par la méthode générale.

379. Concluons de là que, toutes les fois qu'on découvre dans les différens restes des facteurs fonctions de  $y$ , on peut les supprimer, pour la simplicité des calculs, et continuer l'opération; mais il faut avoir le soin de les introduire dans le résultat, respectivement à des puissances d'un degré marqué par celui du reste qui précède le reste dans lequel on a opéré la suppression.

N. B. Il peut cependant arriver que quelques-uns de ces facteurs soient identiques avec ceux que la règle du n° 366 prescrit de supprimer dans l'équation finale; auquel cas, on se dispenserait de les rétablir, puisqu'il faudrait, conformément à cette règle, en venir de nouveau à leur suppression.

Nous observerons encore que si, après avoir supprimé des facteurs dans le cours du calcul, on parvient à un reste nu-



mérique (n° 374), on ne doit pas conclure que les équations sont *incompatibles*; mais elles n'admettent pour solutions que les valeurs de  $x$  et de  $y$  qui correspondent aux facteurs supprimés.

380. Appliquons encore ces principes aux deux équations

$$x^3 - (3y+9)x^2 + (3y^2+18y+23)x - y^3 - 9y^2 - 23y - 15 = 0 \dots (1),$$

$$x^3 + (3y-3)x^2 + (3y^2 - 6y - 1)x + y^3 - 3y^2 - y + 3 = 0 \dots (2);$$

on obtient d'abord pour premier reste,

$$(6y+6)x^2 - (24y+24)x + 2y^3 + 6y^2 + 22y + 18 \dots (3).$$

Or, avec un peu d'attention, on reconnaît que  $2(y+1)$  est facteur commun des trois coefficients de ce reste (le dernier coefficient se réduit en effet à 0, par l'hypothèse  $y = -1$ ); supprimant donc ce facteur, on a pour résultat,

$$3x^2 - 12x + y^2 + 2y + 9 \dots (4).$$

Prenons actuellement (2) pour dividende et (4) pour diviseur; il vient, pour nouveau reste,

$$(24y^2 + 48y)x - 48y^2 - 96y \dots (5).$$

On reconnaît encore ici que  $24y(y+2)$  est facteur commun des deux coefficients; et il vient, après la suppression,

$$x - 2 \dots (6)$$

Divisant enfin (4) par (6), on trouve pour quotient,  $3x - 6$ , et pour reste,

$$y^2 + 2y - 3.$$

Revenons sur nos opérations, et observons d'abord que comme, pour rendre les divisions possibles, nous n'avons eu besoin que d'introduire des facteurs numériques, le résultat ne saurait renfermer aucun facteur étranger.

Ceci admis, 1°. puisque dans le reste (3) nous avons supprimé le facteur  $y+1$ , et que le reste précédent est du 3<sup>m</sup>e degré, l'équation finale doit contenir  $(y+1)^3$ .

D'ailleurs, en faisant  $y = -1$  dans ce reste, qui n'est autre chose que l'équation (2), on obtient

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0,$$

d'où l'on déduit  $x = 0, x = 2, x = 4$ .

Ce sont les valeurs de  $x$  correspondantes à  $y = -1$ .

2°. Les facteurs  $y$  et  $y + 2$  ayant été supprimés dans le reste (5), dont le précédent est du second degré, chacun de ces facteurs doit entrer au carré dans l'équation finale.

Posant d'ailleurs  $y = 0$  dans le reste (4), on a pour résultat

$$3x^2 - 12x + 9 = 0;$$

d'où l'on déduit  $x = 1, x = 3$ .

Faisant dans le même reste,  $y = -2$ , on trouve pour résultat,

$$3x^2 - 12x + 9 = 0;$$

ce qui donne encore  $x = 1, x = 3$ .

3°. Enfin, si l'on résout l'équation  $y^2 + 2y - 3 = 0$ , il vient

$$y = 1, y = -3.$$

Or, ces deux hypothèses, introduites dans le reste (6), qui est indépendant de  $y$ , donnent également  $x = 2$ .

Donc l'équation finale cherchée est

$$(y + 1)^2 \cdot y^2 \cdot (y + 2)^2 \cdot (y - 1) \cdot (y + 3) = 0,$$

équation dont le degré est égal au produit de ceux des équations proposées.

On a d'ailleurs pour les solutions de ces équations,

$$\begin{array}{cccccccccccc} y = & -1, & -1, & -1, & 0, & 0, & 2, & -2, & 1, & -3, \\ x = & 0, & 2, & 4, & 1, & 3, & 1, & 3, & 2, & 2; \end{array}$$

d'où l'on peut aussi conclure pour l'équation finale en  $x$ ,

$$x(x-2)^3(x-4)(x-1)^2(x-3)^2 = 0.$$

381. *N. B.* Lorsqu'on a l'attention de supprimer les facteurs en  $y$  qui se rencontrent dans les différens restes, le reste indépendant de  $x$ , auquel on parvient, ne renferme plus aucune valeur de  $y$ , à laquelle il corresponde plusieurs valeurs de  $x$ , c'est-à-dire que le reste du premier degré en  $x$  ne s'évanouit plus par la substitution d'une valeur particulière de  $y$  (voyez n° 372). Mais quelquefois ces facteurs échappent à l'observation, et alors ils se retrouvent dans le résultat de la dernière opération.

Deux nouveaux cas particuliers se rattachent à celui où la méthode est susceptible de simplification.

382. *Premier cas.* Lorsqu'on veut former l'équation finale en  $y$ , il peut se faire que l'une des équations proposées renferme un facteur fonction de  $y$ , ce qu'on peut reconnaître aisément d'après l'inspection des coefficients du polynôme ordonné par rapport à  $x$ .

Dans ce cas, comme en égalant ce facteur à 0, les valeurs de  $y$  correspondantes ont la propriété de vérifier cette équation, quelque valeur que l'on donne à  $x$ , il s'ensuit que, si l'on substitue ces mêmes valeurs de  $y$  dans l'autre équation, les valeurs de  $x$  qu'on en tirera, jointes aux valeurs de  $y$ , donneront autant de solutions communes aux deux équations. Ainsi, l'on pourra supprimer provisoirement ce facteur dans l'équation qui le renferme, opérer ensuite sur les équations résultantes, et introduire dans le résultat le facteur supprimé, à une puissance d'un degré marqué par le degré en  $x$  de l'équation indépendante de ce facteur.

Soient, par exemple, les deux équations

$$3x^3 - 2yx^2 - 3y^2x + 2y^3 = 0 \dots (1),$$

$$(y^2 - y)x - 6y^2 + 6 = 0 \dots (2).$$

Avec un peu d'attention, l'on voit que  $y^2 - 1$  est facteur commun aux deux coefficients de la seconde. Supprimant ce facteur, on trouve pour résultat

$$yx - 6 = 0 \dots (3);$$

et la question est ramenée à éliminer entre les équations (1) et (3).

On trouve, tout calcul fait, pour 1<sup>re</sup> équation finale

$$y^6 - 9y^4 - 36y^2 + 324 = 0 \dots (4),$$

équation dans laquelle il faut introduire le facteur  $(y^2 - 1)^3$ ; ce qui donne pour la véritable équation finale,

$$(y^2 - 1)^3 (y^6 - 9y^4 - 36y^2 + 324) = 0 \dots (5).$$

Le degré est égal à 6 + 6 ou 12, qui est précisément le produit de ceux des équations proposées.

Le facteur  $y^2 - 1 = 0$  donnant d'ailleurs  $y = \pm 1$ , si l'on substitue chacune de ces valeurs dans l'équation (1), on obtient pour valeurs de  $x$  correspondantes,

1°. Pour  $y = 1$ ,  $3x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0$ , d'où  $x = 1, -1, \frac{2}{3}$ ;

2°. Pour  $y = -1$ ,  $3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 = 0$ , d'où  $x = 1, -1, -\frac{2}{3}$ .

Quant à l'équation  $y^6 - 9y^4 - 36y^2 + 324 = 0$ , observons qu'elle peut être mise sous la forme

$$y^2(y^4 - 36) - 9(y^4 - 36) = 0.$$

ou bien,  $(y^2 - 9)(y^4 - 36) = 0$ .

Cela posé, 1°.  $y^2 = 9$  donne  $y = \pm 3$ .

Faisant, dans l'équation  $yx - 6 = 0$ , ...  $y = 3$ ,

il en résulte  $x = \frac{6}{3}$ , c'est-à-dire. ...  $x = 2$ .

Pareillement, si l'on pose. ...  $y = -3$ ,

il en résulte. ...  $x = -2$ .

2°.  $y^4 - 36 = 0$  ou  $(y^2 - 6)(y^2 + 6) = 0$  donne

$$y = \pm \sqrt{6} \text{ et } y = \pm \sqrt{-6}.$$

Reportant ces valeurs dans  $yx - 6 = 0$ , on obtient pour

$$\begin{aligned} y &= +\sqrt{6}, & x &= +\sqrt{6}, \\ y &= -\sqrt{6}, & x &= -\sqrt{6}, \\ y &= +\sqrt{-6}, & x &= -\sqrt{-6}, \\ y &= -\sqrt{-6}, & x &= +\sqrt{-6}. \end{aligned}$$

On a donc enfin pour les 12 solutions des équations proposées,  
 $y=1, 1, 1, -1, -1, -1, 3, -3, \sqrt{6}, -\sqrt{6}, \sqrt{-6}, -\sqrt{-6},$   
 $x=1, -1, \frac{2}{3}, 1, -1, -\frac{2}{3}, 2, -2, \sqrt{6}, -\sqrt{6}, -\sqrt{-6}, \sqrt{-6},$   
 et pour l'équation finale en  $x$ ,

$$(x-1)^2 (x+1)^2 (9x^2-4) (x^2-4) (x^2-6) (x^2+6) = 0.$$

383. *Second cas.* Les coefficients des deux équations ordonnées par rapport à  $x$ , peuvent renfermer un facteur commun fonction de  $y$ .

Dans ce cas, elles sont (n° 283) indéterminées, en ce sens que chacune des valeurs de  $y$ , données par le facteur commun, les vérifie, quelque valeur qu'on y substitue d'ailleurs pour  $x$ . Afin d'ôter l'indétermination, il suffit de supprimer le facteur commun et d'opérer ensuite sur les équations résultantes.

Soient les deux équations

$$(y^2 - y)x^2 + (y^3 - y^2)x + y^4 - y^3 - y + 1 = 0 \dots (1),$$

$$(y^2 - 3y + 2)x^2 + (y^3 - y)x - y^3 + 2y^2 - y = 0 \dots (2).$$

Il est aisé de reconnaître que  $y-1$  est facteur commun de tous les coefficients de (1) et de (2); ainsi,  $y=1$  les vérifie, quelle que soit la valeur de  $x$ . Mais si l'on supprime ce facteur, il vient

$$yx^2 + y^2x + y^3 - 1 = 0,$$

$$(y-2)x^2 + yx - y^3 + y = 0,$$

équations sur lesquelles on peut opérer comme à l'ordinaire.

384. *Remarque générale sur l'élimination.* Il est très important de décomposer, lorsque cela est possible, les équations proposées en facteurs, quand bien même ils devraient être fonc-

tions de  $x$  et  $y$  à la fois. Les calculs de l'élimination se font alors très promptement.

Supposons, par exemple, qu'on ait pu mettre les propositions sous la forme

$$(yx - 6)(x^2 - 1) = 0,$$

$$(2x - 3y)(x^2 - y^2) = 0,$$

ou bien encore, sous celle-ci :

$$(yx - 6)(x - 1)(x + 1) = 0,$$

$$(2x - 3y)(x - y)(x + y) = 0.$$

En combinant successivement chacun des trois facteurs de la première équation, avec chacun des trois facteurs de la seconde, on obtiendra ainsi *neuf* systèmes d'équations, qui pourront remplacer le système proposé, et qu'on pourra traiter successivement.

Par exemple, en combinant les trois facteurs de la première équation avec le premier facteur de la seconde, ce qui donne les systèmes

$$yx - 6 = 0 \text{ et } 2x - 3y = 0,$$

$$x - 1 = 0 \text{ et } 2x - 3y = 0,$$

$$x + 1 = 0 \text{ et } 2x - 3y = 0,$$

on trouve pour le premier,  $\begin{cases} y = 2, & x = 3, \\ y = -2, & x = -3; \end{cases}$

pour le second.....  $y = \frac{2}{3}, \quad x = 1;$

pour le troisième.....  $y = -\frac{2}{3}, \quad x = -1.$

Combinant de même les trois facteurs de la première équation avec le second, puis avec le troisième facteur de la seconde, on trouverait

$$y = \sqrt{6}, -\sqrt{6}, 1, -1, \quad \sqrt{-6}, -\sqrt{-6}, -1, 1,$$

$$x = \sqrt{6}, -\sqrt{6}, 1, -1, -\sqrt{-6}, \sqrt{-6}, -1, 1.$$

Ce qui donnerait ainsi douze solutions différentes.

Quant aux équations finales en  $y$  et en  $x$ , il suffit, pour les

former, de rapprocher les facteurs correspondans aux valeurs de  $y$  et de  $x$ .

On trouvera, par ce moyen, les deux équations

$$(y^2 - 4)(9y^2 - 4)(y^2 - 36)(y^2 - 1)^2 = 0, \\ (x^2 - 9)(x^2 - 1)^2(x^2 - 36) = 0.$$

Ces mêmes équations ne pourraient s'obtenir d'après la méthode ordinaire, que par des calculs extrêmement laborieux (\*).

Si l'une des équations seulement, pouvait être décomposée en facteurs, il suffirait de combiner chacun de ces facteurs égaux à 0, avec l'autre équation; ce qui donnerait autant de *systèmes particuliers* d'équations, auxquelles on appliquerait la méthode.

*N. B.* La remarque précédente sert aussi à faire voir comment on peut former *à priori* des *systèmes* d'équations susceptibles d'admettre des *solutions* données.

Voici de nouveaux exemples d'élimination :

$$1^{\circ}. \quad x^3 + (3y-1)x^2 + (3y^2-2y-9)x + y^3 - y^2 - 9y + 9 = 0, \\ x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0;$$

$$\text{équation en } y \dots\dots\dots y(y-2)^2(y^2-1)(y-3) = 0,$$

$$\text{équation en } x \dots\dots\dots x^2(x^2-1)(x+3)(x+2) = 0.$$

$$2^{\circ}. \quad y^3 + (2x+2)y^2 - x^2y + 7xy - 5y - 2x^3 + 9x^2 - 7x - 6 = 0, \\ y^3 + 3x^2 + 4xy + y + 5x - 2 = 0;$$

$$\text{équation en } x \dots\dots\dots (x-1)^2(4x^2-1)(x-2) = 0,$$

$$\text{équation en } y \dots\dots\dots (4y^3-25)(y+2)(y+3)(y+5) = 0.$$

$$3^{\circ}. \quad x^3 - 2xy + y^3 - 4x + 4y + 3 = 0,$$

$$x^3 - 2xy + y^3 - 6x + 6y - 7 = 0.$$

*Équations incompatibles.*

$$4^{\circ}. \quad x^3 + 2xy + y^3 - 10x - 10y + 21 = 0,$$

$$x^3 + 2xy + y^3 + 6x - 6y + 5 = 0;$$

$$\text{équation en } y \dots\dots\dots (y-4)^2(y-2)(y-6) = 0,$$

$$\text{équation en } x \dots\dots\dots (x-1)^2(x-3)(x+1) = 0.$$

---

(\*) Voyez, pour la décomposition des polynomes, la seconde partie de la note placée à la fin de l'ouvrage.

## CHAPITRE IX.

### *Complément de la théorie des Equations.*

CE chapitre et le suivant ont pour objet des théories qui, offrant plus de difficultés que celles qui ont été exposées dans les précédens, sont néanmoins nécessaires pour compléter l'ensemble des principes de l'analyse algébrique. Celui-ci peut être regardé comme le complément de la théorie des équations, et le dernier, comme le complément de la théorie des suites.

#### § I<sup>er</sup>. Recherche des Racines imaginaires.

385. *Observations préliminaires.* Nous avons donné, dans le huitième chapitre, des méthodes pour déterminer les racines réelles, commensurables ou incommensurables d'une équation numérique. Nous allons maintenant nous occuper de la recherche des racines imaginaires. Au premier abord, cette recherche peut paraître superflue, car ces racines étant des symboles purement algébriques, ne sauraient résoudre la question dont l'équation est la traduction algébrique. Cependant, comme nous l'avons déjà dit, l'emploi de ces expressions dans la haute analyse, est d'un usage très fréquent et conduit quelquefois à des résultats d'une grande importance; c'est pourquoi nous tâcherons de donner une idée du travail des plus célèbres géomètres sur cette partie.

386. Commençons par remarquer que, lorsqu'une équation renferme des racines réelles incommensurables et des racines imaginaires, on ne peut, comme pour les racines commensu-



rables, la débarrasser d'abord de ses racines incommensurables; car les méthodes ne donnent ces racines que par approximation, et si l'on divisait l'équation par les facteurs du premier degré qui correspondent à toutes ces racines, on obtiendrait pour quotient un polynôme dont les coefficients ne seraient que des nombres approchés. Il n'y aurait alors aucune donnée certaine sur le degré d'approximation fourni par les équations, qui ne renfermeraient plus que des racines imaginaires. *Ce moyen pourrait toutefois être employé pour une équation du troisième degré, qui n'aurait qu'une racine réelle.*

Ainsi nous supposons, dans tout ce qui va suivre, que les équations proposées renferment à la fois et des racines incommensurables et des racines imaginaires, à moins qu'elles n'aient que des racines imaginaires.

Nous avons déjà reconnu (n° 328) qu'une équation dont les coefficients sont réels, ne peut avoir de racines imaginaires qu'en nombre pair. Or, les analystes sont parvenus à un résultat plus important encore, c'est que *les racines imaginaires de toute équation à coefficients réels, sont toutes de la forme de celles du second degré, c'est-à-dire de la forme  $a \pm b\sqrt{-1}$ , a et b désignant des quantités réelles, commensurables ou incommensurables.*

387. Avant de passer à la démonstration de cette proposition importante, nous ferons voir que, *lorsqu'une équation a une racine de la forme  $a + b\sqrt{-1}$ , elle en a nécessairement une autre de la forme  $a - b\sqrt{-1}$ , a et b étant les mêmes dans ces deux expressions.*

Pour démontrer ce lemme, considérons l'équation

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0,$$

P, Q, ..., T, U étant des quantités réelles quelconques, et supposons que cette équation soit satisfaite par une expression telle que  $a + b\sqrt{-1}$ ; on aura l'égalité vérifiée

$$(a + b\sqrt{-1})^m + P(a + b\sqrt{-1})^{m-1} + \dots + T(a + b\sqrt{-1}) + U = 0.$$

Développant les calculs et rappelant que les diverses puissances de  $\sqrt{-1}$  sont (n° 178)

$$\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, +1 \mid \sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, +1 \mid \dots,$$

on obtiendra une expression composée de deux parties bien distinctes, savoir : *une partie réelle*, provenant de toutes les puissances paires de  $b\sqrt{-1}$ , combinées avec les puissances  $a^m, a^{m-2}, a^{m-4}, \dots$  de  $a$  et les coefficients  $P, Q, R, \dots$ ; puis *une partie imaginaire*, provenant de toutes les puissances impaires de  $b\sqrt{-1}$ , combinées avec les puissances  $a^{m-1}, a^{m-3}, \dots$  de  $a$  et les coefficients  $P, Q, R, \dots$ .

Désignant donc ces deux parties par  $M$  et  $N\sqrt{-1}$ , l'égalité ci-dessus se réduira à  $M + N\sqrt{-1} = 0$ , équation qui ne peut évidemment subsister qu'autant que l'on a séparément

$$M = 0 \text{ et } N = 0.$$

Actuellement si, dans le premier membre de la proposée, au lieu de  $a + b\sqrt{-1}$ , on substitue  $a - b\sqrt{-1}$ , ce qui donne

$$(a - b\sqrt{-1})^m + P(a - b\sqrt{-1})^{m-1} + \dots + T(a - b\sqrt{-1}) + U,$$

il est facile de voir que le résultat du développement ne différera du précédent qu'en ce que tous les termes affectés des puissances impaires de  $b\sqrt{-1}$  auront changé de signe; car  $(-b\sqrt{-1})^{2n}$  est égal à  $(+b\sqrt{-1})^{2n}$ ; mais  $(-b\sqrt{-1})^{2n+1}$  est égal à  $-(b\sqrt{-1})^{2n+1}$  (voyez n° 168); donc ce résultat sera nécessairement  $M - N\sqrt{-1}$ ,  $M$  et  $N$  désignant ici les mêmes quantités que dans le résultat du premier développement. Or, on a vu tout à l'heure que l'on doit avoir séparément  $M = 0$  et  $N = 0$ ; ainsi l'égalité  $M - N\sqrt{-1} = 0$  est elle-même satisfaite; par conséquent, si  $a + b\sqrt{-1}$  est supposé

racine de la proposée,  $a \pm b\sqrt{-1}$  est nécessairement une autre racine.

Passons maintenant à la démonstration du théorème sur la forme des racines imaginaires.

388. Cette proposition résulte évidemment d'une autre dont voici l'énoncé : toute équation de degré pair, dont les coefficients sont réels, est décomposable en facteurs réels du second degré, c'est-à-dire en facteurs de la forme  $x^2 + px + q$ ,  $x^2 + p'x + q' \dots$ , dans lesquels  $p, q, p', q' \dots$  désignent des quantités réelles quelconques ; car cet autre théorème étant admis, les facteurs  $x^2 + px + q$ ,  $x^2 + p'x + q' \dots$ , égaux à 0, donnent lieu à des racines qui, si elles sont imaginaires, ne peuvent être que de la forme  $a \pm b\sqrt{-1}$ .

Tâchons donc de démontrer ce théorème, que l'on doit regarder comme un des plus beaux de l'Analyse. Voici la démonstration due à M. Laplace.

Soit une équation  $X = 0$  de degré pair  $m$ , et à coefficients réels. Appelons  $a, b, c \dots$  ses différentes racines ; les facteurs du second degré correspondans, seront

$$x^2 - (a+b)x + ab, \quad x^2 - (a+c)x + ac, \quad x^2 - (b+c)x + bc \dots;$$

cela posé, nous allons d'abord faire voir que l'un de ces facteurs, au moins, a des coefficients réels.

En effet, supposons, en premier lieu, que  $m$  soit une seule fois divisible par 2, c'est-à-dire que l'on ait  $m = 2n$ ,  $n$  étant un nombre impair.

On peut toujours (n° 311) former une équation dont les racines soient des combinaisons de celles de la proposée, telles que  $a + b + kab$ ,  $a + c + kac \dots$ ,  $k$  étant un nombre entier tout-à-fait arbitraire. Concevons cette équation formée, et désignons-la par  $Z = 0$ ; son degré est égal au nombre des combinaisons, deux à deux, des racines  $a, b, c \dots$ , c'est-à-dire à  $m \cdot \frac{m-1}{2}$  ou  $n(m-1)$ ; or  $n$  est, par hypothèse, impair, et il en est de même de  $m-1$ ; donc l'équation  $Z = 0$  est de

degré impair; ainsi (n° 327) cette équation a au moins une racine réelle, et cette racine est la valeur de l'une des combinaisons  $a + b + kab$ ,  $a + c + kac$ ...

Maintenant, attribuons à  $k$  une seconde, une troisième... valeur; nous formerons ainsi autant d'équations  $Z=0$ ,  $Z'=0$ ..., qui auront chacune au moins une racine réelle. Il pourra d'abord se faire que la racine réelle de chacune de ces équations appartienne à une combinaison composée de deux lettres différentes de celles qui entrent dans les combinaisons précédentes; mais comme le nombre de ces combinaisons est limité et égal à  $m \cdot \frac{m-1}{2}$  (que l'on peut désigner par  $p$ ), il est clair qu'après avoir attribué à  $k$ ,  $p+1$  valeurs, et formé  $p+1$  équations  $Z=0$ ,  $Z'=0$ ,  $Z''=0$ ..., deux de ces équations seront telles, que la racine réelle de chacune appartiendra à une combinaison composée des deux mêmes lettres; ainsi l'on peut supposer, par exemple, que l'on ait trouvé, en désignant par  $a$  et  $a'$  ces deux racines réelles,

$$a + b + kab = a, \quad a + b + k'ab = a';$$

de ces deux équations, on déduit par l'élimination,

$$1^{\circ}. \quad ab = \frac{a-a'}{k-k'}; \quad 2^{\circ}. \quad a+b = \frac{ka'-k'a}{k-k'};$$

ces valeurs sont nécessairement des quantités réelles et finies; donc il est démontré que l'un des facteurs  $x^2 - (a+b)x + ab$ , au moins, de la proposée, est réel.

Soit en second lieu,  $m=2^n \cdot n'$ ,  $n'$  étant impair; formons encore une équation  $Z=0$ , dont les racines soient des combinaisons de la forme  $a+b+kab$ ...; cette équation sera du degré  $m \cdot \frac{m-1}{2}$  ou  $2n'(m-1)$ ; et  $n'$ ,  $(m-1)$  étant des nombres impairs, ce degré sera pair et une seule fois divisible par 2; donc, en vertu de ce qui vient d'être dit, l'équation  $Z=0$  a au moins un facteur réel du second degré. Ce facteur égalé à 0 donnera lieu à deux valeurs de  $x$ , de la forme  $a \pm \sqrt{-1}$

( $c$  pouvant être 0 ce qui serait, si les deux valeurs de  $p$  étaient réelles). Considérons seulement la première racine, et supposons qu'elle appartienne à la combinaison  $a + b + kab$ .

D'après les raisonnemens précédens, rien n'empêche de supposer encore qu'une autre équation  $Z' = 0$ , formée de la même manière, ait une racine de la forme  $\alpha' + c' \sqrt{-1}$ , qui appartienne à la combinaison  $a + b + k'ab$ , composée des deux mêmes

lettres; en sorte que l'on ait à la fois

$$\begin{cases} a + b + kab = \alpha + c \sqrt{-1} \\ a + b + k'ab = \alpha' + c' \sqrt{-1} \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$ab = \frac{\alpha - \alpha' + (c - c') \sqrt{-1}}{k - k'}; a + b = \frac{ka' - k\alpha + (kc' - k'c) \sqrt{-1}}{k - k'}.$$

Ces expressions sont de la forme  $r + s \sqrt{-1}$  et  $r' + s' \sqrt{-1}$ ; ainsi la proposée a au moins un facteur du second degré, tel que  $x^2 - (r + s' \sqrt{-1})x + r + s \sqrt{-1}$ ; si l'on égale ce facteur à 0, l'on en tire

$$x = \frac{r' + s' \sqrt{-1}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r' + s' \sqrt{-1}}{2}\right)^2 - (r + s \sqrt{-1})}.$$

En développant les calculs sous le radical, on a nécessairement un résultat de la forme  $r'' + s'' \sqrt{-1}$ ; mais  $\sqrt{r'' + s'' \sqrt{-1}}$  réduit en série, d'après la formule du binôme dans le cas de l'exposant fractionnaire, donne (n° 183)

$$r'' + \frac{1}{2} r''^{-\frac{1}{2}} s'' \sqrt{-1} + \frac{1}{2} \frac{-1}{2} r''^{-\frac{3}{2}} \cdot (s'' \sqrt{-1})^2 + \dots,$$

expression qui se réduit elle-même à une autre de la forme  $r'' + s'' \sqrt{-1}$  (voyez n° 387); d'où l'on peut conclure que la première des deux valeurs de  $x$  ci-dessus, est aussi de la forme  $p + q \sqrt{-1}$ ; mais, d'après le lemme démontré même n°, il faut qu'elle en ait une autre telle que  $p - q \sqrt{-1}$ . Or, si l'on multiplie entre eux les deux facteurs  $x - (p + q \sqrt{-1})$

et  $x - (p - q \sqrt{-1})$ , on obtient pour produit,  $(x - p)^2 + q^2$  ou  $x^2 - 2px + p^2 + q^2$ , polynôme du second degré en  $x$  dont les coefficients sont réels. Ainsi, il est encore démontré que, dans le cas de  $m = 2^s \cdot n'$ , l'équation a au moins un facteur réel du second degré.

Soit en troisième lieu,  $m = 2^s \cdot n''$ ,  $n''$  étant impair; on peut former une équation  $Z = 0$  analogue aux précédentes, dont le degré  $m \frac{m-1}{2}$  ou  $2^s \cdot n'' (m-1)$  sera deux fois divisible par 2, et qui, en vertu de ce qui vient d'être dit, aura au moins un facteur réel du second degré; d'où, en répétant les mêmes raisonnemens que dans la seconde partie de la démonstration, l'on pourra conclure que la proposée elle-même a au moins un facteur réel du second degré.

Même raisonnement dans l'hypothèse où l'on aurait.....

$$m = 2^t \cdot n''', m = 2^5 \cdot n''' \dots$$

Donc enfin, toute équation de degré pair quelconque, a au moins un facteur réel du second degré.

CONSEQUENCE. Il est facile de déduire de là que toute équation de degré pair est décomposable dans le produit d'autant de facteurs réels du second degré, qu'il y a d'unités dans  $\frac{m}{2}$  ou dans la moitié de son degré.

En effet, puisqu'une équation de degré pair a au moins un facteur réel du second degré, on peut diviser son premier membre par ce facteur; il en résultera une nouvelle équation de degré pair qui aura encore au moins un facteur réel du second degré, par lequel on pourra diviser le premier membre de cette seconde équation, et ainsi de suite. Donc, le premier membre de la proposée pourra être regardé comme le produit d'autant de facteurs réels du second degré, qu'il y a d'unités dans la moitié de son degré.

Si l'équation était de degré impair, comme en vertu du théorème n° 327, elle aurait au moins une racine réelle, on

pourrait l'en débarrasser, et l'équation résultante serait décomposable en facteurs réels du second degré.

D'où l'on peut conclure, en dernière analyse, le théorème énoncé n° 386, savoir, que les racines imaginaires d'une équation vont par couple, et sont toutes de la forme  $a \pm b\sqrt{-1}$ .

389. *Remarque.* Dans le cours de la démonstration précédente, nous avons eu occasion de considérer une expression de la forme  $\sqrt{a + b\sqrt{-1}}$ , et nous avons démontré qu'elle était réductible à la forme  $a' + b'\sqrt{-1}$ , en la développant en série, d'après la formule du binôme. Mais voici un autre moyen qui a l'avantage de donner la valeur exacte de.....

$\sqrt{a + b\sqrt{-1}}$ , et qui nous conduira d'ailleurs à une conséquence importante, c'est que toutes les expressions imaginaires d'indices supérieurs au second (n° 168), sont réductibles à des expressions imaginaires du second degré.

Reprenons l'expression  $\sqrt{a + b\sqrt{-1}}$ , et proposons-nous d'en déterminer la vraie valeur. ( $a$  et  $b$  sont supposés ici des nombres réels, positifs ou négatifs, commensurables ou incommensurables).

$$\text{Posons } \sqrt{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt{a - b\sqrt{-1}} = u \dots (1),$$

$$\sqrt{a + b\sqrt{-1}} - \sqrt{a - b\sqrt{-1}} = z \dots (2);$$

$$\text{d'où } \sqrt{a + b\sqrt{-1}} = \frac{u + z}{2}, \quad \sqrt{a - b\sqrt{-1}} = \frac{u - z}{2},$$

et tout se réduit à calculer  $u$  et  $z$ .

Or, si l'on élève au carré les équations (1) et (2), il vient

$$2a + 2\sqrt{a^2 + b^2} = u^2 \quad \text{et} \quad 2a - 2\sqrt{a^2 + b^2} = z^2;$$

dans la première de ces deux équations, le premier membre est un nombre essentiellement positif, que l'on peut désigner par  $m^2$  (car on a  $\sqrt{a^2 + b^2} > a$ ); dans la seconde, au contraire, le premier membre est un nombre négatif qui peut être représenté par  $-n^2$ ; ce qui donne les deux nouvelles relations

$$u^2 = m^2, \quad z^2 = -n^2;$$

d'où l'on déduit  $u = \pm m, \quad z = \pm n\sqrt{-1}.$

Substituant ces valeurs dans les expressions ci-dessus de

$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}$  et  $\sqrt{a-b\sqrt{-1}}$ , on obtient enfin

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}} = \frac{\pm m \pm n\sqrt{-1}}{2} = \pm \left( \frac{m+n\sqrt{-1}}{2} \right),$$

$$\sqrt{a-b\sqrt{-1}} = \frac{\pm m \pm n\sqrt{-1}}{2} = \pm \left( \frac{m-n\sqrt{-1}}{2} \right).$$

La difficulté consiste donc à calculer, dans chaque exemple particulier, les nombres absolus  $m$  et  $n$ ; et l'on a, pour leur détermination, les deux formules

$$m^2 = 2a + 2\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \text{d'où} \quad m = \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$n^2 = 2\sqrt{a^2 + b^2} - 2a, \quad \text{d'où} \quad n = \sqrt{2\sqrt{a^2 + b^2} - 2a}.$$

Soit, pour premier exemple, l'expression  $\sqrt{3+2\sqrt{-1}}$ ; on a ici,  $a=3, b=2$ , d'où  $m = \sqrt{6+2\sqrt{13}}; n = \sqrt{2\sqrt{13}-6};$

$$\text{donc } \sqrt{3+2\sqrt{-1}} = \pm \left( \frac{\sqrt{6+2\sqrt{13}} + \sqrt{2\sqrt{13}-6} \cdot \sqrt{-1}}{2} \right).$$

Soit encore l'expression  $\sqrt{16+30\sqrt{-1}}$ ; posons  $a=16, b=30$ ; il en résulte

$$m = \sqrt{32+2\sqrt{1156}}=10 \quad \text{et} \quad n = \sqrt{2\sqrt{1156}-32}=6;$$

$$\text{donc } \sqrt{16+30\sqrt{-1}} = \pm \frac{(m+n\sqrt{-1})}{2} = \pm (5+3\sqrt{-1}).$$

On trouverait de même,  $\sqrt{16-30\sqrt{-1}} = \pm (5-3\sqrt{-1}).$

390. Soit maintenant l'expression  $\sqrt[4]{-1}$  ou  $\sqrt{\sqrt{-1}}$ ; dans ce cas particulier, on a  $a=0$  et  $b=1$ , d'où



$$m = \sqrt{0+2\sqrt{-1}} = \sqrt{2}, \quad n = \sqrt{2\sqrt{-1}-0} = \sqrt{2};$$

donc  $\sqrt[4]{-1}$  ou  $\sqrt{\sqrt{-1}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (1 + \sqrt{-1})$ .

Considérons encore l'expression  $\sqrt[8]{-1}$ , qui est dite une imaginaire du troisième ordre, parce que le facteur 2 entre trois fois dans son indice.

Cette expression revient à

$$\sqrt[4]{\sqrt{-1}} \text{ ou } \sqrt{\pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (1 + \sqrt{-1})};$$

or, on obtient, d'après les formules précédentes,

$$\sqrt{1 + \sqrt{-1}} = \pm \left( \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2} \cdot \sqrt{-1} \right);$$

donc,

$$\sqrt[8]{-1} = \sqrt{\pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \times \pm \left( \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2} \cdot \sqrt{-1} \right)}.$$

Si l'on prend d'abord le signe supérieur dans le facteur  $\sqrt{\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}}$  qui revient à  $\frac{1}{2}\sqrt{\pm 2\sqrt{2}}$ , on trouve, toute réduction faite,

$$\sqrt[8]{-1} = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{-1});$$

et si l'on prend le signe inférieur,

$$\sqrt[8]{-1} = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{-1} - \sqrt{2-\sqrt{2}}).$$

Ces deux derniers exemples font voir que les radicaux imaginaires de degré supérieur au second, sont susceptibles d'être ramenés à des radicaux imaginaires du second degré ou du premier ordre.

391. *Détermination des racines imaginaires des équations.*

La forme des racines imaginaires d'une équation étant connue, nous pouvons procéder à leur recherche.

$$\text{Soit } x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0,$$

une équation renfermant des racines réelles incommensurables et des racines imaginaires.

Désignons par  $p + q\sqrt{-1}$ , l'une de ces dernières; il vient par la substitution de ce binome dans la proposée,

$$(p + q\sqrt{-1})^m + P(p + q\sqrt{-1})^{m-1} + \dots + T(p + q\sqrt{-1}) + U = 0.$$

Or, si l'on développe les calculs, et qu'on appelle  $M$  l'ensemble des termes réels,  $N\sqrt{-1}$  l'ensemble des termes imaginaires, l'égalité ci-dessus revient à  $M + N\sqrt{-1} = 0$ , équation qui ne peut exister à moins que l'on n'ait séparément

$$M = 0 \text{ et } N = 0.$$

Observons actuellement que ces équations renferment les deux indéterminées  $p$  et  $q$ , combinées avec les coefficients de la proposée. Si donc, on cherche tous les systèmes de valeurs de  $p$  et de  $q$ , EN NOMBRES RÉELS COMMENSURABLES OU INCOMMENSURABLES, propres à vérifier ces deux équations, et qu'on les substitue dans l'expression  $p + q\sqrt{-1}$ , on obtiendra ainsi successivement toutes les racines imaginaires de la proposée.

Telle est la méthode générale pour découvrir les racines imaginaires. Nous ferons toutefois quelques remarques qui peuvent faciliter cette recherche, et qui sont d'ailleurs assez importantes en elles-mêmes.

392. Supposons que, pour obtenir les racines réelles incommensurables d'une équation  $X = 0$ , on ait été obligé (n° 351) de former l'équation aux carrés des différences,  $Z = 0$ , et voyons le parti qu'on en peut tirer pour les racines imaginaires.

Désignons par  $a, b, c, \dots$  les racines réelles de  $X = 0$ , et par  $p \pm q\sqrt{-1}, p' \pm q'\sqrt{-1}, \dots$ , les racines imaginaires; pre-

nous d'ailleurs successivement les différences entre toutes ces racines considérées deux à deux ; on en obtient de quatre espèces :

1°. Une différence entre deux racines réelles, telle que  $a-b$ ,  $a-c$ ,  $b-c$ ...

2°. Une différence entre deux racines imaginaires conjuguées,

$$p+q\sqrt{-1}-(p-q\sqrt{-1})=2q\sqrt{-1}; 2q'\sqrt{-1}; 2q''\sqrt{-1};$$

3°. Une différence entre une racine réelle et une racine imaginaire,  $a-p-q\sqrt{-1}$ ;  $a-p+q\sqrt{-1}$ ;  $b-p'-q'\sqrt{-1}$ ...

4°. Enfin, une différence entre deux racines imaginaires non conjuguées,  $p-p'+(q-q')\sqrt{-1}$ ;  $p-p'-(q-q')\sqrt{-1}$ ...

Or, pour peu qu'on jette les yeux sur ces différences, on reconnaît que les carrés des premières sont des nombres essentiellement positifs ; les carrés des secondes différences sont  $-4q^2$ ,  $-4q'^2$ ..., c'est-à-dire des quantités réelles, mais essentiellement négatives. Quant aux carrés des deux autres espèces, ce sont, en général, des expressions imaginaires.

Ainsi, en supposant déjà formée l'équation  $Z=0$ , les racines réelles et négatives de cette équation sont les carrés des différences entre deux racines imaginaires conjuguées.

Appelons donc  $-\alpha$ ,  $-\zeta$ ,  $-\gamma$ ... ces racines, que l'on peut obtenir, soit par la méthode des racines commensurables, soit par la méthode des racines incommensurables ; on a

$$4q^2=\alpha; 4q'^2=\zeta; 4q''^2=\gamma\ldots;$$

d'où l'on déduit

$$q=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\alpha}; q'=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\zeta}; q''=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}.$$

Connaissant les valeurs de  $q, q', q''$ ..., on obtiendra celles de  $p, p', p''$ ..., en substituant  $\pm\frac{1}{2}\sqrt{\alpha}$ ,  $\pm\frac{1}{2}\sqrt{\zeta}$ ... à la place de  $q$  dans les équations  $M=0$ ,  $N=0$ , que l'on a établies dans

le n<sup>o</sup> précédent, et qui acquerront, pour chaque substitution, un commun diviseur en  $p$ , lequel, égal à 0, donnera les valeurs de  $p, p', p'' \dots$

A la vérité, ce moyen est en défaut, lorsque l'une des racines réelles de la proposée est identique avec la partie réelle  $p, p' \dots$  de l'une des racines imaginaires; car dans le cas de  $a=p$ , par exemple, les deux différences  $a-p-q\sqrt{-1}$ ,  $a'-p+q'\sqrt{-1}$  se réduisent à  $-q\sqrt{-1}$  et  $q'\sqrt{-1}$ , dont les carrés sont égaux à  $-q^2$ ; il est encore en défaut, lorsque les parties réelles de deux racines imaginaires non conjuguées sont identiques, car, par exemple,  $p=p'$  réduit les différences

$$p-p'+(q-q')\sqrt{-1}, p-p'-(q-q')\sqrt{-1}, \text{ à } (q-q')\sqrt{-1} \text{ et } -(q-q')\sqrt{-1},$$

dont les carrés sont égaux à  $-(q-q')^2$ .

D'où l'on voit que l'équation  $Z=0$  peut quelquefois avoir des racines négatives qui ne représentent pas les valeurs de  $-4q^2, -4q'^2 \dots$ , mais il est toujours possible de reconnaître si une racine négative telle que  $-a'$  est une valeur convenable,

à ce qu'en substituant  $\frac{1}{2}\sqrt{a'}$  dans  $M$  et  $N$ , il faut et il suffit

que les deux polynomes en  $p$ , résultant de cette substitution, aient un diviseur commun; toute valeur qui ne satisfera pas à cette condition, devra être rejetée, comme provenant de l'une des circonstances dont nous venons de parler.

Nous observons encore que, dans ces mêmes circonstances, il faudrait que l'équation  $Z=0$  eût des racines égales, puisque nous avons reconnu plus haut que dans l'hypothèse de  $a=p$ , deux carrés au moins se réduisent à  $-q^2$ ; et dans l'hypothèse de  $p=p'$ , deux carrés au moins se réduisent à  $-(q-q')^2$ ; ainsi l'on pourrait, par la méthode des racines égales, débarrasser l'équation  $Z=0$  des valeurs différentes de  $-4q^2, -4q'^2$ .

Quoi qu'il en soit, on conçoit combien la méthode pour dé-

couvrir les racines imaginaires d'une équation, doit être pénible et laborieuse, toutes les fois que l'équation est d'un degré supérieur au troisième.

## § II. Résolution complète de l'équation à deux termes.

393. On appelle ainsi, toute équation qui ne renferme qu'une seule puissance de l'inconnue et des quantités toutes connues. Il résulte de là que toute équation à deux termes peut être ramenée à la forme

$$x^m \pm p = 0,$$

$p$  étant un nombre absolu. Cela posé, regardons comme connue la valeur arithmétique de  $\sqrt[m]{p}$ , et posons  $x = y \cdot \sqrt[m]{p}$ ; il vient par la substitution,

$$py^m \pm p = 0, \text{ d'où } y^m \pm 1 = 0;$$

ainsi, c'est de la résolution de cette dernière équation que dépend celle de toutes les équations à deux termes.

Comme l'équation  $y^m - 1 = 0$  revient à  $y^m = 1$ , on voit que tout se réduit à trouver pour  $y$ , les nombres, ou plus correctement, les expressions numériques ou algébriques qui, élevées à la  $m^{\text{ième}}$  puissance, peuvent produire l'unité. C'est pour cette raison que les valeurs de l'équation  $y^m - 1 = 0$ , sont appelées les racines de l'unité.

Les valeurs de l'équation  $y^m + 1 = 0$ , ou  $y^m = -1$ , sont dites les racines de l'unité négative.

Nous avons déjà résolu (nos 176 et 302) plusieurs espèces d'équations à deux termes. Nous nous proposons actuellement de les résoudre complètement, quel que soit leur degré; mais avant, il est bon de faire connaître quelques propriétés des équations  $y^m - 1 = 0$ ,  $y^m + 1 = 0$ , ou des racines de l'unité.

394. Premièrement, l'équation  $y^m - 1 = 0$  n'a qu'une seule racine réelle,  $+1$ , si  $m$  est impair; et elle n'a que deux racines réelles,  $+1$  et  $-1$ , si  $m$  est pair.

En effet, lorsque  $m$  est impair, aucun nombre négatif ne peut évidemment satisfaire à l'équation ; et tout nombre absolu plus grand ou plus petit que 1 donne nécessairement  $y^m > 1$  ; ainsi il n'y a que le nombre réel  $+1$  qui puisse vérifier l'équation. Lorsque  $m$  est pair,  $+1$  et  $-1$  la vérifient ; mais tout autre nombre réel positif ou négatif, donne un résultat différent de 0 pour  $y^m - 1$  ; donc, etc.

*Secondement.* L'équation  $y^m + 1 = 0$  n'a qu'une seule racine réelle,  $-1$ , si  $m$  est impair ; et elle n'a que des racines imaginaires, si  $m$  est pair.

Car d'abord, quel que soit  $m$ , aucun nombre absolu ne peut  $y$  satisfaire. En outre, si  $m$  est pair, aucun nombre négatif ne peut évidemment la vérifier ; et si  $m$  est impair, tout nombre négatif différent de  $-1$ , donne pour  $y^m + 1$ , un résultat différent de 0.

*Remarque.* Les racines de l'équation  $y^m - 1 = 0$ , ou de l'équation  $y^m + 1 = 0$ , sont toutes inégales ; car le polynôme dérivé du premier membre étant  $my^{m-1}$  (n° 278), cette expression n'a aucun diviseur commun avec  $y^m - 1$  ou  $y^m + 1$  (voyez n° 293).

395. Si l'on désigne par  $\alpha$  l'une quelconque des racines imaginaires de l'équation  $y^m - 1 = 0$ , on a également  $\alpha^p$  pour racine de cette équation ( $p$  étant un nombre entier quelconque positif ou négatif). Car, puisque  $\alpha$  vérifie l'équation, on a l'égalité  $\alpha^m = 1$ , d'où  $(\alpha^m)^p = 1$ , égalité que l'on peut transformer ainsi,  $(\alpha^p)^m = 1$  ; d'où l'on voit que  $\alpha^p$  est aussi racine de l'équation. Donc,  $\alpha$  étant une des racines imaginaires de l'équation  $y^m - 1 = 0$ , l'on a également pour racines,

$$\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \dots, \alpha^{m-1}, \alpha^{-1}, \alpha^{-2}, \alpha^{-3}, \dots$$

*N. B.* Plusieurs de ces puissances rentrent nécessairement les unes dans les autres. Car soit, par exemple, l'équation  $y^5 - 1 = 0$  ; si  $\alpha$  est une racine imaginaire, on a l'égalité  $\alpha^5 - 1 = 0$ , d'où  $\alpha^5 = 1$  ; donc  $\alpha^6$  ou  $\alpha^5 \times \alpha^1$  est égal à  $\alpha$  ; de même,  $\alpha^7$  ou  $\alpha^5 \times \alpha^2$  est égal à  $\alpha^2$ ....

Si  $\alpha$  désigne l'une quelconque des racines imaginaires de l'équation  $y^m + 1 = 0$ ,  $\alpha^p$  est aussi racine ( $p$  étant un nombre impair quelconque, positif ou négatif).

En effet, de l'équation  $\alpha^m = -1$ , on déduit  $(\alpha^m)^p = -1$ , puisque  $p$  est, par hypothèse, impair; or, cette égalité revient à  $(\alpha^p)^m = -1$ ; donc  $\alpha^p$  est racine de la même équation. Ainsi,  $\alpha^1, \alpha^3, \alpha^5, \dots, \alpha^{-1}, \alpha^{-3}, \alpha^{-5}, \dots$ , sont des racines de l'équation  $y^m + 1 = 0$ .

396. Résolution de l'équation  $y^m - 1 = 0$ .

Cette résolution repose sur une formule trigonométrique que nous allons d'abord faire connaître.

Si l'on multiplie entre elles les deux expressions

$$\cos a + \sin a. \sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \cos b + \sin b. \sqrt{-1},$$

on a pour produit,

$$\cos a. \cos b + (\sin a. \cos b + \sin b. \cos a). \sqrt{-1} - \sin a. \sin b;$$

donc à cause des formules

$$\cos(a + b) = \cos a. \cos b - \sin a. \sin b,$$

$$\sin(a + b) = \sin a. \cos b + \sin b. \cos a,$$

$$\begin{aligned} \text{il vient} \quad & (\cos a + \sin a. \sqrt{-1})(\cos b + \sin b. \sqrt{-1}) \\ & = \cos(a + b) + \sin(a + b). \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Soit  $a + b = a'$ , et multiplions  $\cos a' + \sin a'. \sqrt{-1}$  par  $\cos c + \sin c. \sqrt{-1}$ ; on trouvera de même

$$\begin{aligned} & (\cos a' + \sin a'. \sqrt{-1})(\cos c + \sin c. \sqrt{-1}) \\ & = \cos(a' + c) + \sin(a' + c). \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} & (\cos a + \sin a. \sqrt{-1})(\cos b + \sin b. \sqrt{-1})(\cos c + \sin c. \sqrt{-1}) \\ & = \cos(a + b + c) + \sin(a + b + c). \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

En général, soit un nombre  $m$  d'arcs  $a, b, c, \dots, p$ ; on a

évidemment le résultat

$$(\cos a + \sin a \cdot \sqrt{-1})(\cos b + \sin b \cdot \sqrt{-1}) \dots (\cos p + \sin p \cdot \sqrt{-1}) \\ = \cos(a + b + c + \dots + p) + \sin(a + b + c + \dots + p) \cdot \sqrt{-1}.$$

Supposons maintenant  $a = b = c = \dots = p$ ; il en résulte  $a + b + c + \dots + p = ma$ ; d'où

$$(\cos a + \sin a \cdot \sqrt{-1})^m = \cos ma + \sin ma \cdot \sqrt{-1} \dots (1).$$

Cette formule étant vraie, quel que soit l'arc  $a$ , on peut remplacer  $a$  par  $-a$ , et si l'on se rappelle que  $\cos(-a) = \cos a$ ,  $\sin(-a) = -\sin a$ , il en résulte cette nouvelle formule

$$(\cos a - \sin a \cdot \sqrt{-1})^m = \cos ma - \sin ma \cdot \sqrt{-1} \dots (2).$$

On sait encore que  $2\pi$  désignant une circonférence de cercle, 1 le rayon et  $k$  un nombre entier absolu quelconque, on a

$$\cos 2k\pi = 1 \quad \text{et} \quad \sin 2k\pi = 0 \dots (3).$$

397. Cela posé, il résulte évidemment des trois formules que l'on vient d'obtenir,

$$\left( \cos \frac{2k\pi}{m} \pm \sin \frac{2k\pi}{m} \cdot \sqrt{-1} \right)^m = \cos 2k\pi \pm \sin 2k\pi \cdot \sqrt{-1} = 1;$$

d'où l'on voit que, quel que soit le nombre entier  $k$ , l'expression  $\cos \frac{2k\pi}{m} \pm \sin \frac{2k\pi}{m} \sqrt{-1}$  jouit de la propriété d'être une racine  $m^{\text{ième}}$  de l'unité, c'est-à-dire de satisfaire à l'équation  $y^m - 1 = 0$ .

Pour obtenir les différentes racines, il ne s'agit que d'attribuer à  $k$  les valeurs 0, 1, 2, 3, ..., puis de calculer, au moyen des *Tables trigonométriques*, les valeurs correspondantes de  $\cos \frac{2k\pi}{m}$  et de  $\sin \frac{2k\pi}{m}$ .

*Discussion.* Puisque  $k$  désigne un nombre entier tout-à-fait arbitraire, il semble que l'expression  $y = \cos \frac{2k\pi}{m} \pm \sin \frac{2k\pi}{m} \cdot \sqrt{-1}$



doive présenter une infinité de valeurs; mais nous allons voir qu'elle ne fournit réellement que  $m$  valeurs différentes.

Observons d'abord que, pour une même valeur attribuée à  $k$ , les deux expressions générales de  $y$  forment deux racines imaginaires conjuguées; ce qui s'accorde avec le théorème du n° 388. En outre, ces deux racines sont réciproques l'une de l'autre; car on a pour leur produit,

$$\left( \cos \frac{2k\pi}{m} + \sin \frac{2k\pi}{m} \cdot \sqrt{-1} \right) \left( \cos \frac{2k\pi}{m} - \sin \frac{2k\pi}{m} \cdot \sqrt{-1} \right) \\ = \cos^2 \frac{2k\pi}{m} + \sin^2 \frac{2k\pi}{m} = 1.$$

Cette seconde propriété s'accorde encore avec ce qui a été dit n° 302 : toutes les racines de l'équation  $y^m - 1 = 0$  sont réciproques deux à deux, à l'exception de  $+1$ , si  $m$  est impair, et de  $+1, -1$ , si  $m$  est pair.

Actuellement, donnons à  $k$  toutes les valeurs entières comprises depuis 0 jusqu'à  $\frac{m-1}{2}$  inclusivement, si  $m$  est impair, et depuis 0 jusqu'à  $\frac{m}{2}$ , si  $m$  est pair; il viendra, par ces substitutions, pour

$$k = 0, \dots y = \cos 0 \pm \sin 0 \cdot \sqrt{-1} = 1,$$

$$k = 1, \dots y = \cos \frac{2\pi}{m} \pm \sin \frac{2\pi}{m} \cdot \sqrt{-1},$$

$$k = 2, \dots y = \cos \frac{4\pi}{m} \pm \sin \frac{4\pi}{m} \cdot \sqrt{-1},$$

$$k = 3, \dots y = \cos \frac{6\pi}{m} \pm \sin \frac{6\pi}{m} \cdot \sqrt{-1},$$

$$\dots$$

$$k = \frac{m-1}{2}, \dots y = \cos \frac{(m-1)\pi}{m} \pm \sin \frac{(m-1)\pi}{m} \cdot \sqrt{-1},$$

ou bien,

$$k = \frac{m}{2}, \dots, y = \cos \pi \pm \sin \pi \sqrt{-1} = -1.$$

Ce tableau donne toutes les racines de l'équation.

En effet, 1°. lorsque  $m$  est impair, chacune des valeurs  $k = 1, 2, 3, \dots, \frac{m-1}{2}$  fournissant deux racines pour  $y$ , le nombre total de ces valeurs donne nécessairement  $2 \cdot \frac{m-1}{2}$  ou  $m-1$  racines; d'ailleurs  $k=0$  donne la racine 1; ainsi le nombre des racines fournies par  $k=0, 1, 2, 3, \dots, \frac{m-1}{2}$  est  $m$ . Toutes ces racines sont essentiellement différentes, car les arcs  $0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \dots, \frac{(m-1)\pi}{m}$ , étant tous moindres que  $\pi$  ou la demi-circonférence, ont au moins des cosinus différents.

2°. Lorsque  $m$  est pair, les deux valeurs extrêmes,  $k=0$  et  $k=\frac{m}{2}$ , fournissent les deux racines  $+1$  et  $-1$ ; d'ailleurs les valeurs intermédiaires  $k=1, 2, 3, \dots, \left(\frac{m}{2}-1\right)$ , donnent chacune deux racines; donc le nombre total des racines qui correspondent à  $k=0, 1, 2, \dots, \left(\frac{m}{2}-1\right), \frac{m}{2}$ , est exprimé par  $2 + 2\left(\frac{m}{2}-1\right)$ , ou par  $m$ ; et ces racines sont essentiellement différentes, par la même raison que ci-dessus.

Il nous reste maintenant à faire voir qu'en attribuant à  $k$  de nouvelles valeurs plus grandes que  $\frac{m-1}{2}$  ou  $\frac{m}{2}$ , on retombera sur les mêmes racines.

Soit d'abord  $m$  un nombre impair, et supposons  $k = \frac{m-1}{2} + n$ ,  $n$  étant un nombre entier quelconque; il vient

$$y = \cos \frac{(m+2n-1)\pi}{m} \pm \sin \frac{(m+2n-1)\pi}{m} \cdot \sqrt{-1},$$

$$\text{ou bien, } y = \cos \left[ \pi + \frac{(2n-1)\pi}{m} \right] \pm \sin \left[ \pi + \frac{(2n-1)\pi}{m} \right] \cdot \sqrt{-1}.$$

Or, je dis que ces deux valeurs sont identiques avec celles qui ont été déjà données par  $k = \frac{m-1}{2} - (n-1)$  ou  $k = \frac{m-2n+1}{2}$ ; en effet, cette valeur de  $k$  donne

$$y = \cos \frac{(m-2n+1)\pi}{m} \pm \sin \frac{(m-2n+1)\pi}{m} \cdot \sqrt{-1},$$

ou bien

$$y = \cos \left[ \pi - \frac{(2n-1)\pi}{m} \right] \pm \sin \left[ \pi - \frac{(2n-1)\pi}{m} \right] \cdot \sqrt{-1};$$

mais on sait que, pour deux arcs  $\pi + a$  et  $\pi - a$ , l'on a  $\cos(\pi + a) = \cos(\pi - a)$  et  $\sin(\pi + a) = -\sin(\pi - a)$ ; d'où l'on conclut

$$\cos \left[ \pi + \frac{(2n-1)\pi}{m} \right] = \cos \left[ \pi - \frac{(2n-1)\pi}{m} \right],$$

$$\sin \left[ \pi + \frac{(2n-1)\pi}{m} \right] = -\sin \left[ \pi - \frac{(2n-1)\pi}{m} \right].$$

Donc enfin, les deux racines correspondantes à.....

$k = \frac{m-1}{2} + n$  sont identiques avec celles qui correspondent à  $k = \frac{m-1}{2} - (n-1)$ ; la seule différence, c'est qu'on trouve les deux racines dans un ordre inverse.

Si  $m$  est pair, soit fait  $k = \frac{m}{2} + n$ ; il en résulte

$$y = \cos \frac{m\pi + 2n\pi}{m} \pm \sin \frac{m\pi + 2n\pi}{m} \cdot \sqrt{-1},$$

$$\text{ou bien, } y = \cos \left( \pi + \frac{2n\pi}{m} \right) \pm \sin \left( \pi + \frac{2n\pi}{m} \right) \cdot \sqrt{-1};$$

mais si l'on fait  $k = \frac{m}{2} - n$ , il vient

$$y = \cos \left( \pi - \frac{2n\pi}{m} \right) \pm \sin \left( \pi - \frac{2n\pi}{m} \right) \cdot \sqrt{-1};$$

$$\text{or, on a } \cos \left( \pi + \frac{2n\pi}{m} \right) = -\cos \left( \pi - \frac{2n\pi}{m} \right),$$

$$\text{et } \sin \left( \pi + \frac{2n\pi}{m} \right) = -\sin \left( \pi - \frac{2n\pi}{m} \right).$$

Donc, les racines de  $y$  correspondantes à  $k = \frac{m}{2} + n$ , sont identiques avec celles qui correspondent à  $k = \frac{m}{2} - n$ .

Donc enfin, le tableau des valeurs que l'on a obtenues pour  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, \frac{m-1}{2}$  ou  $\frac{m}{2}$ , renferme toutes les racines de  $y^m - 1 = 0$ , quel que soit  $m$ .

398. *Relations entre les racines de l'équation  $y^m - 1 = 0$ .*

En jetant les yeux sur ce tableau, on voit que

$$\cos \frac{4\pi}{m} + \sin \frac{4\pi}{m} \cdot \sqrt{-1} = \left( \cos \frac{2\pi}{m} + \sin \frac{2\pi}{m} \cdot \sqrt{-1} \right)^2,$$

en vertu de la formule

$$(\cos a + \sin a \cdot \sqrt{-1})^m = \cos ma + \sin ma \cdot \sqrt{-1};$$

$$\cos \frac{6\pi}{m} + \sin \frac{6\pi}{m} \cdot \sqrt{-1} = \left( \cos \frac{2\pi}{m} + \sin \frac{2\pi}{m} \cdot \sqrt{-1} \right)^3,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\cos \frac{m-1}{m} \pi + \sin \frac{m-1}{m} \pi \cdot \sqrt{-1} = \left( \cos \frac{2\pi}{m} + \sin \frac{2\pi}{m} \cdot \sqrt{-1} \right)^{\frac{m-1}{2}},$$

si  $m$  est impair; et

$$\cos \pi + \sin \pi \cdot \sqrt{-1} = \left( \cos \frac{2\pi}{m} + \sin \frac{2\pi}{m} \cdot \sqrt{-1} \right)^{\frac{m}{2}}, \text{ si } m \text{ est pair.}$$

Donc en appelant  $\alpha$  la première racine imaginaire.....

$\cos \frac{2\pi}{m} + \sin \frac{2\pi}{m} \cdot \sqrt{-1}$ , toutes les racines du tableau déjà cité, correspondantes au signe supérieur, peuvent être représentées par  $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3 \dots \alpha^{\frac{m-1}{2}}$  ou  $\alpha^{\frac{m}{2}}$ ; quant aux racines qui correspondent au signe inférieur, nous avons vu qu'elles sont les réciproques des racines supérieures; en sorte que l'on a pour ces nouvelles racines,  $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^3} \dots, \frac{1}{\alpha^{\frac{m-1}{2}}}$ , ou  $\frac{1}{\alpha^{\frac{m}{2}}}$ ; et si l'on

observe que  $\alpha^m$  est égal à 1, ces expressions reviennent

$$\alpha^{m-1}, \alpha^{m-2}, \alpha^{m-3} \dots \alpha^{\frac{m-1}{2}} \text{ ou } \alpha^{\frac{m}{2}}.$$

D'où l'on peut conclure enfin que,  $\alpha$  désignant la première racine imaginaire, toutes les racines de l'équation  $y^m - 1 = 0$ , peuvent être représentées par

$$\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3 \dots \alpha^{\frac{m-1}{2}}, \text{ ou } \alpha^{\frac{m}{2}}, \dots \alpha^{m-2}, \alpha^{m-1},$$

série dans laquelle les exposans ne sont autre chose que les nombres naturels depuis 0 jusqu'à  $m - 1$ .

399. *Remarque importante.* Cette propriété dont jouit l'une des racines imaginaires, de reproduire toutes les autres avec ses diverses puissances, n'appartient généralement qu'à la première racine,  $\cos \frac{2\pi}{m} + \sin \frac{2\pi}{m} \cdot \sqrt{-1}$ , ou à sa conjuguée...

$\cos \frac{2\pi}{m} - \sin \frac{2\pi}{m} \cdot \sqrt{-1}$ . On a bien prouvé (n° 395) que  $\alpha$  étant une racine imaginaire quelconque,  $\alpha^2$  est aussi une racine de

$$y = \cos \frac{m\pi + 2n\pi}{m} \pm \sin \frac{m\pi + 2n\pi}{m} \cdot \sqrt{-1},$$

ou bien,  $y = \cos \left( \pi + \frac{2n\pi}{m} \right) \pm \sin \left( \pi + \frac{2n\pi}{m} \right) \cdot \sqrt{-1};$

mais si l'on fait  $k = \frac{m}{2} - n$ , il vient

$$y = \cos \left( \pi - \frac{2n\pi}{m} \right) \pm \sin \left( \pi - \frac{2n\pi}{m} \right) \cdot \sqrt{-1};$$

or, on a  $\cos \left( \pi + \frac{2n\pi}{m} \right) = -\cos \left( \pi - \frac{2n\pi}{m} \right),$

et  $\sin \left( \pi + \frac{2n\pi}{m} \right) = \sin \left( \pi - \frac{2n\pi}{m} \right).$

Donc, les racines de  $y$  correspondantes à  $k = \frac{m}{2} + n$ , sont identiques avec celles qui correspondent à  $k = \frac{m}{2} - n$ .

Donc enfin, le tableau des valeurs que l'on a obtenues pour  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, \frac{m-1}{2}$  ou  $\frac{m}{2}$ , renferme toutes les racines de  $y^m - 1 = 0$ , quel que soit  $m$ .

398. *Relations entre les racines de l'équation  $y^m - 1 = 0$ .*

En jetant les yeux sur ce tableau, on voit que

$$\cos \frac{4\pi}{m} + \sin \frac{4\pi}{m} \cdot \sqrt{-1} = \left( \cos \frac{2\pi}{m} + \sin \frac{2\pi}{m} \cdot \sqrt{-1} \right)^2,$$

en vertu de la formule

$$(\cos a + \sin a \cdot \sqrt{-1})^m = \cos ma + \sin ma \cdot \sqrt{-1};$$

$$\cos \frac{6\pi}{m} + \sin \frac{6\pi}{m} \cdot \sqrt{-1} = \left( \cos \frac{2\pi}{m} + \sin \frac{2\pi}{m} \cdot \sqrt{-1} \right)^3,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\cos \frac{m-1}{m} \pi + \sin \frac{m-1}{m} \pi \cdot \sqrt{-1} = \left( \cos \frac{2\pi}{m} + \sin \frac{2\pi}{m} \cdot \sqrt{-1} \right)^{\frac{m-1}{2}},$$

si  $m$  est impair; et

$$\cos \pi + \sin \pi \cdot \sqrt{-1} = \left( \cos \frac{2\pi}{m} + \sin \frac{2\pi}{m} \cdot \sqrt{-1} \right)^{\frac{m}{2}}, \text{ si } m \text{ est pair.}$$

Donc en appelant  $\alpha$  la première racine imaginaire, . . . . .

$\cos \frac{2\pi}{m} + \sin \frac{2\pi}{m} \cdot \sqrt{-1}$ , toutes les racines du tableau déjà cité, correspondantes au signe supérieur, peuvent être représentées par  $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3 \dots \alpha^{\frac{m-1}{2}}$  ou  $\alpha^{\frac{m}{2}}$ ; quant aux racines qui correspondent au signe inférieur, nous avons vu qu'elles sont les réciproques des racines supérieures; en sorte que l'on a pour ces nouvelles racines,  $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^3} \dots, \frac{1}{\alpha^{\frac{m-1}{2}}}$ , ou  $\frac{1}{\alpha^{\frac{m}{2}}}$ ; et si l'on

observe que  $\alpha^m$  est égal à 1, ces expressions reviennent

$$\alpha^{m-1}, \alpha^{m-2}, \alpha^{m-3} \dots \alpha^{\frac{m+1}{2}} \text{ ou } \alpha^{\frac{m}{2}}.$$

D'où l'on peut conclure enfin que,  $\alpha$  désignant la première racine imaginaire, toutes les racines de l'équation  $y^m - 1 = 0$ , peuvent être représentées par

$$\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3 \dots \alpha^{\frac{m-1}{2}}, \text{ ou } \alpha^1, \dots, \alpha^{m-3}, \alpha^{m-2}, \alpha^{m-1},$$

série dans laquelle les exposans ne sont autre chose que les nombres naturels depuis 0 jusqu'à  $m - 1$ .

399. *Remarque importante.* Cette propriété dont jouit l'une des racines imaginaires, de reproduire toutes les autres avec ses diverses puissances, n'appartient généralement qu'à la première racine,  $\cos \frac{2\pi}{m} + \sin \frac{2\pi}{m} \cdot \sqrt{-1}$ , ou à sa conjuguée...

$\cos \frac{2\pi}{m} - \sin \frac{2\pi}{m} \cdot \sqrt{-1}$ . On a bien prouvé (n° 395) que  $\alpha$  étant une racine imaginaire quelconque,  $\alpha^p$  est aussi une racine de

l'équation; mais il n'est pas toujours vrai de dire qu'en donnant à  $p$  des valeurs entières convenables, on pourra reproduire toutes les racines.

Soit, par exemple, l'équation  $y^6 - 1 = 0$ , qui, pouvant se mettre sous la forme  $(y^3 - 1)(y^3 + 1) = 0$ , donne

$$1^{\circ}. y = 1 \text{ et } y = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}, \quad 2^{\circ}. y = -1 \text{ et } y = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2};$$

comme les trois premières racines proviennent de  $y^3 - 1 = 0$ , si l'on désigne par  $\alpha$  la racine  $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ , on a

$$\alpha^3 = \left( \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \right)^3 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}; \quad \alpha^3 = 1; \quad \alpha^4 = \alpha^3 \times \alpha = \alpha;$$

$$\alpha^5 = \alpha^3 \times \alpha^2; \quad \alpha^6 = (\alpha^3)^2 = 1 \dots;$$

d'où l'on voit que les trois premières racines seulement sont produites par les puissances de  $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ .

Mais il n'en est pas de même de  $\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$ ; car on trouve

$$\left( \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \right)^0 = 1; \quad \left( \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \right)^1 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2};$$

$$\left( \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \right)^2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}; \quad \left( \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \right)^3 = -1;$$

$$\left( \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \right)^4 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}; \quad \left( \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \right)^5 = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Ainsi, toutes les racines sont produites par les puissances 0, 1, 2, 3, 4, 5... de la racine  $\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$ ; et cela tient à ce que cette dernière racine est la première donnée par la formule

$$\cos \frac{2\pi}{m} + \sin \frac{2\pi}{m} \cdot \sqrt{-1},$$



qui devient, dans ce cas,  $\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \sqrt{-1}$ .

En effet, on a  $\cos \frac{\pi}{3} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{6}$ ; mais le sinus du 6<sup>e</sup> de  $\pi$  ou du 12<sup>e</sup> de la circonférence, est la moitié de la corde qui en soutend le 6<sup>e</sup>, et par conséquent, est égal à la moitié du rayon; donc

$$\cos \frac{\pi}{3} \text{ ou } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \text{ d'où } \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3};$$

ce qui donne enfin  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$ , ou  $\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$  pour la première racine.

Cette exception a lieu, en général, pour les équations de la forme  $y^m - 1 = 0$ , ou  $(y^m - 1)(y^m + 1) = 0$ .

400. Résolution de l'équation  $y^m + 1 = 0$ .

Comme on a

$$\cos (2k + 1) \pi = -1, \sin (2k + 1) \pi = 0,$$

on peut conclure de la formule générale établie n° 397,

$$\left[ \cos \frac{(2k + 1) \pi}{m} \pm \sin \frac{(2k + 1) \pi}{m} \cdot \sqrt{-1} \right]^m = \cos (2k + 1) \pi \pm \sin (2k + 1) \pi \cdot \sqrt{-1} = -1;$$

d'où l'on voit que l'expression

$$\cos \frac{(2k + 1) \pi}{m} \pm \sin \frac{(2k + 1) \pi}{m} \cdot \sqrt{-1}$$

peut être prise pour la racine  $m^{\text{u}^{\text{me}}}$  de  $-1$ , ou pour l'expression générale d'une racine de la proposée; et l'on obtiendra les diverses racines, en attribuant à  $k$  la série des valeurs 0, 1, 2, 3, ...

Donnons à  $k$  toutes les valeurs comprises depuis 0 jusqu'à  $\frac{m-1}{2}$ , si  $m$  est impair, et depuis 0 jusqu'à  $\frac{m}{2} - 1$  ou  $\frac{m-2}{2}$ ,

598 RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION  $y^m + 1 = 0$ .

si  $m$  est pair; on obtiendra successivement, pour

$$k = 0, \dots y = \cos \frac{\pi}{m} \pm \sin \frac{\pi}{m} \cdot \sqrt{-1},$$

$$k = 1, \dots y = \cos \frac{3\pi}{m} \pm \sin \frac{3\pi}{m} \cdot \sqrt{-1},$$

$$k = 2, \dots y = \cos \frac{5\pi}{m} \pm \sin \frac{5\pi}{m} \cdot \sqrt{-1},$$

.....

$$k = \frac{m-1}{2}, y = \cos \pi \pm \sin \pi \cdot \sqrt{-1} = -1,$$

$$k = \frac{m-2}{2}, y = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{m} \right) \pm \sin \left( \pi - \frac{\pi}{m} \right) \cdot \sqrt{-1}.$$

Je dis que ce tableau renferme toutes les racines de l'équation

$$y^m + 1 = 0.$$

En effet, lorsque  $m$  est impair, comme la valeur  $k = \frac{m-1}{2}$  ne donne que la racine  $-1$ , mais que toutes les autres  $0, 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2} - 1$  ou  $\frac{m-3}{2}$ , en donnant deux chacune, il s'ensuit que le nombre total des racines fournies par ces valeurs, est...  $1 + 2 + \frac{2(m-3)}{2}$  ou  $m$ .

Si  $m$  est pair, chaque valeur de  $k$ , depuis 0 jusqu'à  $\frac{m-2}{2}$ , donne deux racines; ainsi, le nombre total des racines fournies est  $2 + \frac{2(m-2)}{2}$  ou  $m$ .

On démontrerait d'ailleurs, comme on l'a fait pour  $y^m - 1 = 0$ , qu'en donnant à  $k$  des valeurs plus grandes que  $\frac{m-1}{2}$ , si  $m$  est impair, et que  $\frac{m-2}{2}$ , si  $m$  est pair, on doit retrouver les mêmes racines; donc, etc.

On reconnait encore, d'après l'inspection de ce tableau, que si  $\alpha$  désigne la première racine imaginaire, savoir : ...

$\cos \frac{\pi}{m} + i \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{-1}$ ,  $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3 \dots, \alpha^m$  ou  $\alpha^{m-1}$ , suivant que  $m$  est impair ou pair, représentent toutes les racines correspondantes au signe supérieur; d'ailleurs les racines correspondantes au signe inférieur sont les réciproques des supérieures; ainsi l'on a, pour ces racines,

$$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^3}, \dots, \frac{1}{\alpha^m} \text{ ou } \frac{1}{\alpha^{m-1}};$$

et comme  $\alpha^m = -1$ , d'où  $\alpha^{2m} = 1$ ,

ces mêmes racines peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{\alpha^{2m}}{\alpha} \text{ ou } \alpha^{2m-1}, \alpha^{2m-3}, \alpha^{2m-5} \dots \alpha^m \text{ ou } \alpha^{m+1};$$

donc enfin toutes les racines de l'équation  $y^m + 1 = 0$ , sont, dans l'hypothèse de  $m$  impair,

$$\alpha^1, \alpha^3, \alpha^5, \alpha^7, \dots, \alpha^{m-1}, \alpha^m, \alpha^{m+1}, \dots, \alpha^{2m-3}, \alpha^{2m-1};$$

et dans l'hypothèse de  $m$  un nombre pair,

$$\alpha^1, \alpha^3, \alpha^5, \alpha^7, \dots, \alpha^{m-1}, \alpha^{m+1}, \alpha^{m+3}, \dots, \alpha^{2m-3}, \alpha^{2m-1}.$$

*N. B.* Pour plus de généralité, nous avons établi des formules pour résoudre l'équation  $y^m + 1 = 0$ , quel que soit  $m$ ; mais dans le cas où  $m$  est impair, la résolution de cette équation se ramène à celle de  $y^m - 1 = 0$ , en posant  $y = -y'$ , ce qui donne  $y'^m - 1 = 0$ ; d'où l'on voit que les racines de l'équation  $y^m + 1 = 0$  sont égales et de signes contraires aux racines de l'équation  $y^m - 1 = 0$ , toutes les fois que  $m$  est un nombre impair.

401. *Scholie général.* En récapitulant tout ce qui vient d'être dit sur les équations à deux termes, on peut conclure qu'un radical quelconque a toujours autant de valeurs qu'il y a d'unités dans son indice. Ces valeurs sont égales à la racine arithmétique de la quantité sous le signe, considérée avec sa

valeur absolue, et multipliée successivement par chacune des racines de  $+1$  ou  $-1$ .

Ainsi, lorsque l'on a deux radicaux à multiplier l'un par l'autre, le produit est susceptible d'autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans le produit des deux indices, à moins que les degrés des deux radicaux ne soient égaux; car alors plusieurs valeurs deviennent identiques.

Soit, par exemple,  $\sqrt[n]{a}$  à multiplier par  $\sqrt[n]{b}$ ; désignons par  $p$  et  $q$  leurs valeurs arithmétiques, on a (n° 398) pour le premier radical, . . . . .  $a^0p, ap, a^2p,$

et pour le second, . . .  $a^0q, aq, a^2q;$

multipliant chacun des termes de la première ligne par chacun des termes de la seconde, on obtient

$$\begin{array}{l} a^0pq, apq, a^2pq, \\ apq, a^2pq, a^3pq, \\ a^2pq, a^3pq, a^4pq, \end{array}$$

expressions qui se réduisent à trois différentes,  $pq, apq$  et  $a^2pq$ , si l'on observe que l'on a  $a^3=1$  et  $a^4=a$ .

Il en est de même, lorsque les deux indices ont un facteur commun. *Le nombre des valeurs différentes du produit est alors égal au multiple le plus simple des deux indices.*

Ces observations complètent ce que nous avons dit dans le sixième chapitre (n° 176) sur la multiplicité des valeurs d'un radical.

### § III. Résolution des équations trinomes. Extraction d'une racine de degré quelconque d'une quantité en partie rationnelle, et en partie irrationnelle du second degré.

402. Équation trinome  $x^m + px^m = q$ . On appelle ainsi toutes les équations qui ne renferment que deux exposans de l'inconnue, doubles l'un de l'autre, et des quantités toutes con-

*notes.* Ces sortes d'équations peuvent toujours, par la transposition et par la réduction, être ramenées à la forme ci-dessus. Leur résolution dépend d'ailleurs uniquement de celle de l'équation du second degré et de l'équation à deux termes.

En effet, soit posé  $x^m = y$ ; il en résulte

$$y^2 + py = q; \text{ d'où } y = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Donc 
$$x = \sqrt[m]{y} = \sqrt[m]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}}.$$

ainsi, pour obtenir toutes les valeurs de  $x$ , il suffit de multiplier les deux valeurs données immédiatement par

$$\sqrt[m]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}} \quad \text{et par} \quad \sqrt[m]{-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}},$$

par chacune des racines  $m^{\text{ième}}$  de  $+1$ .

Soit, par exemple, l'équation  $x^6 - 7x^3 = 45144$ ;

en posant  $x^3 = y$ , on trouve  $y^2 - 7y = 45144$ ;

d'où l'on déduit  $y = 216$  et  $y = -209$ .

Donc

1°.  $x^3 = 216$ ; d'où  $x = 6$ ,  $x = 6.\alpha$ ,  $x = 6.\alpha^2$ ;

2°.  $x^3 = -209$ ; d'où  $x = -\sqrt[3]{209}$ ,  $x = -\alpha.\sqrt[3]{209}$ ,  $x = -\alpha^2.\sqrt[3]{209}$ ,

$\alpha$  désignant la première racine cubique imaginaire de l'unité.

La résolution des équations trinomes conduit à l'extraction de la racine  $m^{\text{ième}}$  d'une quantité en partie rationnelle et en partie irrationnelle du second degré. Nous avons déjà (n° 119) traité un cas particulier de cette question, celui de la racine carrée. Nous allons maintenant considérer le cas de la racine cubique ou troisième, après quoi nous généraliserons.

403. Effectuer, s'il est possible, l'opération marquée par  $\sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}}$ .

On ne peut pas, comme pour la racine carrée (n° 119), supposer  $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x + y}$ ; car on a

$$(\sqrt{x + y})^3 = x \cdot \sqrt{x} + 3x \cdot \sqrt{y} + 3y \cdot \sqrt{x} + y \cdot \sqrt{y},$$

expression qui revient à  $(x + 3y) \cdot \sqrt{x} + (3x + y) \cdot \sqrt{y}$ , et est par conséquent composée de deux radicaux; mais on peut supposer  $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = x + \sqrt{y}$ ; car on a

$$(x + \sqrt{y})^3 = x^3 + 3xy + (3x^2 + y) \cdot \sqrt{y},$$

expression de même forme que  $a + \sqrt{b}$ .

Observons encore cependant que si  $a$  et  $\sqrt{b}$  ont un facteur commun qui n'est pas un cube parfait, il est possible que la racine soit de la forme  $\sqrt[3]{c} \cdot (x + \sqrt{y})$ .

Par exemple, élevons au cube  $\sqrt[3]{2 \cdot (2 + \sqrt{11})}$ ; il vient pour résultat;  $2(74 + 23\sqrt{11})$ , ou  $148 + 46\sqrt{11}$ , dont la racine est affectée d'un radical cubique monome.

Ainsi, pour comprendre tous les cas qui peuvent se présenter, nous poserons

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = \sqrt[3]{z} \cdot (x + \sqrt{y}),$$

$x, y, z$  étant des quantités commensurables qu'il s'agit de déterminer conformément à la question.

Pour y parvenir, élevons au cube les deux membres de cette égalité; il vient

$$a + \sqrt{b} = z[x^3 + 3xy + (3x^2 + y) \cdot \sqrt{y}],$$

équation qui se partage nécessairement en deux autres,

$$\left. \begin{array}{l} a = z(x^3 + 3xy), \\ \sqrt{b} = z(3x^2 + y) \cdot \sqrt{y}, \end{array} \right\} \text{ d'où } \left\{ \begin{array}{l} a^2 = z^2(x^6 + 6x^4y + 9x^2y^2), \\ b = z^2(9x^4y + 6x^2y^2 + y^3); \end{array} \right.$$

retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on en tire,

$$a^3 - b = z^3(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) = z^3(x^3 - y^3);$$

done 
$$x^3 - y^3 = \sqrt[3]{\frac{a^3 - b}{z^3}} = \frac{1}{z} \sqrt[3]{(a^3 - b)z}.$$

Il est visible, d'après cette équation, que la valeur de  $y$  correspondante à des valeurs commensurables de  $x$  et  $z$ , ne peut être elle-même rationnelle, comme l'exige la question, qu'autant que  $\sqrt[3]{(a^3 - b)z}$  le sera aussi. Or, puisque  $x, y, z$ , ne sont liées que par deux équations, on peut disposer de l'une d'elles arbitrairement, de  $z$ , par exemple, et la déterminer de manière que  $(a^3 - b)z$  soit un cube parfait; le cas le plus défavorable serait celui où  $a^3 - b$  ne renfermerait aucun facteur ni *cube*, ni *carré* parfait, et alors il suffirait de poser  $z = (a^3 - b)^2$ .

Supposons donc  $z$  déterminé de manière que  $\sqrt[3]{(a^3 - b)z}$  soit rationnel, et faisons  $\frac{1}{z} \sqrt[3]{(a^3 - b)z} = c$ ; il en résulte...

$x^3 - y^3 = c$ , d'où  $y^3 = x^3 - c$ ; substituant cette valeur dans l'équation  $a = z(x^3 + 3xy^2)$ , on obtient  $a = z(x^3 + 3x^2 - 3cx)$ , ou réduisant,  $4zx^3 - 3czzx - a = 0$ .

Cette équation, dans laquelle  $z, c$  et  $a$  sont des nombres connus, doit avoir au moins une racine commensurable, pour que l'expression proposée  $a + \sqrt[3]{b}$ , soit un cube parfait, ou du moins, de la forme  $C.(A + \sqrt[3]{B})^3$ .

Voici les formules dont il faut faire usage dans les applications:

1°.  $c = \frac{1}{z} \sqrt[3]{(a^3 - b)z}$ ; on peut toujours donner à  $z$  une valeur telle que  $c$  soit rationnel.

2°.  $4zx^3 - 3czzx - a = 0$ ; cette équation doit admettre au moins une racine commensurable, que l'on déterminera d'après la méthode du n° 334.

3°.  $y = x^3 - c$ ; cette équation donnera la valeur de  $y$  correspondante aux deux valeurs de  $x$  et de  $z$ .

404. *Premier exemple.* Soit  $\sqrt[3]{148 + 48\sqrt{11}}$ ; on a

$$a^3 - b = 21904 - 23276 = -1372 = -343 \times 4;$$

or, 343 est un cube parfait, savoir, le cube de 7; si donc l'on multiplie  $-343 \times 4$  par 2, l'expression  $(a^3 - b)z$  sera un cube parfait, égal à  $(-7 \times 2)^3$ .

Posons alors  $z = 2$ ; il en résulte  $c = \frac{1}{2} \sqrt[3]{(a^3 - b)z} = -7$ ,

d'où, substituant cette valeur et celle de  $z$  dans la seconde formule,.....  $8x^3 + 42x - 148 = 0$ ,

ou réduisant,.....  $4x^3 + 21x - 74 = 0$ .

Cette équation, résolue par la méthode du n° 334, donne  $x = 2$ ; les deux autres racines sont imaginaires. Portant cette valeur de  $x$  et la valeur de  $c$  dans la troisième formule,  $y = x^3 - c$ , on trouve  $y = 11$ ; donc enfin la racine cherchée est.....

$\sqrt[3]{2} \cdot (2 + \sqrt{11})$ , résultat que l'on peut vérifier, en l'élevant au cube.

*Second exemple.* Soit  $\sqrt{2 + 11\sqrt{-1}}$ ; on a

$$a^3 - b = 4 + 121 = 125 = (5)^3,$$

d'où  $c = \frac{1}{z} \sqrt[3]{(a^3 - b)z} = \frac{1}{z} \sqrt[3]{125 \cdot z}$ ;

comme 125 est un cube parfait, il suffit de faire  $z = 1$ , ce

qui donne  $c = \sqrt[3]{125} = 5$ ; d'où, substituant dans la seconde formule,  $4x^3 - 15x - 2 = 0$ , équation qui admet encore la

racine 2, et dont les deux autres sont  $x = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{2}$ , valeurs

irrationnelles. La valeur de  $y$ , correspondante à  $x = 2$ , est

$y = 4 - 5 = -1$ ; ainsi  $\sqrt{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1}$ .



Troisième exemple.  $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$ ; on a

$$a^2 - b = 9 - 2 = 7;$$

il faut donc faire  $z = 7^{\frac{1}{3}}$ , ce qui donne  $c = \frac{1}{7}$ , d'où, substituant dans la seconde formule,

$$196x^2 - 21x - 3 = 0;$$

cette équation n'a pas de racines commensurables; ainsi  $3 + \sqrt{2}$  n'est pas un cube parfait.

On pourra s'exercer sur les exemples suivants:

$$\sqrt[5]{52 + 30\sqrt{3}} = \sqrt[5]{2} \cdot (2 + \sqrt{3}),$$

$$\sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} = -1 + \sqrt{-1},$$

$$\sqrt[3]{5 - 13\sqrt{-2}} = 5 - 2\sqrt{-2}.$$

405. Effectuer, lorsque cela est possible, l'opération marquée par  $\sqrt[n]{a + \sqrt{b}}$ .

Si l'on a bien compris ce qui vient d'être dit sur le cas particulier de la racine cubique, on pourra se former aisément une idée de la marche qu'il faut suivre pour une racine de degré quelconque.

Soit  $\sqrt[n]{a + \sqrt{b}}$ , qu'il s'agit de ramener à la forme  $x + \sqrt{y}$ , ou plus généralement, à celle-ci:  $\sqrt[n]{z} \cdot (x + \sqrt{y})$ .

De l'équation  $\sqrt[n]{a + \sqrt{b}} = \sqrt[n]{z} (x + \sqrt{y})$ , on déduit, en élevant les deux membres à la  $n^{\text{ième}}$  puissance, et égalant séparément les parties rationnelles et les parties irrationnelles,

$$a = z \left( x^n + n \frac{n-1}{2} x^{n-2} y + n \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} x^{n-4} y^2 + \dots \right),$$

$$\sqrt{b} = z \left( nx^{n-1} + n \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} x^{n-3} y + \dots \right) \cdot \sqrt{y}.$$

On pourrait, comme dans le cas précédent, élever les deux membres de ces équations au carré, retrancher et faire ensuite les réductions; mais la transformation suivante conduit plus simplement au même but.

Ces deux équations peuvent être mises sous la forme

$$a = \frac{z}{2} [(x + \sqrt{y})^n + (x - \sqrt{y})^n],$$

$$\sqrt{b} = \frac{z}{2} [(x + \sqrt{y})^n - (x - \sqrt{y})^n],$$

d'où, élevant au carré et retranchant,

$$a^2 - b = \frac{z^2}{4} [(x + \sqrt{y})^{2n} + 2(x^2 - y)^n + (x - \sqrt{y})^{2n} - (x + \sqrt{y})^{2n} + 2(x^2 - y)^n - (x - \sqrt{y})^{2n}],$$

ou réduisant,  $a^2 - b = z^2 (x^2 - y)^n$ ;

$$\text{donc, } x^2 - y = \sqrt[n]{\frac{a^2 - b}{z^2}} = \frac{1}{z} \sqrt[n]{(a^2 - b)z^{n-2}}.$$

Supposons maintenant que  $z$  ait été déterminé de manière que  $\sqrt[n]{(a^2 - b)z^{n-2}}$  soit commensurable, ce qui est toujours possible; et posons  $c = \frac{1}{z} \sqrt[n]{(a^2 - b)z^{n-2}}$ ; il vient

$$x^2 - y = c, \quad \text{d'où } y = x^2 - c;$$

reportant cette valeur de  $y$  dans l'équation

$$a = z \left( x^n + n \frac{n-1}{2} x^{n-2} y + \dots \right),$$

il faudra que l'équation résultante ait au moins une racine commensurable.

*Appliquons ces principes à l'expression*  $\sqrt[5]{228 + 132\sqrt{3}}$ .  
Les formules relatives à cet exemple, sont

$$c = \frac{1}{z} \sqrt[3]{(a^3 - b)z^3}; \quad y = x^3 - c;$$

$$a = z(x^3 + 10x^3y + 5xy^3).$$

Cela posé, en faisant  $a = 228$ ,  $\sqrt{b} = 132\sqrt{3}$ , on trouve

$$a^3 - b = -288 = (-2)^3 \cdot (3)^3;$$

on voit donc qu'en posant  $z = 3$ ,  $c$  deviendra rationnel, et l'on

aura 
$$c = \frac{1}{3} \sqrt[3]{(-2)^3 3^3} = -2;$$

d'où 
$$y = x^3 - (-2) = x^3 + 2.$$

Substituant cette valeur et celle de  $z$ , dans la troisième formule, on obtient, toute réduction faite,

$$4x^5 + 10x^3 + 5x = 19,$$

équation qui admet la racine commensurable  $+1$ ; ainsi

$$x = 1, \quad y = 1 + 2 = 3;$$

donc enfin 
$$\sqrt[5]{228 + 132\sqrt{3}} = \sqrt[5]{3} \cdot (1 + \sqrt{3}).$$

On trouverait de même,

$$\sqrt[4]{-7 + 24\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1},$$

$$\sqrt[6]{2889 - 1292\sqrt{5}} = 2 - \sqrt{5}.$$

#### § IV. Résolution des équations générales de degré supérieur au second.

Nous avons maintenant une tâche importante à remplir; c'est de faire connaître les travaux des analystes sur le fameux problème de la résolution des équations générales de tous les degrés. Ce problème, qui a long-temps occupé les mathématiciens les plus célèbres, a pour but, *étant donnée une équation générale et complète, d'obtenir les expressions de ses racines,*

au moyen d'un nombre limité d'opérations algébriques effectuées sur les coefficients. Jusqu'à présent, la question n'a été résolue que pour les quatre premiers degrés; et l'on doute si jamais on pourra parvenir à une résolution complète pour tous les degrés.

Quoi qu'il en soit, nous commencerons par exposer la plus simple de toutes les méthodes connues pour résoudre les équations du troisième et du quatrième degrés; ensuite nous ferons connaître d'autres méthodes susceptibles de s'appliquer avec plus de succès aux équations d'un degré supérieur.

406. *Équation du troisième degré.* D'abord, on peut supposer l'équation privée de son second terme, puisqu'il est (n° 276) toujours possible de le faire disparaître de toute équation.

Soit donc proposée l'équation  $x^3 + px + q = 0 \dots (1)$ ;  
faisons dans cette équation,  $\dots x = y + z \dots \dots (2)$ ,

c'est-à-dire supposons  $x$  égale à la somme de deux autres inconnues (cette forme que nous donnons à la valeur de  $x$  peut être motivée sur ce que, dans l'équation générale du second degré, la valeur de  $x$  se compose aussi de deux parties distinctes).

On obtient, en élevant l'équation (2) au cube,

$$x^3 = y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 = y^3 + z^3 + 3yz(y + z),$$

ou bien,  $x^3 = y^3 + z^3 + 3yz \cdot x,$

et transposant,  $x^3 - 3yz \cdot x - y^3 - z^3 = 0.$

Pour que cette équation s'accorde avec l'équation (1), il faut et il suffit que l'on ait

$$\left. \begin{array}{l} p = -3yz, \\ q = -y^3 - z^3 \end{array} \right\} \text{d'où} \left\{ \begin{array}{l} yz = -\frac{p}{3} \dots (3), \\ y^3 + z^3 = -q \dots (4). \end{array} \right.$$

Dès que ces deux conditions seront satisfaites, les valeurs

de  $y$  et  $z$  seront telles, que leur somme exprimera la valeur de  $x$ , propre à vérifier l'équation (1). Tâchons donc de déterminer  $y$  et  $z$  d'après ces deux conditions.

L'équation (3), élevée au cube, donne  $y^3 z^3 = -\frac{p^3}{27}$ ;

mais on a déjà

$$y^3 + z^3 = -q;$$

ainsi,  $y^3$  et  $z^3$  sont tels, que leur somme est égale à une quantité donnée  $-q$ , et leur produit égal à une quantité  $-\frac{p^3}{27}$ ; donc (n° 114), leur détermination dépend de l'équation

$$t^3 + qt - \frac{p^3}{27} = 0 \dots (5),$$

dans laquelle  $t$  a pour coefficient la somme donnée, prise en signe contraire, et le dernier terme est égal au produit aussi donné.

Cette équation se nomme *la réduite* de l'équation du troisième degré, parce que c'est de sa résolution que dépend celle de la proposée.

En effet, on en déduit  $t = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ ;

donc  $y^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ ;  $z^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ ,

d'où, à cause de la relation  $x = y + z$ ,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Il peut sembler, au premier abord, que la méthode ne donne qu'une des racines de la proposée; mais désignons par  $m$  et  $n$  ce que deviennent immédiatement

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \text{ et } \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

lorsqu'on remplace  $q$  et  $p$  par leurs valeurs, et observons, 1°. que les équations  $y^3 = m^3$ ,  $z^3 = n^3$ , donnent (n° 401),

$$\begin{aligned} y &= m, \alpha m, \alpha^2 m, \\ z &= n, \alpha n, \alpha^2 n, \end{aligned}$$

1,  $\alpha$ ,  $\alpha^2$ , étant les trois racines cubiques de l'unité; 2°. que le produit des deux valeurs de  $y$  et de  $z$ , dont la somme donne la valeur de  $x$ , doit être égal à  $-\frac{P}{3}$ , d'après la relation (3),

$$yz = -\frac{P}{3}.$$

Ainsi, l'on obtiendra toutes les racines de l'équation (1), en faisant la somme de deux quelconques des valeurs de  $y$  et de  $z$  que l'on vient d'écrire, pourvu que le produit de ces deux valeurs soit égal à  $-\frac{P}{3}$ . Or, on a en premier lieu,

$$\begin{aligned} mn &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \times \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = -\frac{P}{3}; \end{aligned}$$

donc  $x = m + n$ , forme la première racine; c'est celle déjà obtenue.

En second lieu,  $\alpha m \times \alpha^2 n = \alpha^3 mn = mn = -\frac{P}{3}$ ;

donc  $x = \alpha m + \alpha^2 n$  forme une seconde racine.

Enfin  $\alpha^2 m \times \alpha n = \alpha^3 mn = mn = -\frac{P}{3}$ ;

donc  $x = \alpha^2 m + \alpha n$  exprime une troisième racine.

Aucune des autres combinaisons ne remplit la condition que le produit soit égal à  $-\frac{P}{3}$ ; ainsi elles doivent être rejetées, et l'on a pour les seules racines de l'équation proposée,

$$x = m + n; \quad x = \alpha m + \alpha^2 n; \quad x = \alpha^2 m + \alpha n.$$

On parviendrait encore aux deux dernières valeurs de la proposée, en divisant son premier membre par  $x - m - n$ .

En effet, remplaçons dans les équations (3) et (4),  $p$  et  $q$  par leurs premières valeurs  $m$  et  $n$ ; il vient

$$mn = -\frac{p}{3}, m^3 + n^3 = -q; \text{ d'où } p = -3mn, \text{ et } q = -m^3 - n^3;$$

si l'on substitue ces valeurs de  $p$  et  $q$  dans la proposée (1), elle devient

$$x^3 - 3mnx - m^3 - n^3,$$

expression qui, divisée par  $x - m - n$ , donne

$$x^2 + (m + n)x + m^2 - mn + n^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$x = -\frac{m+n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - m^2 + mn - n^2},$$

ou réduisant,

$$x = -\left(\frac{m+n}{2}\right) \pm \left(\frac{m-n}{2}\right) \cdot \sqrt{-3},$$

ou bien, isolant les deux valeurs,

$$x = -\left(\frac{m+n}{2}\right) + \left(\frac{m-n}{2}\right) \cdot \sqrt{-3},$$

$$x = -\left(\frac{m+n}{2}\right) - \left(\frac{m-n}{2}\right) \cdot \sqrt{-3}.$$

Il est aisé de reconnaître l'identité de ces deux expressions avec  $x = am + a^2n$ ,  $x = a^2m + an$ , en se rappelant que les trois racines cubiques de l'unité, 1,  $a$ ,  $a^2$ , sont 1,  $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ ,

$$\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

407. *Discussion des trois racines.* Les quantités  $m$  et  $n$  renfermant, dans leur expression, le radical du second degré

$\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ , on conçoit que la *réalité*, ou l'*imaginarité* des racines dépend principalement du signe de  $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ ; on est donc conduit à faire les trois hypothèses suivantes,

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0, \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0, \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0.$$

SOIT PREMIÈREMENT,  $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ , ce qui revient à supposer que les racines de la réduite (5) soient réelles. Puisque  $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$  est réel, il en est de même des valeurs de  $m$  et de  $n$ , et par conséquent de la première valeur de  $x$ ,

$$x = m + n = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Les deux autres,  $x = -\frac{(m+n)}{2} \pm \frac{(m-n)}{2} \sqrt{-3}$ , sont essentiellement imaginaires; car elles renferment le radical  $\sqrt{-3}$ , et le coefficient de ce radical, ou  $\frac{m-n}{2}$ , est réel et différent de 0.

Quant au signe dont la racine réelle est affectée dans ce cas, *il est négatif*, si  $q$  est positif, et *il est positif*, si  $q$  est négatif. Ceci est une conséquence de la proposition établie n° 327, sur les équations de degré impair. On pourrait d'ailleurs le reconnaître immédiatement, d'après l'inspection de la valeur  $x = m + n$ .

408. SOIT EN SECOND LIEU,  $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$ , auquel cas les deux racines de la réduite (5) sont égales.

Les valeurs de  $m$  et  $n$  se réduisent l'une et l'autre à  $-\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ ,



ce qui donne  $x = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ , pour la première racine de la proposée.

Quant aux deux autres, comme on a  $m=n$ , il en résulte  $m-n=0$ ; ainsi l'imaginarité disparaît et les valeurs se réduisent toutes deux à

$$x = -\frac{2m}{2} = -m = \sqrt[3]{\frac{q}{2}};$$

d'où l'on voit que, dans l'hypothèse particulière que nous examinons, 1°. les trois racines de la proposée sont réelles; 2°. deux d'entre elles sont égales à la moitié de l'autre, et de signe contraire à celle-ci.

Donc, en supposant le dernier terme  $q$  positif, l'équation a une racine réelle négative,  $-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ , et deux racines positives,  $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ .

Le contraire a lieu, si le dernier terme est négatif; c'est-à-dire qu'elle a une seule racine positive et deux racines négatives.

Ces résultats s'accordent encore avec ce qui a été dit (n° 327 et 329).

#### Cas irréductible.

409. SOIT EN TROISIÈME LIEU,  $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ , ce qui exige que  $p$  soit négatif; les racines de la réduite sont imaginaires.

Dans ce cas, la première racine  $x = m + n$ , se présente sous la forme  $x = \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}}$ , expression qui renferme des symboles imaginaires.

Il en est de même des deux autres racines qui déjà renferment le radical  $\sqrt{-3}$ .

Ainsi les trois racines semblent, au premier abord, imaginaires, ce qui est contraire au théorème du n° 327; mais il est aisé de s'assurer que, dans les expressions des trois ra-

cines, les imaginaires s'entre-détruisent, et qu'elles sont toutes trois réelles.

En effet, développons  $\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$ , ou  $(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ , par la formule du binôme; on trouve

$$(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}} \cdot b\sqrt{-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}a^{-\frac{5}{3}}b^2 + \dots;$$

On obtient de même,

$$(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}} \cdot b\sqrt{-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}a^{-\frac{5}{3}}b^2 - \dots,$$

développement qui ne diffère du premier qu'en ce que tous les termes affectés de puissances impaires de  $b\sqrt{-1}$ , ont changé de signe.

D'où l'on peut conclure que, si la première expression est

de la forme  $p+q\sqrt{-1}$ ,

on a pour la seconde,  $p-q\sqrt{-1}$ ;

donc  $x=m+n=p+q\sqrt{-1}+p-q\sqrt{-1}=2p$ .

On déduit encore de là

$$m-n=p+q\sqrt{-1}-(p-q\sqrt{-1})=2q\sqrt{-1};$$

donc  $x = -\frac{(m+n)}{2} \pm \frac{(m-n)}{2} \cdot \sqrt{-3}$ , devient

$$x = -p \pm q\sqrt{-1} \times \sqrt{-3} = -p \mp q\sqrt{3}$$

(voyez n° 178). Donc enfin les trois racines sont réelles.

410. On peut, sans employer le développement en série, reconnaître la réalité des trois racines, dans l'hypothèse de  $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ ; c'est-à-dire lorsque,  $p$  étant négatif, on a

$$\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}.$$

En effet, puisque  $p$  doit être négatif, l'équation proposée est

nécessairement de l'une des deux formes

$$x^3 - px - q = 0 \dots (1), \quad \text{ou} \quad x^3 - px + q = 0 \dots (2);$$

mais comme on passe de la première à la seconde, en changeant  $x$  en  $-x$ , il nous suffit de considérer l'équation (1) dont les racines sont les mêmes, au signe près, que celles de la seconde.

Tout se réduit donc à prouver que, dans l'équation (1), si l'on a  $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$ , les trois racines sont réelles.

Observons d'abord que le dernier terme de cette équation étant négatif, elle admet déjà au moins une racine réelle positive (n° 327).

Soit  $a$  cette racine, il en résulte l'égalité

$$a^3 - pa - q = 0 \dots (3).$$

Cela posé, retranchons (3) de (1); il vient

$$x^3 - a^3 - p(x - a) = 0, \quad \text{ou bien,} \quad (x - a)(x^2 + ax + a^2 - p) = 0,$$

équation qui donne les valeurs suivantes,

$$x = a \quad \text{et} \quad x = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3a^2 + 4p};$$

cette dernière expression fait connaître deux des racines en fonction de la première  $a$ .

Or, de l'hypothèse  $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$ , on déduit  $\frac{p}{3} \cdot \sqrt{\frac{p}{3}} > \frac{q}{2}$ ,

ou  $2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{p}{3} > q$ , ou bien encore,  $2\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\frac{4}{3}p - p\right) - q > 0$ .

Comparant cette inégalité avec l'égalité (3), qui revient à  $a(a^2 - p) - q = 0$ , on voit qu'il est nécessaire qu'on ait

$2\sqrt{\frac{p}{3}} > a$ , et par conséquent,  $\frac{4}{3}p > a^2$ , ou  $4p - 3a^2 > 0$ .

D'où l'on peut conclure que les deux valeurs de  $x$  obtenues plus haut sont essentiellement réelles. C. Q. F. D.

411. Ce cas, qui a long-temps arrêté les analystes, est

connu sous le nom de *cas irréductible*, parce que; bien qu'il soit prouvé que les trois racines sont réelles, les formules ne peuvent être d'aucune utilité pour leur détermination; car on vient de voir que, pour les débarrasser des expressions imaginaires qu'elles renferment, on est obligé de réduire la première valeur de  $x$  en une série infinie dont les termes ne peuvent être que rarement convergens; en sorte qu'il est impossible, dans ce cas, d'obtenir les expressions exactes des trois racines, et l'on est forcé d'avoir recours, dans les applications, aux méthodes de la résolution des équations numériques.

412. *Équation du quatrième degré.* Nous supposons encore l'équation privée de son second terme.

Soit  $x^4 + px^2 + qx + r = 0 \dots (1)$  l'équation à résoudre.

En se laissant conduire par l'analogie, on peut être tenté de faire  $x = y + z$ , c'est-à-dire  $x$  égal à la somme de deux autres inconnues; c'est en effet la marche que Lagrange a suivie, en employant ensuite plusieurs artifices d'analyse, pour tirer parti de sa méthode. Mais les calculs dans lesquels cette méthode entraîne sont très compliqués, et l'on parvient beaucoup plus promptement aux expressions de l'inconnue, par l'introduction de *trois indéterminées*.

Soit donc fait dans l'équation  $x = y + z + u \dots (2)$ ; il vient, après l'élevation au carré,

$$x^2 = y^2 + z^2 + u^2 + 2(yz + yu + zu),$$

$$\text{ou } x^2 - (y^2 + z^2 + u^2) = 2(yz + yu + zu);$$

carrant de nouveau les deux membres de cette dernière équation, l'on obtient

$$x^4 - 2(y^2 + z^2 + u^2)x^2 + (y^2 + z^2 + u^2)^2 = 4(y^2z^2 + y^2u^2 + z^2u^2) + 8yzu(y + z + u),$$

ou, remplaçant  $y + z + u$  par  $x$  et transposant,

$$x^4 - 2(y^2 + z^2 + u^2)x^2 - 8yzu x + (y^2 + z^2 + u^2)^2 - 4(y^2z^2 + y^2u^2 + z^2u^2) = 0.$$

Or, pour que cette équation s'accorde avec la proposée, il faut et il suffit que l'on ait

$$1^{\circ}. p = -2(y^2 + z^2 + u^2), \quad \text{d'où} \quad y^2 + z^2 + u^2 = -\frac{p}{2} \dots (3);$$

$$2^{\circ}. r = (y^2 + z^2 + u^2)^2 - 4(y^2 z^2 + y^2 u^2 + z^2 u^2),$$

$$\text{d'où} \dots \dots \dots y^2 z^2 + y^2 u^2 + z^2 u^2 = \frac{p^2 - 4r}{16} \dots (4),$$

(en remplaçant  $y^2 + z^2 + u^2$  par sa valeur  $-\frac{p}{2}$ );

$$3^{\circ}. q = -8yzu \dots \dots \dots \text{d'où} \dots \dots \dots yzu = -\frac{q}{8} \dots (5).$$

Telles sont les équations de condition qui peuvent servir à déterminer les valeurs de  $y, z, u$ , dont la somme formera d'ailleurs la valeur de  $x$ . Or l'équation (5), élevée au carré, donne  $y^2 z^2 u^2 = \frac{q^2}{64}$ ; d'où l'on voit que les carrés  $y^2, z^2, u^2$  sont

tels, que leur somme est égale à un nombre donné,  $-\frac{p}{2}$ , la somme de leurs produits deux à deux est égale à un autre nombre donné,  $\frac{p^2 - 4r}{16}$ , enfin le produit de ces trois carrés est

égal à  $\frac{q^2}{64}$ ; donc, en vertu des relations qui existent (n° 257) entre les coefficients et les racines de l'équation du troisième degré, la détermination de  $y^2, z^2, u^2$  ne dépend plus que de la résolution de l'équation du troisième degré

$$t^3 + \frac{p}{2} t^2 + \frac{p^2 - 4r}{16} t - \frac{q^2}{64} = 0.$$

Si, pour faire évanouir les dénominateurs, on pose  $t = \frac{s}{4}$ ,

il vient  $s^3 + 2ps^2 + (p^2 - 4r)s - q^2 = 0 \dots (6).$

Telle est la réduite de l'équation du quatrième degré.

Désignons par  $s', s'', s'''$  les trois racines de l'équation (6), que l'on sait maintenant résoudre; il en résulte

$$y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{s'}, \quad z = \pm \frac{1}{2}\sqrt{s''}, \quad u = \pm \frac{1}{2}\sqrt{s'''};$$

et comme on a d'ailleurs  $x = y + z + u$ , il faut combiner ces valeurs par addition; ce qui donnera, en apparence, huit valeurs différentes. Mais si l'on observe que l'on a, pour une des équations de condition,  $\dots yzu = -\frac{q}{8}$ , on ne doit tenir compte que des combinaisons telles que le produit des trois valeurs de  $y$ ,  $z$  et  $u$  soit positif, si  $q$  est négatif, et négatif, si  $q$  est positif.

D'après cela, le nombre des solutions est évidemment réduit à quatre.

Savoir, lorsque  $q$  est négatif, auquel cas la proposée est

$$\left. \begin{aligned} x^4 + px^3 - qx + r &= 0, \\ x &= +\frac{1}{2}\sqrt{s'} + \frac{1}{2}\sqrt{s''} + \frac{1}{2}\sqrt{s'''}, \\ x &= +\frac{1}{2}\sqrt{s'} - \frac{1}{2}\sqrt{s''} - \frac{1}{2}\sqrt{s'''}, \\ x &= -\frac{1}{2}\sqrt{s'} + \frac{1}{2}\sqrt{s''} - \frac{1}{2}\sqrt{s'''}, \\ x &= -\frac{1}{2}\sqrt{s'} - \frac{1}{2}\sqrt{s''} + \frac{1}{2}\sqrt{s'''}, \end{aligned} \right\} \dots (7).$$

(Pour remplir la condition  $yzu = -\frac{q}{8}$ , il faut que les trois radicaux soient positifs, ou l'un positif et les deux autres négatifs).

Et lorsque  $q$  est positif, ou que l'équation est de la forme

$$\left. \begin{aligned} x^4 + px^3 + qx + r &= 0, \\ x &= -\frac{1}{2}\sqrt{s'} - \frac{1}{2}\sqrt{s''} - \frac{1}{2}\sqrt{s'''}, \\ x &= -\frac{1}{2}\sqrt{s'} + \frac{1}{2}\sqrt{s''} + \frac{1}{2}\sqrt{s'''}, \\ x &= +\frac{1}{2}\sqrt{s'} - \frac{1}{2}\sqrt{s''} + \frac{1}{2}\sqrt{s'''}, \\ x &= +\frac{1}{2}\sqrt{s'} + \frac{1}{2}\sqrt{s''} - \frac{1}{2}\sqrt{s'''}, \end{aligned} \right\} \dots (8).$$

(Ici les trois radicaux sont négatifs, ou bien, deux sont positifs, et le troisième négatif.)

Pour obtenir les quatre racines en fonction immédiate des coefficients de la proposée, il faudrait remplacer  $s'$ ,  $s''$ ,  $s'''$  par leurs valeurs tirées de la réduite; mais les formules que l'on obtiendrait seraient, comme on peut en juger, extrêmement compliquées.

413. *Discussion.* La réalité ou l'imaginarité des racines de la proposée dépend essentiellement de la nature des racines de la réduite; ainsi l'on est conduit à établir les hypothèses suivantes.

1°. LA RÉDUITE PEUT AVOIR SES TROIS RACINES RÉELLES; mais alors, comme son dernier terme  $-q^3$ , est essentiellement négatif, il s'ensuit que ces trois racines sont positives, ou bien, que l'une est positive et les deux autres négatives (n° 329).

Si les trois racines de la réduite sont positives, les quatre racines de la proposée sont nécessairement réelles.

Si l'une d'elles seulement,  $s'$  par exemple, est positive, les quatre racines de la proposée sont imaginaires, à moins que l'on ne suppose les deux racines négatives de la réduite (6), égales entre elles, auquel cas les formules (7) et (8) se réduisent à

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{s'} + \sqrt{s''}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{s'} - \sqrt{s''}, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{s'}, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{s'};$$

$$\text{ou bien, } x = -\frac{1}{2}\sqrt{s'} + \sqrt{s''}, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{s'} - \sqrt{s''}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{s'}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{s'};$$

c'est-à-dire que, dans ce cas particulier, les deux premières racines sont imaginaires, et les deux autres sont réelles et égales.

LA RÉDUITE PEUT AVOIR UNE SEULE RACINE RÉELLE.

Soit  $s'$  cette racine, qui est nécessairement positive, puisque le dernier terme  $-q^3$  est négatif; comme les deux autres racines  $s''$  et  $s'''$  sont imaginaires, si l'une est de la forme  $a + b\sqrt{-1}$ , l'autre est nécessairement (n° 387) de la forme  $a - b\sqrt{-1}$ ; or, on a (n° 389),

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=m+n\sqrt{-1}, \quad \sqrt{a-b\sqrt{-1}}=m-n\sqrt{-1};$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad & \sqrt{a+b\sqrt{-1}} + \sqrt{a-b\sqrt{-1}} = 2m, \\ & \sqrt{a+b\sqrt{-1}} - \sqrt{a-b\sqrt{-1}} = 2n\sqrt{-1}; \end{aligned}$$

donc, quel que soit le signe de  $q$  dans la proposée, *les deux premières racines sont réelles et les deux autres imaginaires*; car dans les formules (7) et (8), les expressions des deux premières racines renferment  $\sqrt{s''}$  et  $\sqrt{s''}$  avec le même signe; tandis que dans les expressions des deux dernières, ces deux radicaux sont affectés de signes contraires.

En récapitulant, on voit que l'équation du 4<sup>e</sup> degré peut avoir ses quatre racines, *ou réelles à la fois, ou imaginaires à la fois, ou bien, avoir deux racines réelles et deux racines imaginaires.*

*Méthode de résolution des équations du troisième et du quatrième degré par les fonctions symétriques.*

De toutes les méthodes que les analystes ont essayées pour résoudre les équations algébriques, celle qui est fondée sur la théorie des fonctions symétriques, et que l'on doit à Lagrange, est sans contredit la plus féconde et la plus élégante, quoiqu'elle entraîne dans des calculs assez compliqués; mais du moins, on se forme aisément une idée de la manière dont elle peut être appliquée aux équations d'un degré supérieur au quatrième.

Pour faire mieux concevoir cette méthode, nous allons d'abord l'appliquer à l'équation du second degré.

414. *Équation du second degré.* Soit  $x^2+px+q=0$ , l'équation proposée; appelons  $a$  et  $b$  ses deux racines; on a déjà (n<sup>o</sup> 257) entre ses racines et les coefficients, les relations

$$a+b=-p, \quad ab=q.$$

Si l'on pouvait former entre  $a$  et  $b$  une autre relation du pre-



mier degré, l'on aurait, pour déterminer ces deux quantités, deux équations du premier degré, et la question n'offrirait plus aucune difficulté.

Désignons donc par  $la + mb$  la fonction de  $a$  et  $b$ , qui doit entrer dans la composition de cette relation inconnue, et posons

$$la + mb = z;$$

$l$ ,  $m$  et  $z$  étant des quantités qu'il s'agit de déterminer.

Comme  $lb + ma$ , donne deux combinaisons différentes,  $la + mb$  et  $lb + ma$ , par l'échange des lettres  $a$  et  $b$ , il s'ensuit (n° 311) que l'équation qui donnera la valeur de  $z$  doit être du second degré et de la forme

$$[z - (la + mb)][z - (lb + ma)] = 0 \dots (1);$$

Et puisque cette équation est du second degré, il faut du moins tâcher qu'elle ne soit qu'à deux termes, ou de la forme  $z^2 = k$ , parce qu'alors une simple extraction de racine suffira pour la résoudre.

Or, pour qu'elle se réduise à cette forme, il faut et il suffit que les deux racines soient égales et de signes contraires.

Posons la condition  $lb + ma = -(la + mb)$ ; il en résulte  $(l + m)(a + b) = 0$ ; mais on ne peut avoir  $a + b = 0$ , puisque le coefficient du second terme de la proposée est différent de 0; on a donc nécessairement

$$l + m = 0, \text{ d'où } l = -m;$$

d'ailleurs, la condition précédente suffit pour remplir l'objet que l'on s'était proposé; ainsi  $m$  reste indéterminé, et l'on peut faire, pour plus de simplicité,  $m = 1$ , ce qui donne  $l = -1$ , et l'équation en  $z$  devient

$$[z - (a - b)][z - (b - a)] = 0;$$

ou réduisant,  $z^2 - (a^2 + b^2) + 2ab = 0 \dots (2).$

Observons maintenant que la théorie des fonctions symétriques donne (n° 304)

$$S_1 = a + b = -p; S_2 = -pS_1 - 2q = p^2 - 2q; ab = q.$$

Substituant ces valeurs de  $a^2 + b^2$  et de  $2ab$  dans l'équation (2), on obtient pour cette réduite,

$$z^2 - p^2 + 4q = 0; \text{ d'où } z = \pm \sqrt{p^2 - 4q}.$$

Si la première valeur de  $z$  représente  $a - b$ , la seconde exprime celle de  $b - a$ .

Combinant enfin l'équation  $a + b = -p$   
avec la relation  $a - b = \sqrt{p^2 - 4q}$ ,

on en déduit  $a = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$ ,  $b = -\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\dots}$ ,

ou bien,  $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ;

telles sont les valeurs obtenues n° 93.

415. Équation du troisième degré,  $x^3 + px + q = 0$ .

Puisque le second terme manque dans cette équation, on a déjà, entre  $a, b, c$ , la relation  $a + b + c = 0$ ; si donc nous pouvions former deux autres équations du premier degré en  $a, b, c$ , les valeurs de ces quantités pourraient être aisément déterminées.

Désignons par  $la + mb + nc$  une des fonctions qui doivent entrer dans la composition des équations qu'il s'agit d'obtenir, et posons  $la + mb + nc = x \dots (1)$ .

Comme cette fonction donne six combinaisons différentes, par l'échange des lettres  $a, b, c$ , les unes dans les autres, savoir :

$$\begin{array}{ll} la + mb + nc, & lb + ma + nc, \\ la + mc + nb, & \text{et } lb + mc + na, \\ lc + ma + nb, & lc + mb + na, \end{array}$$

l'équation d'où dépendra sa valeur doit être du sixième degré; or, pour qu'une équation de ce degré puisse être résolue d'après les principes déjà établis, il faut (n° 402) qu'elle ne reçoive

que les exposans 6 et 3; c'est-à-dire qu'elle soit de la forme

$$z^6 + Az^3 + B = 0 \dots (2).$$

Tâchons donc de déterminer les relations qui existent entre les six racines de cette dernière équation, afin d'en déduire celles qui doivent exister entre les six expressions précédentes.

Désignons par  $u', u''$ , les deux racines que l'on obtient immédiatement, en posant  $z^3 = u$ ; d'où

$$u^3 + Au + B = 0, \text{ et } u = -\frac{A}{3} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B};$$

appelons en outre 1,  $\alpha$ ,  $\alpha^2$  les trois racines cubiques de 1; on a

$$1^\circ. \quad z = u', \quad z = \alpha u', \quad z = \alpha^2 u';$$

$$2^\circ. \quad z = u'', \quad z = \alpha u'', \quad z = \alpha^2 u'';$$

ainsi, en prenant  $la + mb + nc = z'$  et  $la + mc + nb = z''$  pour les deux combinaisons principales, si l'on veut exprimer que les quatre autres forment avec celles-ci une équation de la forme (2), il faut et il suffit que l'on ait les relations

$$1^\circ. \quad lc + ma + nb = \alpha (la + mb + nc),$$

$$lb + mc + na = \alpha^2 (la + mb + nc).$$

$$2^\circ. \quad lb + ma + nc = \alpha (la + mc + nb).$$

$$lc + mb + na = \alpha^2 (la + mc + nb).$$

(Il est à remarquer que l'on ne doit pas évaluer indifféremment l'une quelconque des quatre dernières combinaisons au produit de  $\alpha$  ou de  $\alpha^2$ , par la première; mais il faut avoir soin que, dans la combinaison que l'on prend pour former le premier membre de la relation, aucune des lettres  $a, b, c$ , ne soit affectée d'un coefficient égal à celui dont elle est affectée dans la combinaison qui forme le second membre; autrement, on serait conduit à des relations qui impliqueraient contradiction.)

Les quatre relations précédentes peuvent être transformées

ainsi :

$$\begin{aligned}(l - an)c + (m - al)a + (n - am)b &= 0, \\ (l - a^2n)b + (m - a^2n)c + (n - a^2l)a &= 0, \\ (l - an)b + (m - al)a + (n - am)c &= 0, \\ (l - a^2m)c + (m - a^2n)b + (n - a^2l)a &= 0;\end{aligned}$$

or, ces conditions seront évidemment satisfaites, si l'on a séparément

$$\begin{aligned}l &= an, \quad m = al, \quad n = am; \\ l &= a^2m, \quad m = a^2n, \quad n = a^2l;\end{aligned}$$

ces six relations se réduisent à deux essentiellement différentes,

$$m = al \quad \text{et} \quad n = a^2l.$$

En effet, on a  $a^3 = 1$ ; d'où  $a = \frac{1}{a^2}$  et  $a^2 = \frac{1}{a}$ ;

donc  $m = al$  revient à  $m = \frac{1}{a^2} \cdot l$ , d'où  $l = a^2m$ ;

de même,  $n = a^2l$  revient à  $n = \frac{1}{a} \cdot l$ ; d'où  $l = an$ .

Les mêmes relations,  $m = al$ ,  $n = a^2l$ , divisées l'une par l'autre,

donnent  $\frac{m}{n} = \frac{1}{a}$ ; d'où  $m = \frac{1}{a} n = a^2n$  et  $n = am$ .

Ainsi, il suffit de considérer les deux relations

$$m = al \quad \text{et} \quad n = a^2l.$$

Comme ces relations donnent  $m$  et  $n$  en fonction de  $l$  et que  $l$  reste indéterminé, on peut supposer, pour plus de simplicité,

$$l = 1; \text{ ce qui donne } m = a, \quad n = a^2;$$

en sorte que les trois valeurs de  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , ne sont autre chose que les racines cubiques de l'unité. Substituons ces valeurs dans les deux expressions

$$la + mb + nc = z', \quad la + mc + nb = z'';$$

il vient  $a + ab + a^2c = z'$ ,  $a + ac + a^2b = z''$ .

On pourrait également substituer ces valeurs dans les quatre autres combinaisons, et former ensuite l'équation en  $z$ ; mais observons que, puisqu'elle doit être de la forme (2), ses six racines sont comprises dans les deux équations

$$z^3 = z'^3 = (a + ab + a^2c)^3, \quad z^3 = z''^3 = (a + ac + a^2b)^3,$$

on, ce qui revient au même, dans l'équation unique

$$[z^3 - (a + ab + a^2c)^3] [z^3 - (a + ac + a^2b)^3] = 0.$$

Effectuant les calculs, et comparant les coefficients du produit à ceux de l'équation (2), on trouve

$$A = -[(a + ab + a^2c)^3 + (a + ac + a^2b)^3],$$

$$B = (a + ab + a^2c)^3 \cdot (a + ac + a^2b)^3.$$

Si l'on remonte à la composition primitive de l'équation en  $z$ , on reconnaît que cette équation est symétrique en  $a, b, c$ ; ainsi les coefficients  $A$  et  $B$  peuvent (n° 310) s'exprimer au moyen des coefficients de la proposée, et la difficulté consiste à évaluer les diverses fonctions symétriques dont  $A$  et  $B$  se composent.

Avant d'aller plus loin, rappelons-nous que  $1, \alpha, \alpha^2$  étant les racines de l'équation  $y^3 - 1 = 0$ , l'on a

$$\alpha^3 = 1, \quad \alpha^4 = \alpha^3 \cdot \alpha = \alpha, \quad \alpha^5 = \alpha^2, \quad \alpha^6 = 1, \dots$$

et  $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ ; d'où  $\alpha + \alpha^2 = -1$ .

Cela posé, développons les valeurs de  $A$  et  $B$ ; il vient

$$1^\circ. \quad A = -[2T \cdot \alpha^3 + 3(\alpha + \alpha^2)T \cdot a^3b + 12abc],$$

ou  $A = -[2T \cdot \alpha^3 - 3T \cdot a^3b + 12abc].$

Or, les formules des n°s 304 et 305, appliquées à l'équation  $x^3 + px + q = 0$ , donnent

$$S_1 = 0, \quad S_2 = -PS_1, \quad -2Q = -2p, \quad S_3 = -PS_2 - QS_1 - 3R = -3q;$$

d'où  $Ta^3b = S_2S_1 - S_3 = -S_3 = 3q;$

d'ailleurs on a  $abc = -q;$

donc  $A = -(-6q - 9q - 12q) = 27q$ ;

$$2^{\circ}. \quad B = [(a + ab + a^2c)(a + ac + a^2b)]^3;$$

$$\text{mais } (a + ab + a^2c)(a + ac + a^2b) = T.a^3 + (a + a^2)T.ab \\ = T.a^3 - T.ab;$$

d'ailleurs, on a  $T.a^3 = S_a = -2p$ ,  $T.ab = p$ ;

$$\text{ainsi,} \quad B = (-3p)^3 = -27p^3;$$

donc enfin, l'on obtient, pour l'équation en  $z$ ,

$$z^6 + 27qz^3 - 27p^3 = 0.$$

Cette équation donne d'abord

$$z^3 = -\frac{27q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{27q}{2}\right)^2 + 27p^3},$$

$$\text{ou bien,} \quad z^3 = 27\left(-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right),$$

d'où l'on tire, pour les valeurs de  $z'$  et  $z''$ ,

$$z' = 3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad z'' = 3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Ces valeurs étant connues, pour obtenir celles de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , il suffit de combiner les trois équations

$$a + ab + a^2c = z',$$

$$a + ac + a^2b = z'',$$

$$a + b + c = 0,$$

dont la dernière exprime, comme nous l'avons déjà vu, que la proposée est privée de second terme.

D'abord, l'addition de ces trois équations donne, en vertu de la relation  $1 + a + a^2 = 0$ ,

$$3a = z' + z'',$$

d'où l'on déduit

$$a = \frac{z' + z''}{3},$$

ou remplaçant  $z'$  et  $z''$  par leurs valeurs ci-dessus,

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

c'est la première racine donnée par la méthode du n° 406.

Maintenant, multiplions la première équation par  $a$ , la seconde par  $a^2$ , et ajoutons ces produits avec la troisième équation; l'on obtient

$$3c = az' + a^2z'', \text{ d'où } c = \frac{az' + a^2z''}{3} = am + a^2n,$$

$m$  et  $n$  désignant toujours les deux radicaux  $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \dots}$

Enfin, multiplions la première par  $a^2$  et la seconde par  $a$ , puis ajoutons; il vient

$$3b = a^2z' + az'', \text{ d'où } b = \frac{a^2z' + az''}{3} = a^2m + an.$$

Ce sont encore les deux autres racines trouvées par la première méthode.

416. *Équation du quatrième degré*,  $x^4 + px^2 + qx + r = 0 \dots (1)$ . Comme on a déjà la relation  $a + b + c + d = 0$ , il faut tâcher d'obtenir trois autres relations du premier degré en  $a, b, c, d$ .

Désignons par  $ka + lb + mc + nd$  l'une de ces fonctions dont il s'agit de trouver la valeur. Puisqu'en permutant les lettres  $a, b, c, d$ , de toutes les manières possibles, on pourrait (n° 148) former 24 combinaisons différentes, il s'ensuit que la réduite en  $z$  serait du 24<sup>e</sup> degré; ainsi nous devrions faire en sorte de la ramener à la forme

$$z^{24} + Az^{16} + Bz^8 + C = 0,$$

pour qu'elle fût résoluble à la manière de celles du troisième. Mais d'abord il est possible, à l'aide de quelques artifices d'analyse, de diminuer son degré.

En effet,  $k, l, m, n$  étant des indéterminées, supposons  $k = l$ ,

ce qui réduit le nombre des combinaisons différentes à 12, puis  $m=n$ , et on les réduit à 6, savoir :

$$\begin{array}{ll} l(a+b) + m(c+d), & l(c+d) + m(a+b), \\ l(a+c) + m(b+d), & \text{et } l(b+d) + m(a+c), \\ l(a+d) + m(b+c), & l(b+c) + m(a+d); \end{array}$$

toutes les autres combinaisons rentrent évidemment dans celles-là.

Cela posé, puisque la nouvelle équation en  $x$  est du 6<sup>e</sup> degré, il faut tâcher de la ramener à la forme

$$x^6 + Ax^4 + Bx^2 + C = 0 \dots (2);$$

ce qui exige que ces racines soient égales deux à deux et de signes contraires. Or, il est évident que l'on satisfera à cette condition, en posant  $l = -m = 1$ ; car alors les combinaisons précédentes deviendront

$$\begin{array}{ll} a+b-(c+d), & c+d-(a+b), \\ a+c-(b+d), & \text{et } b+d-(a+c), \\ a+d-(b+c), & b+c-(a+d). \end{array}$$

Observons que les combinaisons placées sur une même ligne horizontale sont égales et de signes contraires; donc, en multipliant entre eux les facteurs du premier degré en  $x$  qui correspondent à ces valeurs, on obtiendra

$$\begin{aligned} [x^2 - (a+b-c-d)^2] [x^2 - (a+c-b-d)^2] \\ [x^2 - (a+d-b-c)^2] &= 0, \end{aligned}$$

pour l'équation réduite.

Cette équation étant évidemment symétrique en  $a, b, c, d$ , ses coefficients peuvent s'exprimer au moyen des coefficients de la proposée; mais on peut faciliter leur détermination par les considérations suivantes:

D'abord  $(a+b-c-d)^2$  développé, revient à

$$(a+b+c+d)^2 - 4(ac+ad+bc+bd);$$



mais on a

$$a + b + c + d = 0, \text{ et } ab + ac + ad + bc + bd + cd = p;$$

$$\text{donc } -(a + b - c - d)^2 = 4p - 4(ab + cd);$$

on trouverait de même

$$-(a + c - b - d)^2 = 4p - 4(ac + bd),$$

$$-(a + d - b - c)^2 = 4p - 4(ad + bc);$$

$$\text{ainsi, en supposant } z^2 + 4p = 4u \dots (3),$$

l'équation en  $z$  se change en celle-ci :

$$[u - (ab + cd)][u - (ac + bd)][u - (ad + bc)] = 0,$$

équation de la forme  $u^3 + A'u^2 + B'u + C' = 0$ , et dont il ne s'agit plus que de déterminer les coefficients.

$$\text{Or on a, } 1^\circ. A' = -(ab + ac + ad + bc + bd + cd) = -p.$$

$$2^\circ. B' = (ab + cd)(ac + bd) + (ab + cd)(ad + bc) + (ac + bd)(ad + bc),$$

ou, développant et employant les notations,  $B' = T.a^2bc$ ; mais la formule du n° 309,

$$T.a^2b^2c^2 = \frac{T.a^2b^2 \times T.a^2 - T.a^{n+2}b^2 - T.a^2b^2}{2},$$

devient, en supposant  $n = 2$  et  $p = 1$ ,

$$T.a^2bc = \frac{T.a^2b \times T.a - T.a^2b - 2T.a^2b^2}{2};$$

d'ailleurs, la proposée étant  $x^4 + px^3 + qx + r = 0$ ,

$$\text{on a } S_1 = -P = 0; S_2 = -2Q = -2p; S_3 = -3R = -3q; \\ S_4 = -QS_2 - 4S = 2p^2 - 4r;$$

$$\text{d'où } T.a^2b \times T.a = T.a^2b \times S_1 = 0, \\ T.a^2b = S_3S_1 - S_4 = -2p^2 + 4r, \\ 2T.a^2b^2 = (S_2)^2 - S_4 = 4p^2 - (2p^2 - 4r) = 2p^2 + 4r;$$

donc  $T.a^2bc$  ou  $B' = \frac{2p^3 - 4r - 2p^3 - 4r}{2} = -4r$ .

3°.  $C' = -(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)$ ,  
ou développant,  $C' = -(T.a^2b^2c^2 + abcd \times T.a^2)$ .

Mais la formule du n° 309,

$$T.a^2b^2c^2 = \frac{T.a^2b^2 \times T.a^2 - T.a^2b^2}{3},$$

devient, dans l'hypothèse de  $n=2$ ,

$$T.a^2b^2c^2 = \frac{T.a^2b^2 \times T.a^2 - T.a^2b^2}{3};$$

d'ailleurs, on a déjà trouvé  $T.a^2b^2 = p^3 + 2r$ ;  $S_4 = -2p$ ; de plus

$$\begin{aligned} S_6 &= -QS_4 - RS_3 - SS_2 = -2p^3 + 4pr + 3q^2 + 2pr \\ &= -2p^3 + 6pr + 3q^2; \end{aligned}$$

par conséquent, comme  $T.a^4b^2 = S_4S_2 - S_6$ ,

$$\begin{aligned} \text{il en résulte } T.a^4b^2 &= -4p^3 + 8pr + 2p^3 - 6pr - 3q^2 \\ &= -2p^3 + 2pr - 3q^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } T.a^2b^2c^2 &= \frac{(p^3 + 2r) \times -2p + 2p^3 - 2pr + 3q^2}{3} \\ &= \frac{-6pr + 3q^2}{3} = q^2 - 2pr; \end{aligned}$$

on a enfin  $abcd = r$ , dernier terme de l'équation; donc

$$C' = -(q^2 - 2pr + r \times -2p) = 4pr - q^2,$$

et l'équation en  $u$  devient

$$u^3 - pu^2 - 4ru + 4pr - q^2 = 0.$$

Remplaçons maintenant  $u$  par sa valeur tirée de l'équation (3), c'est-à-dire par  $\frac{z^2 + 4p}{4}$ , ou plutôt par  $z + p$ , afin de conserver la réduite au troisième degré et d'avoir des coefficients plus

simples; on obtient finalement pour résultat,

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0 \dots (4),$$

équation identique avec la *réduite* obtenue d'après la première méthode (n° 412).

Si l'on désigne par  $z'$ ,  $z''$ ,  $z'''$  les racines de cette équation,  $4z'$ ,  $4z''$ ,  $4z'''$  seront nécessairement les carrés des trois combinaisons

$$a + b - c - d, \quad a + c - b - d, \quad a + d - b - c,$$

puisque l'on a fait dans l'équation primitive en  $z$ ,  $z^2 = 4z$ .

Ainsi l'on a pour valeurs de ces combinaisons,

$$\begin{aligned} a + b - c - d &= \pm 2\sqrt{z'}, \\ a + c - b - d &= \pm 2\sqrt{z''}, \\ a + d - b - c &= \pm 2\sqrt{z'''} \end{aligned}$$

Combinons ces trois relations avec l'équation déjà établie

$$a + b + c + d = 0,$$

on trouve *premièrement*, par leur addition,

$$4a = \pm 2\sqrt{z'} \pm 2\sqrt{z''} \pm 2\sqrt{z'''},$$

d'où 
$$a = \pm \frac{1}{2}\sqrt{z'} \pm \frac{1}{2}\sqrt{z''} \pm \frac{1}{2}\sqrt{z'''},$$

*Secondement*, ajoutant la première et la quatrième, puis soustrayant de leur somme celle des deux autres, on obtient

$$4b = \pm 2\sqrt{z'} \mp 2\sqrt{z''} \mp 2\sqrt{z'''},$$

d'où 
$$b = \pm \frac{1}{2}\sqrt{z'} \mp \frac{1}{2}\sqrt{z''} \mp \frac{1}{2}\sqrt{z'''},$$

on trouverait, par des moyens analogues,

$$c = \mp \frac{1}{2}\sqrt{z'} \pm \frac{1}{2}\sqrt{z''} \mp \frac{1}{2}\sqrt{z'''},$$

$$d = \mp \frac{1}{2}\sqrt{z'} \mp \frac{1}{2}\sqrt{z''} \pm \frac{1}{2}\sqrt{z'''},$$

Mais il se présente ici une difficulté analogue à celle que l'on a rencontrée dans l'autre méthode; elle est relative aux signes dont les radicaux doivent être affectés. Pour déterminer ces signes, il suffit de former le produit des trois combinaisons

$$a + b - c - d, \quad a + c - b - d, \quad a + d - b - c.$$

Or, en les multipliant, on obtient pour produit,

$$T.a^3 - T.a^2b + 2T.abc;$$

mais on a  $T.a^3 = S_3 = -3q$ ,  $T.a^2b = S_2S_1 - S_3 = 3q$ ,

et  $T.abc = -q$ ;

donc  $(a + b - c - d)(a + c - b - d)(a + d - b - c) = -8q$ ;

ce qui prouve que les radicaux  $\sqrt{z'}$ ,  $\sqrt{z''}$ ,  $\sqrt{z'''}$  doivent être affectés de signes tels, que leur produit soit *positif* si  $q$  est *né-*  
*gatif*, et *né-*  
*gatif* si  $q$  est *positif*.

D'après cela, on a évidemment pour les racines de l'équation

$$x^4 + px^3 + qx + r = 0,$$

$$a = \frac{1}{2} (+\sqrt{z'} + \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}),$$

$$b = \frac{1}{2} (+\sqrt{z'} - \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}),$$

$$c = \frac{1}{2} (-\sqrt{z'} + \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}),$$

$$d = \frac{1}{2} (-\sqrt{z'} - \sqrt{z''} + \sqrt{z'''});$$

et pour les racines de l'équation  $x^4 + px^3 + qx + r = 0$ ,

$$a = \frac{1}{2} (-\sqrt{z'} - \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}),$$

$$b = \frac{1}{2} (-\sqrt{z'} + \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}),$$

$$c = \frac{1}{2} (+\sqrt{z'} - \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}),$$

$$d = \frac{1}{2} (+\sqrt{z'} + \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}).$$

Ce sont absolument les mêmes valeurs que celles qui ont été obtenues par la première méthode.

417. *Scholie général.* En appliquant la même méthode à l'équation du cinquième degré, on devrait chercher la valeur d'une fonction de la forme  $ha + kb + lc + md + ne$ . Comme les cinq lettres  $a, b, c, d, e$  fournissent  $24 \times 5$  ou 120 permutations différentes (n° 148), il s'ensuit que la détermination de cette fonction dépendrait d'une équation du 120° degré, dont il faudrait ensuite, à l'aide de quelques artifices d'analyse, faire en sorte d'abaisser le degré. Mais jusqu'ici les efforts que l'on a tentés pour obtenir une *réduite convenable* ont été infructueux; et l'on doute si jamais on y pourra parvenir, à cause de la longueur et de la complication des calculs.

Depuis long-temps les analystes ont cru devoir renoncer au problème de la résolution générale des équations, comme ne pouvant être d'aucune utilité dans les applications numériques; le seul avantage qu'offriraient les résultats, serait de confirmer la proposition hypothétique (n° 250): *toute équation a au moins une racine.*

## CHAPITRE X.

### *Complément de la théorie des Suites.*

#### § 1<sup>er</sup>. Des Séries récurrentes.

418. Nous avons vu (n° 191) que les fractions algébriques rationnelles de la forme  $\frac{a}{a' + b'x}, \frac{a + bx}{a' + b'x + c'x^2}, \dots$ , donnent lieu à des séries d'une nature particulière et connues sous le

nom de *séries récurrentes*. Or, on peut se proposer, sur ces sortes de séries, deux questions analogues à celles que nous avons résolues pour les *progressions par quotient*, qui sont d'ailleurs elles-mêmes des séries récurrentes du premier ordre.

La première question a pour objet de *déterminer le terme général d'une série récurrente*, c'est-à-dire une expression à l'aide de laquelle le rang d'un terme étant donné, on puisse obtenir la valeur de ce terme, sans que l'on soit obligé de former d'abord tous ceux qui précèdent.

La seconde a pour but de *revenir de la série récurrente à la fraction génératrice*, ou, ce qui revient au même, de *déterminer la somme des termes de la série*.

Nous supposons que l'on ait revu avec attention ce qui a été dit nos 191 et 192 sur les séries récurrentes.

419. *Détermination du terme général d'une série récurrente.* Pour passer du simple au composé, considérons, en premier lieu, la fraction  $\frac{a}{a' + b'x}$ , qui, comme l'on sait, donne naissance à une *série récurrente du premier ordre*.

On a trouvé (n° 187)

$$\frac{a}{a' + b'x} = \frac{a}{a'} - \frac{a}{a'} \cdot \frac{b'}{a'} x + \frac{a}{a'} \cdot \frac{b'^2}{a'^2} x^2 - \frac{a}{a'} \cdot \frac{b'^3}{a'^3} x^3 + \dots;$$

or, cette série n'est autre chose qu'une progression par quotient dont le premier terme est  $\frac{a}{a'}$ , la raison  $-\frac{b'}{a'} x$ ; donc, d'après ce qui a été dit n° 200, le *terme général de cette série*, ou le *n<sup>ième</sup> terme*, est  $\frac{a}{a'} \cdot \left(-\frac{b'}{a'} x\right)^{n-1}$ .

Soit maintenant la fraction  $\frac{a + bx}{a' + b'x + c'x^2}$ , que l'on peut, pour simplifier, mettre sous la forme  $\frac{a + cx}{a' + c'x + x^2}$ , en faisant

$$\frac{a}{c'} = a, \quad \frac{b}{c'} = c, \quad \frac{a'}{c'} = a', \quad \text{et} \quad \frac{b'}{c'} = c'.$$

Désignons par  $x - p$  et  $x - q$  les deux facteurs du trinôme  $x^2 + c'x + a'$ , et concevons que l'on ait pu décomposer la fraction  $\frac{a + cx}{a' + c'x + x^2}$  en deux fractions simples,  $\frac{A}{x - p} + \frac{B}{x - q}$ ; comme chacune d'elles donne lieu à une série récurrente du premier ordre, si l'on forme ces deux séries séparément, ainsi que le *terme général* de chacune d'elles, la somme de ces deux termes sera le *terme général de la série du second ordre*. Donc la difficulté consiste à déterminer A et B, de manière qu'on ait l'identité

$$\frac{a + cx}{a' + c'x + x^2} = \frac{A}{x - p} + \frac{B}{x - q};$$

or, si l'on réduit les deux termes du second membre au même dénominateur, il viendra, à cause de  $a' + c'x + x^2 = (x - p)(x - q)$ ,

$$a + cx = A(x - q) + B(x - p) = (A + B)x - (Aq + Bp);$$

mais cette équation doit exister, quelle que soit la valeur de  $x$ ; ainsi (n° 188) on a séparément,  $A + B = c$ ;  $Aq + Bp = -a$ ; d'où l'on déduit

$$A = \frac{cp + a}{p - q}; \quad B = -\frac{cq + a}{p - q}.$$

A et B étant déterminés, si nous comparons les deux fractions

$\frac{A}{x - p}$ ,  $\frac{B}{x - q}$  à la fraction  $\frac{a}{a' + b'x}$  pour laquelle le terme général est, comme on vient de le voir,  $\frac{a}{a'} \left( -\frac{b'}{a'} \cdot x \right)^{n-1}$ , on a pour le *terme général* de la fraction proposée,  $\frac{a + cx}{a' + c'x + x^2}$ , on a,

$$\text{dis-je,} \quad -\frac{A}{p} \cdot \left( \frac{1}{p} \cdot x \right)^{n-1} - \frac{B}{q} \cdot \left( \frac{1}{q} \cdot x \right)^{n-1},$$

ou bien,  $-\left( \frac{A}{p^n} + \frac{B}{q^n} \right) x^{n-1}$ , expression dans laquelle il ne s'agi-

il faut plus que de remplacer A et B par leurs valeurs obtenues ci-dessus.

Soit, pour exemple,  $\frac{3-2x}{3+2x-x^2}$  ou  $\frac{-3+2x}{-3-2x+x^2}$ ;

l'équation  $x^2-2x-3=0$ , étant résolue, donne  $x=3$ ,  $x=-1$ ;  
d'où  $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ .

Cela posé, faisons  $\frac{-3+2x}{-3-2x+x^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$ ; il vient, en chassant les dénominateurs et réduisant,

$$-3+2x=(A+B)x+A-3B;$$

d'où  $A+B=2$ ,  $A-3B=-3$ , ce qui donne  $A=\frac{3}{4}$ ,  $B=\frac{5}{4}$ .

Donc, en vertu de la formule  $-\left(\frac{A}{p^n} + \frac{B}{q^n}\right)x^{n-1}$ , le terme général du développement de  $\frac{3-2x}{3+2x-x^2}$ , est

$$-\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3^n} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{(-1)^n}\right)x^{n-1}.$$

Soit  $n=1$ ; cette expression devient  $-\left(\frac{3}{12} - \frac{5}{4}\right)x^0$  ou  $+1$ ,

$$n=2 \dots -\left(\frac{3}{4 \cdot 3^2} + \frac{5}{4}\right)x^1 \text{ ou } -\frac{4}{3}x,$$

$$n=3 \dots -\left(\frac{3}{4 \cdot 3^3} - \frac{5}{4}\right)x^2 \text{ ou } +\frac{11}{9}x^2,$$

$$n=4 \dots -\left(\frac{3}{4 \cdot 3^4} + \frac{5}{4}\right)x^3 \text{ ou } -\frac{34}{27}x^3,$$

.....

On a donc, pour le développement lui-même,

$$\frac{3-2x}{3+2x-x^2} = 1 - \frac{4}{3}x + \frac{11}{9}x^2 - \frac{34}{27}x^3 + \dots,$$

résultat qu'il est facile de vérifier par la réduction en série,



d'après la méthode des coefficients indéterminés. Mais le principal avantage qui résulte de la détermination du *terme général*, c'est de pouvoir obtenir un terme de rang quelconque, sans passer par tous les termes intermédiaires.

420. *Cas particuliers.* 1°. La méthode que l'on vient d'indiquer est en défaut, lorsque les deux racines du trinôme  $x^2 + \epsilon'x + \alpha'$  sont égales; car alors les valeurs de A et B deviennent  $\frac{\epsilon p + \alpha}{0}$  et  $-\frac{\epsilon q + \alpha}{0}$ , c'est-à-dire infinies; et en effet, on conçoit que la somme des deux fractions  $\frac{A}{x-p}, \frac{B}{x-p}$ , ne peut reproduire une fraction dont le dénominateur est du second degré en  $x$ .

Mais observons que, dans ce cas, la fraction  $\frac{\alpha + \epsilon'x}{(x-p)^2}$ , peut se mettre sous la forme

$$\frac{\alpha}{(x-p)^2} + \frac{\epsilon x}{(x-p)^2},$$

ou bien encore,

$$\frac{\alpha}{(x-p)^2} + \frac{\epsilon(x-p)}{(x-p)^2} + \frac{\epsilon p}{(x-p)^2},$$

expression qui se réduit à

$$\frac{\alpha + \epsilon p}{(x-p)^2} + \frac{\epsilon}{x-p}.$$

Or, la seconde partie de cette expression donne lieu à une série récurrente du premier ordre, qui a (n° 419) pour terme général,  $-\left(\frac{\epsilon}{p^n}\right)x^{n-1}$ .

Quant à la première, elle revient à  $(\alpha + \epsilon p)(p-x)^{-2}$ , ou  $\frac{\alpha + \epsilon p}{p^2} \cdot \left(1 - \frac{x}{p}\right)^{-2}$ ; et si l'on développe ce second facteur par la formule du binôme, on trouve

$$\left(1 - \frac{x}{p}\right)^{-2} = 1 + \frac{2x}{p} + \frac{3x^2}{p^2} + \frac{4x^3}{p^3} + \dots + \frac{nx^{n-1}}{p^{n-1}},$$

$n$  désignant le rang d'un terme quelconque; donc le *terme gé-*

général correspondant à  $\frac{\alpha + \zeta p}{p^2} \left(1 - \frac{x}{p}\right)^{-n}$  ou  $\frac{\alpha + \zeta p}{(x-p)^2}$ , est

$$\frac{\alpha + \zeta p}{p^2} \cdot \frac{n x^{n-1}}{p^{n-1}} \quad \text{ou} \quad \frac{n(\alpha + \zeta p)}{p^{n+1}} \cdot x^{n-1}.$$

Ainsi, le terme général qui correspond à  $\frac{\alpha + \zeta x}{(x-p)^2}$  est

$$\left[ \frac{n(\alpha + \zeta p)}{p^{n+1}} - \frac{\zeta}{p^n} \right] x^{n-1} \quad \text{ou} \quad \frac{n\alpha + (n-1)\zeta p}{p^{n+1}} \cdot x^{n-1}.$$

421. 2°. Le cas où les deux racines  $p$  et  $q$  sont imaginaires semble aussi faire exception à la méthode du n° 419, puisque l'expression du terme général renferme les quantités  $p$  et  $q$ , et qu'alors cette expression doit être elle-même compliquée d'imaginaires. Mais il est facile de s'assurer que les imaginaires se réduisent et disparaissent tout-à-fait.

En effet, si l'on remplace dans  $-\left(\frac{A}{p^n} + \frac{B}{q^n}\right)x^{n-1}$ ,  $A$  et  $B$  par leurs valeurs trouvées n° 419, il vient

$$\frac{(\zeta q + \alpha)p^n - (\zeta p + \alpha)q^n}{p^n q^n (p - q)} \cdot x^{n-1},$$

expression qui peut se mettre sous la forme

$$\left[ \frac{\alpha(p^n - q^n)}{p^n q^n (p - q)} + \frac{\zeta(p^{n-1} - q^{n-1})}{p^{n-1} q^{n-1} (p - q)} \right] \cdot x^{n-1}.$$

Cela posé, si l'on a  $p = r + s\sqrt{-1}$ ,

on a aussi nécessairement  $q = r - s\sqrt{-1}$ ;

d'où  $pq = r^2 + s^2$ ,  $p^n q^n = (r^2 + s^2)^n$ ,  $p^{n-1} q^{n-1} = (r^2 + s^2)^{n-1}$ ,

$p - q = 2s\sqrt{-1}$ ,  $p^n - q^n = (r + s\sqrt{-1})^n - (r - s\sqrt{-1})^n = 2k\sqrt{-1}$

(en développant par la formule du binôme et réduisant);

enfin  $p^{n-1} - q^{n-1} = 2k'\sqrt{-1}$ .

Le terme général devient donc

$$\left[ \frac{2\alpha k \cdot \sqrt{-1}}{(r^2 + s^2)^n \cdot 2s \sqrt{-1}} + \frac{2\alpha' k' \cdot \sqrt{-1}}{(r^2 + s^2)^{n-1} \cdot 2s \sqrt{-1}} \right] \cdot x^{n-1} =$$

$$\left[ \frac{\alpha k}{s(r^2 + s^2)^n} - \frac{\alpha' k'}{s(r^2 + s^2)^{n-1}} \right] x^{n-1},$$

expression tout-à-fait débarrassée d'imaginaires.

*Remarque.* Pour peu qu'on réfléchisse sur la marche que l'on a suivie pour la détermination du *terme général* relatif à une série récurrente du second ordre, on voit que la question est ramenée à la *décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples* dont les dénominateurs soient les facteurs du premier degré, du dénominateur de la fraction proposée.

Cette question incidente étant d'une très grande importance dans la haute analyse, nous en donnerons encore la solution pour une fraction rationnelle dont le dénominateur est du troisième degré en  $x$ .

422. *Décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples.*

Soit  $\frac{\alpha + \zeta x + \gamma x^2}{\alpha' + \zeta' x + \gamma' x^2 + x^3}$  la fraction proposée, et désignons par  $x-p$ ,  $x-q$ ,  $x-r$ , les trois facteurs du dénominateur, que nous supposons d'abord *réels et inégaux*.

$$\text{Posons } \frac{\alpha + \zeta x + \gamma x^2}{\alpha' + \zeta' x + \gamma' x^2 + x^3} = \frac{A}{x-p} + \frac{B}{x-q} + \frac{C}{x-r},$$

$A$ ,  $B$ ,  $C$  étant des quantités qu'il s'agit de déterminer. On a d'abord, en réduisant au même dénominateur, et observant que

$$\alpha' + \zeta' x + \gamma' x^2 + x^3 = (x-p)(x-q)(x-r),$$

on a, dis-je,

$$\alpha + \zeta x + \gamma x^2 = A(x-q)(x-r) + B(x-p)(x-r) + C(x-p)(x-q).$$

On pourrait, comme dans le n° 419, effectuer les calculs, puis comparer les deux membres terme à terme, ce qui donne

ruit entre A, B, C, trois relations desquelles on déduirait ensuite les valeurs de ces quantités; mais, par une considération particulière, on parvient plus simplement à la détermination de ces valeurs.

Comme l'équation précédente doit exister, quelle que soit la valeur de  $x$ , et que de plus, A, B, C doivent être indépendans de  $x$ , il s'ensuit que si, pour une valeur particulière attribuée à cette lettre, on parvient à déterminer des valeurs correspondantes pour A, B, C, ces valeurs conviendront également à l'équation générale. Or, si l'on fait successivement dans cette équation,  $x=p$ ,  $x=q$ ,  $x=r$ , il vient,

$$1^{\circ} \text{ pour } x=p, \quad a + \zeta p + \gamma p^2 = A(p-q)(p-r),$$

$$\text{ce qui donne} \quad A = \frac{a + \zeta p + \gamma p^2}{(p-q)(p-r)};$$

$$2^{\circ} \text{ pour } x=q, \quad B = \frac{a + \zeta q + \gamma q^2}{(q-p)(q-r)};$$

$$3^{\circ} \text{ pour } x=r, \quad C = \frac{a + \zeta r + \gamma r^2}{(r-p)(r-q)}.$$

423. *Cas particuliers.* 1°. Supposons  $p=q=r$ ; la décomposition précédente ne peut plus avoir lieu; car les coefficients A, B, C deviennent infinis.

Mais en suivant une marche analogue à celle du n° 420, on peut poser

$$\frac{a + \zeta x + \gamma x^2}{(x-p)^3} = \frac{A}{(x-p)^2} + \frac{B}{(x-p)} + \frac{C}{x-p},$$

et essayer de déterminer A, B, C d'après cette décomposition.

Pour cela, chassons les dénominateurs; il vient

$$a + \zeta x + \gamma x^2 = A + B(x-p) + C(x-p)^2.$$

Soit d'abord  $x=p$ ; il en résulte  $A = a + \zeta p + \gamma p^2$ , et l'équation devient, lorsqu'on y met cette valeur de A,

$$\zeta(x-p) + \gamma(x^2 - p^2) = B(x-p) + C(x-p)^2,$$

ou, divisant par le facteur commun  $x - p$ ,

$$\zeta + \gamma(x + p) = B + C(x - p).$$

Faisons de nouveau  $x = p$ ; on trouve

$$B = \zeta + 2\gamma p;$$

d'où, remplaçant, dans l'équation que l'on vient d'obtenir, B par cette valeur,

$$\gamma(x - p) = C(x - p); \quad \text{donc} \quad C = \gamma.$$

Ainsi, l'on a l'identité

$$\frac{\alpha + \zeta x + \gamma x^2}{\alpha' + \zeta'x + \gamma'x^2 + x^3} = \frac{\alpha + \zeta p + \gamma p^2}{(x - p)^2} + \frac{\zeta + 2\gamma p}{(x - p)} + \frac{\gamma}{x - p},$$

résultat dont il est aisé de constater l'exactitude, en réduisant en une seule les fractions du second membre.

2°. Soit  $p = r$ , ou  $\alpha' + \zeta'x + \gamma'x^2 + x^3$  de la forme  $(x - p)^2(x - q)$ ; et essayons, dans ce cas, la décomposition suivante;

$$\frac{\alpha + \zeta x + \gamma x^2}{(x - p)^2(x - q)} = \frac{A}{(x - p)^2} + \frac{B}{x - p} + \frac{C}{x - q};$$

si l'on chasse les dénominateurs, on obtient

$$\alpha + \zeta x + \gamma x^2 = A(x - q) + B(x - p)(x - q) + C(x - p)^2.$$

Cela posé, soit  $x = p$ ; il vient  $\alpha + \zeta p + \gamma p^2 = A(p - q)$ ,

relation d'où l'on tire  $A = \frac{\alpha + \zeta p + \gamma p^2}{p - q}$ .

Mettant à la place de A, sa valeur dans la dernière équation identique, et transposant, on trouve

$$\begin{aligned} & -\alpha(x - p) - \zeta q(x - p) + \gamma p x(x - p) - \gamma q(x^2 - p^2) \\ & = (p - q)[B(x - p)(x - q) + C(x - p)^2]; \end{aligned}$$

si l'on divise par  $x - p$ , et que l'on fasse ensuite  $x = p$ , cette dernière équation donne

$$B = -\frac{(a + cq - \gamma p^2 + 2\gamma pq)}{(p - q)^2}.$$

Enfin, si l'on fait  $x = q$  dans la première des deux identités,

$$\text{on en déduit} \quad C = \frac{a + cq + \gamma q^2}{(p - q)^2}.$$

Nous ne considérons point le cas où deux des racines du polynôme  $a' + cx + \gamma x^2$  sont imaginaires, puisque nous avons déjà vu que l'expression du terme général peut être, dans ce cas, débarrassée d'imaginaires.

424. Il est facile d'étendre la marche précédente à une fraction rationnelle d'un ordre quelconque; mais, pour compléter ce qui a rapport à la détermination du terme général d'une série récurrente, il nous reste à indiquer comment on peut obtenir le *terme général* relatif à chacune des fractions, telles que  $\frac{A}{(x-p)^1}$ ,  $\frac{A}{(x-p)^2}$ ,  $\frac{A}{(x-p)^3}$ , ... , auxquelles on est conduit par cette méthode.

Soit d'abord l'expression  $\frac{A}{(x-p)^3}$ ; elle peut se mettre sous la forme  $A(x-p)^{-3}$ , ou  $-\frac{A}{p^3}\left(1 - \frac{x}{p}\right)^{-3}$ .

Or, on a

$$\left(1 - \frac{x}{p}\right)^{-3} = 1 + 3 \cdot \frac{x}{p} + \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \frac{x^2}{p^2} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{p^3} + \dots,$$

et le terme général de cette série est évidemment

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)} \cdot \frac{x^{n-1}}{p^{n-1}} \text{ ou } \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{x^{n-1}}{p^{n-1}};$$

donc le terme général de  $\frac{A}{(x-p)^3}$  est

$$-\frac{A}{p^3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{x^{n-1}}{p^{n-1}}, \text{ ou bien, } -\frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{A}{p^{n+2}} \cdot x^{n-1}.$$

De même,  $\frac{A}{(1-p)^i}$  revient à  $\frac{A}{p^i} \left(1 - \frac{x}{p}\right)^{-i}$ ; mais

$$\left(1 - \frac{x}{p}\right)^{-i} = 1 + 4 \frac{x}{p} + \frac{4.5}{2} \frac{x^2}{p^2} + \frac{4.5.6}{2.3} \frac{x^3}{p^3} + \dots,$$

si le terme général est

$$\frac{4.5.6.7 \dots (n-1).n.(n+1)(n+2)}{2.3.4.5.6.7 \dots n-1} \cdot \frac{x^{n-1}}{p^{n-1}},$$

ou réduisant,

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} \cdot \frac{x^{n-1}}{p^{n-1}};$$

on a donc, pour le terme général de  $\frac{A}{(x-p)^i}$ ,

$$\frac{A}{p^i} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3} \cdot \frac{x^{n-1}}{p^{n-1}}, \text{ ou bien, } \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3} \cdot \frac{A}{p^{i+3}} \cdot x^{n-1};$$

et ainsi de suite.

425. Passons à la seconde question, qui a pour objet la *sommation des séries récurrentes*.

Cette question se divise en deux parties:

Où l'on demande la *somme des termes de la série tout entière*, c'est-à-dire la fraction génératrice qui a donné lieu à cette série;

Où l'on demande la *somme d'un nombre limité de termes*.

La première partie est la plus facile à traiter.

Soient A, B, C, D, E, F, . . . les termes d'une série récurrente; et pour fixer les idées, supposons que la série soit du troisième ordre. Mais ce que nous allons dire s'appliquera aisément à une série d'un ordre quelconque.

La méthode est analogue à l'une de celles qui ont été suivies (n° 203) pour les progressions par quotient.

Désignons par p, q, r les quantités qui forment l'échelle de relation, c'est-à-dire les quantités constantes par lesquelles il faut multiplier C, B, A, pour former D, puis D, B, C, pour former E, et ainsi de suite; on aura les relations

$$D = Cp + Bq + Ar,$$

$$E = Dp + Cq + Br,$$

$$F = Ep + Dq + Cr,$$

$$G = Fp + Eq + Dr,$$

$$\dots\dots\dots$$

Ces relations sont en nombre indéfini; donc, si on les ajoute terme à terme, et que l'on appelle  $S$  la somme ou la fraction génératrice cherchée, on obtiendra

$$S - A - B - C = p(S - A - B) + q(S - A) + rS,$$

$$\text{d'où l'on déduit } S = \frac{p(A + B) + qA - (A + B + C)}{p + q + r - 1}.$$

En suivant la même marche pour les séries du 1<sup>er</sup>, 2<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup> .. ordre, on peut former le tableau suivant :

$$1^{\text{er}} \text{ ordre } S = \frac{-A}{p-1} \dots\dots\dots (1),$$

$$2^{\text{e}} \dots\dots S = \frac{pA - (A + B)}{p + q - 1} \dots\dots\dots (2),$$

$$3^{\text{e}} \dots\dots S = \frac{p(A + B) + qA - (A + B + C)}{p + q + r - 1} \dots\dots\dots (3),$$

$$4^{\text{e}} \dots\dots S = \frac{p(A + B + C) + q(A + B) + rA - (A + B + C + D)}{p + q + r + s - 1} \dots\dots\dots (4);$$

et ainsi de suite.

Soit pour exemple, la série du troisième ordre,

$$1 - 2x + 3x^2 - 10x^3 + 22x^4 - 51x^5 + 125x^6 \dots,$$

dont l'échelle de relation se compose de l'ensemble des quantités

$$(-x, +2x^2, -3x^3);$$

on trouve, en appliquant la formule (3), et observant que l'on a



$$A=1, B=-2x, C=3x^2, p=-x, q=2x^2, r=-3x^3, \\ S = \frac{-x(1-2x)+2x^2-1+2x-3x^3}{-x+2x^2-3x^3-1} = \frac{1-x-x^3}{1+x-2x^2+3x^3}.$$

Il arrive quelquefois que, dans la série proposée, les deux ou trois premiers termes ne sont pas compris dans la loi de récurrence. Cela provient (n° 192) de ce que, dans la fraction qui lui a donné naissance, le degré du numérateur est plus élevé que celui du dénominateur; dans ce cas, pour obtenir la *fraction génératrice*, on commence par faire abstraction des termes dont on vient de parler; puis, après avoir obtenu, d'après les formules précédentes, la somme des autres termes, on lui ajoute les termes dont on avait d'abord fait abstraction, en ayant soin de réduire le tout en une seule expression fractionnaire.

426. *Seconde partie.* Dans les formules précédentes, il n'entre que les premiers termes de la série et les quantités qui forment l'échelle de relation. Mais, si l'on demande l'expression de la somme d'un nombre déterminé de termes, il faut en outre connaître les derniers termes de la série.

Soit encore une série récurrente du troisième ordre, dont les premiers termes sont A, B, C, D, E...., l'échelle de relation (p, q, r), et les derniers termes K, L, M, N.

Puisque la série est du troisième ordre, on a les relations

$$D = Cp + Eq + Ar,$$

$$E = Dp + Cq + Br,$$

$$F = Ep + Dq + Cr,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$N = Mp + Lq + Kr.$$

[Le nombre de ces relations est limité et égal au nombre des termes dont on cherche la somme, diminué de trois.]

Cela posé, en les ajoutant terme à terme, et désignant par S la somme cherchée, on a évidemment

$$S-A-B-C=p(S-A-B-N)+q(S-A-N-M)+r(S-N-M-L);$$

d'où l'on tire

$$S = \frac{p(A+B+N) + q(A+N+M) + r(N+M+L) - (A+B+C)}{p+q+r-1},$$

On pourrait également obtenir les sommes relatives à une série récurrente d'un ordre quelconque.

En comparant cette formule avec la formule (3), on voit, 1°. que celle-ci se déduit de celle qu'on vient d'obtenir, en négligeant tous les termes affectés de  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , ...

2°. Que, pour appliquer la formule (3), il suffit, comme nous l'avons déjà dit, de connaître les trois premiers termes et l'échelle de relation; tandis que, pour faire usage de la formule précédente, il faut absolument avoir les expressions des trois termes qui précèdent celui auquel on a arrêté la série; ce qui exige que l'on connaisse l'expression d'un terme de rang quelconque dans la série, c'est-à-dire le *terme général*, question qui devient très compliquée, lorsque la série est d'un ordre un peu élevé.

427. Au reste, les formules relatives au cas de la somme d'un nombre déterminé de termes, s'appliquent principalement aux *séries récurrentes numériques*.

Soit, par exemple, une série récurrente du troisième ordre, dont les trois premiers termes étant 1, 2, 3, le suivant est égal au double du troisième, augmenté de la somme des deux premiers, le cinquième est égal au double du quatrième, augmenté de la somme du troisième et du deuxième; et ainsi de suite. Le développement de cette série sera

$$1, 2, 3, 9, 23, 58, 148, 377, 960, 2445, 6227, \dots$$

Cela posé, pour obtenir la somme des onze premiers termes, on fera dans la formule ci-dessus,

$$A=1, B=2, C=3, p=2, q=1, r=1, N=6227, M=2445, L=960;$$

ce qui donnera

$$S = \frac{2 \times 6230 + 8673 + 9632 - 6}{3} = 10253.$$

Si l'on demandait la somme d'un plus grand nombre de termes, par exemple, la somme des 50 premiers termes, il faudrait pousser la série jusqu'au 50<sup>e</sup> terme inclusivement, ce qui ne laisserait pas d'être fort long.

*Ou bien*, il faudrait former directement les 48<sup>e</sup>, 49<sup>e</sup>, 50<sup>e</sup> termes, d'après l'expression du terme général. Or, pour obtenir ce terme par la méthode exposée (n<sup>o</sup> 410), on commencerait par mettre la série proposée sous la forme

$$1 + 2x + 3x^2 + 9x^3 + 23x^4 + 58x^5 + \dots;$$

on rechercherait la fraction génératrice qui a donné lieu à cette série, et on la décomposerait en trois fractions simples pour chacune desquelles on obtiendrait un terme général. Faisant ensuite la somme de ces trois termes généraux, on aurait celui de la série  $1 + 2x + 3x^2 + \dots$ ; enfin, on supposerait  $x=1$ , ce qui donnerait le terme général de la série  $1 + 2 + 3 + 9 + 23 + \dots$ ; mais il est facile de s'assurer que tous ces calculs sont souvent impraticables.

En effet, si l'on applique la formule (3) à la détermination de la fraction correspondante à  $1 + 2x + 3x^2 + 9x^3 + \dots$ , on aura, en observant que  $A=1$ ,  $B=2x$ ,  $C=3x^2$ ,  $p=2x$ ,  $q=x^2$ ,  $r=x^3$ ,

$$S = \frac{1 - 2x^2}{1 - 2x - x^2 - x^3};$$

or, l'expression  $x^3 + x^2 + 2x - 1$ , égale à zéro, ne peut évidemment avoir que des racines incommensurables; ainsi la décomposition de la fraction  $\frac{1 - 2x^2}{1 - 2x - x^2 - x^3}$  en fractions simples ne peut se faire d'une manière exacte.

Ces réflexions prouvent que les résultats analytiques, simples en théorie, sont souvent peu susceptibles d'application.

428. Nous terminerons la théorie des séries récurrentes par l'exposition d'un moyen dû à Lagrange, de reconnaître si une série proposée est de la nature des séries récurrentes.

Ce moyen est fondé sur les observations suivantes :

1°. Si la série proposée, que nous désignerons par  $S$ , est une série récurrente du premier ordre, elle provient d'une fraction de la forme  $\frac{a}{a' + b'x}$ .

Or, on a 
$$\frac{a' + b'x}{a} = \frac{a'}{a} + \frac{b'}{a}x;$$

ce qui prouve que la *fraction renversée*, ou, ce qui revient au même, l'*unité divisée par la série proposée*  $S$ , doit donner pour quotient une *fonction entière de  $x$*  (n° 240) et égale à  $p + qx$ ; si cette division ne se fait pas exactement, c'est que la série, en supposant qu'elle soit récurrente, est du second ordre ou d'un ordre supérieur.

2°. Si  $S$  est une série récurrente du second ordre, elle provient d'une fraction de la forme  $\frac{a + bx}{a' + b'x + c'x^2}$ ; or, on a

$$\frac{a' + b'x + c'x^2}{a + bx} = \frac{a'}{a} + \frac{ab' - ba'}{a^2} \cdot x + \frac{a^2c' - b(ab' - ba')}{a^2(a + bx)} \cdot x^2,$$

ou 
$$p + qx + \frac{K}{a + bx} \cdot x^2,$$

ce qui prouve que l'*unité divisée par  $S$*  doit donner lieu à un quotient entier de la forme  $p + qx$ , plus un produit de  $x^2$  par une série récurrente du premier ordre; c'est-à-dire qu'en désignant par  $S'x^2$  le reste auquel on parvient, après avoir divisé 1 par  $S$  et avoir obtenu le quotient  $p + qx$ , on doit trouver  $\frac{S}{S'}$  égal à un quotient exact de la forme  $p' + q'x$ ; et ainsi de suite.

Guidé par ces considérations, Lagrange a donné la règle suivante pour reconnaître si une série donnée est récurrente :

Soit  $S = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$ , la série proposée.

1°. *Divisez l'unité par  $S$  et poussez l'opération jusqu'à ce que vous ayez un quotient de la forme  $p + qx$  et un reste de la forme  $S'x^2$ , ( $S'$  désignant une série indéfinie de la forme  $A' + B'x + C'x^2 + \dots$ ).*

2°. Divisez  $S$  par  $S'$  et poussez l'opération jusqu'à ce que vous ayez un quotient de la forme  $p' + q'x$ , et un reste tel que  $S''x^2$ , ( $S''$  étant égal à  $A'' + B''x + C''x^2 + \dots$ ).

3°. Divisez  $S'$  par  $S''$  et poussez l'opération jusqu'à ce que vous ayez un quotient de la forme  $p'' + q''x$  et un reste tel que  $S'''x^3 \dots$

4°. Divisez  $S''$  par  $S'''$  et poussez l'opération jusqu'à ce que vous ayez un quotient de la forme  $p''' + q'''x$  et un reste  $S^{IV}x^4 \dots$ . Et ainsi de suite.

Dès que l'une de ces divisions se fait exactement, la série proposée est récurrente, et l'ordre de la série est marqué par le rang de la division qui s'est faite exactement.

Quant à l'échelle de relation de la série, on l'obtiendrait aisément (n° 192), si l'on pouvait obtenir la fraction génératrice.

Or supposons, pour fixer les idées, que la troisième division se fasse exactement.

On aura donc la série d'équations

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S'}{S} x^2,$$

$$\frac{S'}{S} = p' + q'x + \frac{S''}{S} x^2,$$

$$\frac{S''}{S} = p'' + q''x.$$

La dernière donne  $\frac{S''}{S} = \frac{1}{p'' + q''x}$ ;

d'où en substituant dans la seconde,

$$\frac{S'}{S} = p' + q'x + \frac{x^2}{p'' + q''x} = \frac{(p' + q'x)(p'' + q''x) + x^2}{p'' + q''x};$$

donc  $\frac{S'}{S} = \frac{p'' + q''x}{(p' + q'x)(p'' + q''x) + x^2}.$

Substituant cette valeur dans la première équation, il vient

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{p'' + q''x}{(p' + q'x)(p'' + q''x) + x^2}, \text{ ou bien,}$$

$$\frac{1}{S} = \frac{(p+qx)(p'+q'x)(p''+q''x) + (p+qx)x^2 + p'' + q''x}{(p' + q'x)(p'' + q''x) + x^2},$$

donc enfin,

$$S = \frac{(p' + q'x)(p'' + q''x) + x^2}{(p+qx)(p' + q'x)(p'' + q''x) + (p+qx)x^2 + p'' + q''x},$$

expression qui, simplifiée, est de la forme

$$S = \frac{a + bx + cx^2}{a' + b'x + c'x^2 + d'x^3},$$

et l'échelle de relation est alors (n° 192),

$$\left(-\frac{b'}{a'}x, -\frac{c'}{a'}x^2, -\frac{d'}{a'}x^3\right).$$

429. Prenons pour exemple la série

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, \dots,$$

dont chaque terme s'obtient d'après l'expression générale. ....

$\frac{n(n+1)}{2}$ ,  $n$  désignant le rang du terme que l'on veut former.

Pour reconnaître si cette série est récurrente, on la mettra d'abord sous la forme

$$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + 28x^6 + 36x^7 + 45x^8 + \dots$$

Cela posé, en appliquant la règle ci-dessus, on trouve

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{1 + 3x + 6x^2 + \dots} = 1 - 3x + x^2 \frac{S'}{S}.$$

(S' ayant pour développement,

$$3 + 8x + 15x^2 + 24x^3 + 35x^4 + 48x^5 + 63x^6 + 80x^7 + 99x^8 + \dots);$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{1 + 3x + 6x^2 + \dots}{3 + 8x + 15x^2 + \dots} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}x + \frac{x^2}{9} \frac{S''}{S'},$$

$$(S'' = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots);$$

$$\frac{S'}{S''} = \frac{3 + 8x + 15x^2 + \dots}{1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots} = 3 - x,$$

quotient exact ; ainsi la série est récurrente , et du troisième ordre.

Pour obtenir l'échelle de relation , rapprochons les équations

$$\frac{1}{S} = 1 - 3x + x^2 \cdot \frac{S'}{S};$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}x + \frac{x^2}{9} \cdot \frac{S''}{S};$$

$$\frac{S'}{S''} = 3 - x;$$

la dernière donne  $\frac{S''}{S'} = \frac{1}{3-x}$ , d'où

$$\frac{S}{S'} = \frac{3+x}{9} + \frac{x^2}{9} \cdot \frac{1}{3-x} = \frac{1}{3-x}, \text{ et par conséquent,}$$

$$\frac{1}{S} = 1 - 3x + x^2(3-x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3;$$

$$\text{donc enfin, } S = \frac{1}{1-3x+3x^2-x^3} = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

Ainsi l'échelle de relation de la série  $1 + 3x + 6x^2 + \dots$ , se compose des quantités  $(3x, -3x^2, +x^3)$ , et l'échelle de relation de la série proposée  $1 + 3 + 6 + 10 + \dots$ , est l'ensemble des nombres  $(3, -3, +1)$ , ce qu'il est facile de vérifier.

Par exemple, le terme 28 se compose de la somme des produits des trois termes..... 21, 15, 10, multipliés respectivement par..... 3, - 3, + 1.

N. B. On voit encore que la règle précédente donne le moyen de retrouver l'échelle de relation d'une série récurrente, lorsque la trace en a été perdue.

## § II. Des Séries de nombres figurés et de celles qui en dépendent.

Il existe encore une certaine classe de séries pour lesquelles on peut obtenir facilement le terme général et l'expression de

la somme d'un nombre limité de termes; ce sont les séries numériques qui tirent leur origine d'une progression par différence.

430. *Détermination du terme général de la série.....*  
 $a^m + b^m + c^m + d^m + \dots$ ;  $a, b, c, d, \dots$  étant les différens termes d'une progression par différence.

On a vu (n° 194) que, dans toute progression par différence,

$$\vdots a.b.c.d.e.f.g.h.\dots,$$

le terme général,  $l$ , a pour expression,  $l = a + (n-1)r$ ,  $r$  désignant la raison et  $n$  le nombre des termes; donc le terme général de la série des  $m^{\text{èmes}}$  puissances des différens termes de cette progression, a pour valeur,

$$l^m = [a + (n-1)r]^m.$$

Soit proposé, pour exemple, de trouver le quinzième terme de la série des cinquièmes puissances des termes de la progression  $\vdots 1.3.5.7.9.11.13.\dots$ ; on aura, en faisant dans la formule,  $n=15$ ,  $m=5$ ,  $a=1$ ,  $r=2$ ,

$$l^5 = (1 + 14 \times 2)^5 = 29^5 = 20511149.$$

431. *Sommation des termes de la série*

$$a^m + b^m + c^m + d^m + \dots + k^m + l^m,$$

$a, b, c, d, \dots, k, l$ , étant les différens termes d'une progression par différence.

On a, d'après la formule du binôme,

$$b^m = (a+r)^m = a^m + mra^{m-1} + m \frac{m-1}{2} r^2 a^{m-2} + \dots,$$

$$c^m = (b+r)^m = b^m + mrb^{m-1} + m \frac{m-1}{2} r^2 b^{m-2} + \dots,$$

$$\dots$$

$$l^m = (k+r)^m = k^m + m rk^{m-1} + m \frac{m-1}{2} r^2 k^{m-2} + \dots$$



Ajoutant toutes ces équations membre à membre, et désignant par  $S_m, S_{m-1}, S_{m-2}, \dots, S_2, S_1$ , les sommes des  $m^{\text{ième}}, m-1^{\text{ième}}, \dots$ , puissances, on obtient

$$S_m - a^m = S_m - l^m + mr(S_{m-1} - l^{m-1}) + m \frac{m-1}{2} r^2 (S_{m-2} - l^{m-2}) + \dots,$$

ou réduisant,

$$l^m - a^m = mr(S_{m-1} - l^{m-1}) + m \frac{m-1}{2} r^2 (S_{m-2} - l^{m-2}) + \dots \quad (A),$$

formule qui renferme les sommes des puissances, depuis  $S_{m-1}$  jusqu'à  $S_0$  inclusivement ( $S_0$  étant égal  $a^0 + b^0 + c^0 + \dots + k^0 + l^0$ , équivalent à  $n$ ).

Pour faire connaître l'usage de la formule (A), faisons successivement  $m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Soit, 1°.  $m = 1$ ; on trouve

$$l - a = r(S_0 - l^0); \text{ d'où } S_0 = \frac{l-a}{r} + 1 = \frac{(n-1)r + r}{r} = n,$$

résultat que l'on connaît déjà.

2°.  $m = 2$ ; il vient  $l^2 - a^2 = 2r(S_1 - l) + r^2(S_0 - l^0)$ ,

$$\text{d'où } S_1 - l = \frac{l^2 - a^2}{2r} - \frac{r(l-a)}{2r};$$

$$\text{donc } S_1 = \frac{l^2 - a^2}{2r} + \frac{r(l+a)}{2r} = \frac{(l+a)(l-a+r)}{2r},$$

ou bien, à cause de  $l = a + (n-1)r$ , d'où  $l - a + r = nr$ ,

$$S_1 = \frac{(l+a) \cdot nr}{2r} = \frac{(l+a)n}{2},$$

résultat qui est encore connu (n° 195).

3°.  $m = 3$ ; la formule (A) devient

$$l^3 - a^3 = 3r(S_2 - l^2) + 3r^2(S_1 - l) + r^3(S_0 - l^0),$$

résultat qui fera connaître  $S_2$  en fonction de  $S_1$  et de  $S_0$ .

$$4^{\circ}. m = 4;$$

$$l - a^4 = 4r(S_3 - l^3) + 6r^2(S_2 - l^2) + 4r^3(S_1 - l) + r^4(S_0 - l^0);$$

et cette formule donnera  $S_3$  en fonction de  $S_2$ ,  $S_1$  et  $S_0$ ; et ainsi de suite.

D'où l'on voit que, quel que soit le degré de la puissance, on pourra toujours obtenir la somme des puissances semblables d'un nombre déterminé de termes, en fonction des sommes des puissances inférieures.

432. Prenons, pour exemple, la suite naturelle des nombres

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots;$$

et recherchons la somme des carrés, des cubes, etc., des  $n$  premiers termes.

On a, d'après les formules précédentes, et en observant que

$$a = 1, \quad r = 1, \quad l = n, \quad S_0 = n,$$

$$1^{\circ}. \quad S_1 = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{n^2+n}{2};$$

$$2^{\circ}. \quad n^3 - 1 = 3(S_2 - n^2) + 3(S_1 - n) + n - 1; \quad \text{donc}$$

$$S_2 = n^2 + \frac{n^3-1}{3} - \frac{n^2-n}{2} - \frac{n-1}{3} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6},$$

$$\text{ou bien encore, } S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3};$$

$$3^{\circ}. \quad n^4 - 1 = 4(S_3 - n^3) + 6(S_2 - n^2) + 4(S_1 - n) + n - 1;$$

$$\text{donc } S_3 = n^3 + \frac{n^4-1}{4} - \frac{2n^3-3n^2+n}{4} - \frac{2n^2-2n}{4} - \frac{n-1}{4},$$

$$\text{ou} \quad S_3 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (S_1)^2.$$

On trouverait pareillement

$$S_4 = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}; \quad \text{et ainsi de suite.}$$

N. B. Afin de distinguer les sommes des puissances semblables des termes de la série naturelle 1, 2, 3... des sommes relatives à une toute autre progression, nous les désignerons dorénavant par  $f_1, f_2, f_3 \dots f_p$ ; en voici l'usage :

433. On peut toujours, à l'aide de ces expressions, obtenir la valeur de la somme d'un nombre quelconque de termes d'une série dont le terme général est une FONCTION RATIONNELLE ET ENTIÈRE du nombre des termes que l'on considère.

Soit, pour fixer les idées, une série dont le terme général est  $an^p$ ,  $a$  étant un nombre connu quelconque,  $p$  un exposant entier et positif,  $n$  le rang du terme que l'on considère.

La série proposée est alors de la forme

$$a \cdot 1^p + a \cdot 2^p + a \cdot 3^p + a \cdot 4^p + \dots + a \cdot n^p,$$

série qui revient évidemment à

$$a(1^p + 2^p + 3^p + 4^p + \dots + n^p) = a \cdot f_p.$$

De même, une série dont le terme général est exprimé par  $a \cdot n^p \pm b \cdot n^q \pm c \cdot n^r$ , revient à

$$\left. \begin{aligned} & a(1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p) \\ & \pm b(1^q + 2^q + 3^q + \dots + n^q) \\ & \pm c(1^r + 2^r + 3^r + \dots + n^r) \end{aligned} \right\} = a \cdot f_p \pm b \cdot f_q \pm c \cdot f_r.$$

Or, les expressions  $f_p, f_q, f_r$  sont connues d'après les formules du n° 432; ainsi la somme des  $n$  premiers termes de la série proposée est également déterminée.

434. *Application aux séries de nombres figurés.* On appelle ainsi, les séries que l'on déduit d'une progression par différence, dont le premier terme est l'unité, et la raison un nombre entier, en faisant successivement la somme des deux premiers, des trois premiers, des quatre premiers... termes de la progression, et opérant ensuite sur la nouvelle série que l'on obtient par ce moyen, comme on a opéré sur la progression; et ainsi de suite.

Soit d'abord la progression naturelle des nombres

|               | $\div$ | 1. | 2. | 3.  | 4.  | 5.  | 6.   | 7.  | ... | n. |
|---------------|--------|----|----|-----|-----|-----|------|-----|-----|----|
| Les séries... |        | 1, | 3, | 6,  | 10, | 15, | 21,  | 28  | ... |    |
|               |        | 1, | 4, | 10, | 20, | 35, | 56,  | 84  | ... |    |
|               |        | 1, | 5, | 15, | 35, | 70, | 126, | 210 | ... |    |
|               |        | .  | .  | .   | .   | .   | .    | .   | .   | .  |
|               |        | .  | .  | .   | .   | .   | .    | .   | .   | .  |

dont la première se forme en ajoutant successivement les deux premiers, les trois premiers.... termes de la progression proposée, dont la seconde se forme à l'aide de la première comme celle-ci s'est formée au moyen de la progression, dont la troisième se déduit de la seconde comme celle-ci l'a été de la première. . . . , ces séries, dis-je, sont celles des nombres figurés de la première classe.

La première est la série des nombres triangulaires.

La seconde, celle des nombres pyramidaux triangulaires.

Les séries suivantes n'ont pas reçu de dénominations particulières.

La progression  $\div 1.3.5.7.9.11. \dots 2n-1$ , donne naissance aux nombres figurés de la seconde classe; et les séries qui en dépendent sont, d'après la loi ci-dessus,

|    |    |     |     |     |     |     |
|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1, | 4, | 9,  | 16, | 25, | 36. | ... |
| 1, | 5, | 14, | 30, | 55, | 91. | ... |
| .  | .  | .   | .   | .   | .   | .   |
| .  | .  | .   | .   | .   | .   | .   |

La première de ces deux séries est la suite des nombres carrés; la seconde, celle des nombres pyramidaux quadrangulaires.

Ces dénominations proviennent de l'analogie que ces nombres ont avec certaines figures géométriques.

435. Les séries qui viennent d'être formées jouissent de plusieurs propriétés curieuses, dont nous ferons connaître la plus importante : c'est que l'on peut toujours former leur terme général, et obtenir l'expression de la somme des  $n$  premiers termes en fonction des quantités  $f_1, f_2, f_3, \dots$

En effet, pour une progression quelconque, la première des séries qui en dérive est telle, que son  $n^{\text{ième}}$  terme est égal à la somme des  $n$  premiers termes de la progression proposée; donc, 1°. ce terme peut toujours être exprimé rationnellement en fonction de  $n$ ; 2°. puisque ce terme général est une fonction rationnelle de  $n$ , la somme des  $n$  premiers termes peut (n° 433) être exprimée au moyen des sommes  $f_1, f_2, f_3, \dots$ , dont les valeurs sont connues.

Ainsi soient la progression  $\div 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ ,  
 et les suites qui en dérivent,  $1, 3, 6, 10, 15, \dots$ ,  
 $1, 4, 10, 20, 35, \dots$ ,  
 $\dots$   
 $\dots$

La somme des termes de la progression étant  $\frac{(n+1)n}{2}$ , le terme général de la première suite est  $\frac{(n+1)n}{2}$ , ou  $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ ; donc (n° 433) la somme des  $n$  premiers termes de cette suite a pour expression,  $\frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_1$ ; ou, remplaçant  $f_2, f_1$  par leurs valeurs (n° 432),

$$\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{12} + \frac{n^2 + n}{4} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6},$$

expression qui peut encore s'écrire ainsi:  $\frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}$ .

De même, le terme général de la seconde suite étant

$$\frac{n^2 + 3n^2 + 2n}{6}, \text{ ou } \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n,$$

on a pour la somme des  $n$  premiers termes de cette suite

$\frac{1}{6}f_3 + \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{3}f_1$ ; ou, substituant pour  $f_1, f_2, f_3$ , leurs valeurs,



vient encore à  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3}$

Le  $n^{\text{ième}}$  terme de la seconde série étant  $\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$ , ou

bien,  $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ ,

on a pour la valeur de la somme des  $n$  premiers termes,

$$\frac{1}{3}f_2 + \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{6}f_1 = \frac{n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n}{42}$$

ou bien encore,  $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{3 \cdot 4}$ .

On trouverait de la même manière les termes généraux et sommatoires des séries qui résultent de toute autre progression.

### § III. Retour des suites, ou méthode inverse des séries.

437. La méthode des coefficients indéterminés donne, en général, le moyen de développer toute fonction de  $x$ , suivant les diverses puissances de cette lettre. Réciproquement, cette fonction, que l'on peut désigner par  $y$ , étant développée suivant les puissances de  $x$ , on peut, par la même méthode, obtenir le développement de la quantité  $x$  suivant les puissances de  $y$ ; et c'est en cela que consiste le retour des suites, ou la méthode inverse des séries.

Soit  $y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots$  (1), la fonction développée suivant les diverses puissances de  $x$  ( $a, b, c, d, \dots$  étant des quantités connues); on demande réciproquement la valeur de  $x$  en  $y$ , c'est-à-dire les coefficients du développement

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \dots$$
 (2).

Pour  $y$  parvenir, élevons successivement au carré, au cube... les deux membres de l'équation (1); il vient

$$y^2 = a^2 \cdot x^2 + 2ab \cdot x^3 + b^2 \cdot x^4 + \dots$$

$$y^3 = a^3 x^3 + 3a^2 b x^4 + 3ab^2 x^5 + b^3 x^6 + \dots$$

$$y^4 = a^4 x^4 + 4a^3 b x^5 + \dots$$

$$y^5 = a^5 x^5 + \dots$$

d'où, substituant dans l'équation (2) et ordonnant,

$$0 = Aa \begin{vmatrix} x + Ab \\ + Ba^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x^2 + Ac \\ + 2Bab \\ + Ca^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x^3 + Ad \\ + Bb^3 \\ + 2Bac \\ + 3Ca^2b \\ + Da^4 \end{vmatrix} x^4 + \dots$$

Egalant à 0 les coefficients de  $x, x^2, x^3, x^4, \dots$ , on obtient les équations

$$Aa - 1 = 0, Ab + Ba^2 = 0, Ac + 2Bab + Ca^3 = 0,$$

$$Ad + Bb^3 + 2Bac + 3Ca^2b + Da^4 = 0, \dots$$

desquelles on déduit successivement,

$$A = \frac{1}{a}, B = -\frac{Ab}{a^2} = -\frac{1}{a^3} \cdot b, C = \frac{-Ac - 2Bab}{a^3} = \frac{2b^2 - ac}{a^5},$$

$$D = \frac{5abc - 5b^3 - a^5d}{a^7}, \dots$$

Ainsi l'on obtient pour le développement demandé,

$$x = \frac{1}{a} \cdot y - \frac{1}{a^3} b \cdot y^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5} \cdot y^3 - \frac{5b^3 - 5abc + a^5d}{a^7} \cdot y^4 + \dots$$

N. B. Si l'on a un développement de la forme

$$y = a + ax + bx^2 + cx^3 + \dots,$$

il est facile de s'assurer, en reprenant la méthode précédente, que l'on ne peut pas développer  $x$  suivant les puissances de la fonction  $y$  elle-même; mais on peut faire  $y - a = z$ , ce qui donne



$$z = ax + bx^2 + cx^3 \dots$$

Posant ensuite  $x = Az + Bz^2 + Cz^3 \dots$ , on déterminera les coefficients  $A, B, C \dots$ ; après quoi l'on remettra pour  $z$  sa valeur  $y - a$ , et alors le développement de  $x$  procédera suivant les puissances, non de la fonction  $y$ , mais de l'expression  $y - a$ .

438. *Applications.* Soit, pour premier exemple, la série

$$y = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots;$$

posons  $x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Cy^5 + \dots$

En formant, comme ci-dessus, les diverses puissances de  $y$  et substituant leurs valeurs dans la seconde identité, on obtient les équations suivantes,

$$A - 1 = 0, A + B = 0, A + 2B + C = 0, A + 3B + 3C + D = 0, \\ A + 4B + 6C + 4D + E = 0 \dots; \text{ d'où l'on déduit successivement}$$

$$A = 1, B = -1, C = +1, D = -1, E = +1 \dots$$

Donc  $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - \dots$

Et en effet,  $x + x^2 + x^3 + \dots$  est une série récurrente dont la fraction génératrice est (n° 426),  $\frac{x}{1-x}$ ; ainsi l'on a  $y = \frac{x}{1-x}$ ,

d'où l'on tire  $x = \frac{y}{1+y}$ ; or si l'on développe cette nouvelle expression en série par la division, on trouvera

$$x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - \dots$$

Soit, pour seconde application, l'équation

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots \quad (1),$$

dont le second membre n'est autre chose que le développement de  $e^x$  (voyez n° 235).

Poisons d'abord  $y-1=z$ ; d'où il résulte

$$z = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots$$

Soit  $x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \dots$  (2).

En formant, à l'aide de l'identité (1), les diverses puissances de  $z$ , puis substituant leurs valeurs dans l'identité (2), on sera conduit aux équations suivantes,

$$A-1=0, \frac{A}{2}+B=0, \frac{A}{6}+B+C=0, \frac{A}{24}+\frac{7B}{12}+\frac{3C}{2}+D=0, \dots;$$

d'où l'on déduit

$$A=1, B=-\frac{1}{2}, C=+\frac{1}{3}, D=-\frac{1}{4}, \dots;$$

donc, le développement de  $x$  en  $z$  est

$$x = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots;$$

ainsi l'on a pour celui de  $x$  en  $y$

$$x = y - 1 - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} + \dots$$

Observons d'ailleurs que l'équation  $y=e^x$  donne (n° 235), dans le système népérien,  $x=\log_e y$ ; donc

$$\log_e y = \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} + \dots$$

Tel est, en effet (n° 235), le développement en série du logarithme naturel d'un nombre.

La méthode inverse des séries est d'un usage peu fréquent, parce qu'il est difficile de reconnaître une loi de formation pour les coefficients, d'après la nature des calculs, et l'on est souvent obligé de déterminer un grand nombre de coefficients, avant de pouvoir saisir cette loi.

Nous terminerons ce que nous avons à dire sur cette méthode, par la remarque suivante :

Si l'on a une équation de la forme

$$ay + by^2 + cy^3 + \dots = a'x + b'x^2 + c'x^3 + \dots,$$

formée par deux séries, et que l'on veuille exprimer  $y$  en  $x$  par une série telle que  $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots$ , il faut, pour obtenir  $A, B, C, \dots$ , former les diverses puissances,  $y^2, y^3, y^4, \dots$ , à l'aide de cette dernière équation, puis les substituer dans la première; ce qui donne alors une équation en  $x$ , dont on égale séparément à 0 les coefficients.

Mais les calculs dans lesquels on est ainsi entraîné, sont souvent impraticables, parce que les coefficients  $A, B, C, \dots$  entrent dans les équations de condition, à des puissances de degré supérieur au second.

#### § IV. Des séries trigonométriques et circulaires.

Nous terminerons la théorie des suites par la recherche du développement des trois lignes trigonométriques principales,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ , suivant les diverses puissances de l'arc  $x$ , séries qui servent à la confection des tables trigonométriques.

439. *Développement de  $\sin x$  et de  $\cos x$ .* Pour y parvenir, nous partirons de la formule

$$(\cos a + \sin a \cdot \sqrt{-1})^m = \cos ma + \sin ma \cdot \sqrt{-1},$$

démontrée (n° 396).

Si l'on développe, d'après la formule du binôme, le premier membre de cette équation, il est aisé de voir que ce développement se composera de deux parties distinctes : une partie réelle et une partie affectée de  $\sqrt{-1}$ . Or, pour que l'équation précédente puisse exister, il faut qu'il y ait séparément égalité entre les parties réelles des deux membres, et entre les deux parties imaginaires.

Supposons donc le développement effectué; on obtiendra

les deux nouvelles équations

$$\begin{aligned}\cos ma &= \cos^m a - m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \cos^{m-2} a \cdot \sin^2 a \\ &+ m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \cos^{m-4} a \cdot \sin^4 a + \dots, \\ \sin ma &= m \cdot \cos^{m-1} a \cdot \sin a - m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \cos^{m-3} a \cdot \sin^3 a + \dots\end{aligned}$$

Ces formules servent, en *Trigonométrie*, à déterminer le sinus et le cosinus des arcs multiples,  $ma$ , en fonction des sinus et cosinus de l'arc simple  $a$ ; mais on peut aussi en déduire les valeurs du sinus et du cosinus d'un arc en fonction de l'arc.

440. Observons d'abord que l'on peut mettre les formules précédentes sous la forme

$$\cos ma =$$

$$\cos^m a \left( 1 - m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \tan^2 a + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \tan^4 a - \text{etc.} \right),$$

$$\sin ma = \cos^m a \left( m \cdot \tan a - m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \tan^3 a + \dots \right),$$

en vertu de la relation  $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$ , si le rayon  $= 1$ .

Cela posé, faisons  $ma = x$ , d'où  $m = \frac{x}{a}$ ; ces formules deviennent

$$\cos x =$$

$$\cos^m a \left( 1 - x \cdot \frac{x-a}{2} \cdot \frac{\tan^2 a}{a^2} + x \cdot \frac{x-a}{2} \cdot \frac{x-2a}{3} \cdot \frac{x-3a}{4} \cdot \frac{\tan^4 a}{a^4} - \text{etc.} \right),$$

$$\sin x = \cos^m a \left( x \cdot \frac{\tan a}{a} - x \cdot \frac{x-a}{2} \cdot \frac{x-2a}{3} \cdot \frac{\tan^3 a}{a^3} + \dots \right).$$

Remarquons actuellement que les trois quantités,  $a$ ,  $x$  et  $m$  étant liées par la relation  $ma = x$ , ou  $m = \frac{x}{a}$ , on peut faire varier  $m$  et  $a$ , de manière que leur produit  $x$  reste constant;

car si l'on prend pour  $a$ , par exemple, une suite de valeurs tout-à-fait arbitraires, les valeurs de  $m$  correspondantes à ces valeurs de  $a$  et à la valeur constante de  $x$ , s'obtiendront au moyen de la relation  $m = \frac{x}{a}$ . D'un autre côté, l'on sait, d'après les principes de *Trigonométrie*, que plus un arc  $a$  diminue, plus il approche de devenir égal à son sinus et à sa tangente; ce qui revient à dire que le rapport  $\frac{\sin a}{a}$ , ou  $\frac{\tan a}{a}$ , tend sans cesse vers l'unité, et que, lorsqu'on suppose l'arc moindre qu'aucun arc donné, ce rapport ne diffère de l'unité que d'une quantité moindre qu'aucune grandeur donnée; en termes algébriques, si l'on suppose  $a = 0$ , il en résulte

$$\frac{\sin a}{a} = \frac{\tan a}{a} = 1 \pm 0 = 1.$$

D'après ces considérations, faisons  $a = 0$ , dans les deux formules ci-dessus; les premiers membres ne changeront pas, puisque l'on suppose  $x$  constant; mais les seconds membres deviendront

$$\cos^m 0 \cdot \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \right),$$

$$\cos^m 0 \cdot \left( x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \right);$$

d'ailleurs on a  $\cos 0 = 1$ , d'où  $\cos^m 0 = 1$ ;

donc enfin, l'on obtient

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \quad (A),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \quad (B).$$

441. Pour appliquer ces formules à la construction des tables trigonométriques, il faut supposer, 1°. que l'on connaisse le rapport  $\pi = 3,1415926 \dots$  de la circonférence au diamètre, ou

de la demi-circonférence au rayon; 2°. que  $x$  représente la longueur d'un arc d'un certain nombre de degrés, *exprimée au moyen du rayon*.

D'après cela, soit proposé de déterminer le sinus et le cosinus de l'arc d'une minute.

Comme la demi-circonférence, dont le rayon est 1, a pour valeur 3,1415926..., il vient, pour le quart de circonférence, 1,5707963..., et pour l'arc de 1', qui est le  $\frac{1}{10000}$ <sup>ème</sup> du quadrans, 0,00015707963. Il suffit donc de substituer à la place de  $x$ , cette valeur dans les deux formules (A) et (B), et de calculer les deux premiers termes seulement; car il est visible que les autres seraient extrêmement petits. On peut même observer que les termes étant alternativement positifs et négatifs, l'erreur commise peut s'estimer (n° 184) par le premier des termes que l'on néglige.

Prenons, par exemple, le premier terme  $x$  de la série relative au sinus, pour exprimer  $\sin 1'$ ; l'erreur commise est moindre que  $\frac{(0,00015707\dots)^3}{2.3}$ .

Or, on a

$$(0,00015707\dots)^3 < (0,00016)^3, \text{ ou } 0,00000000004096;$$

le 6<sup>e</sup> de cette expression est moindre que 0,00000000001; donc la valeur de  $\sin 1'$  ne diffère pas de l'arc lui-même, dans les douze premiers chiffres décimaux.

En général, tant que  $x$  sera une fraction, ce qui aura toujours lieu si l'on considère un arc moindre que le huitième de la circonférence, ou 56°, les deux séries seront très convergentes; et un petit nombre de termes suffira pour donner une valeur très approchée de  $\sin x$  et  $\cos x$ .

442. Les séries (A) et (B) donnent lieu à des conséquences assez importantes, que nous allons déduire successivement.

*Première conséquence.* En comparant ces deux séries

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \quad (A),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \quad (B),$$

à celle qui donne le développement de  $e^x$  (n° 235),

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots,$$

on voit que leur somme produit cette dernière série, aux signes près, de deux en deux rangs; mais si l'on remplace dans celle-ci,  $x$  par  $x\sqrt{-1}$ , et que l'on multiplie les deux membres de (B) par  $\sqrt{-1}$ , on aura, en se rappelant que les diverses puissances de  $\sqrt{-1}$  sont  $+\sqrt{-1}$ ,  $-1$ ,  $-\sqrt{-1}$ ,  $+1$ ,

$$\cos x + \sqrt{-1} \sin x = 1 + x \sqrt{-1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} \sqrt{-1} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$\text{et } e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} \sqrt{-1} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots;$$

$$\text{donc, } e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x.$$

En changeant  $x$  en  $-x$ , et observant que  $\cos -x = \cos x$ , et que  $\sin -x = -\sin x$ , on trouverait

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \sin x;$$

ce qui donne enfin la nouvelle formule

$$e^{\pm x\sqrt{-1}} = \cos x \pm \sqrt{-1} \sin x \dots \quad (C).$$

443. *Seconde conséquence.* Si, dans la formule (C), on met  $nx$  à la place de  $x$ ,  $n$  étant un nombre réel quelconque, il vient

$$e^{\pm nx\sqrt{-1}} = \cos nx \pm \sqrt{-1} \sin nx;$$

d'un autre côté,

$$e^{\pm nx\sqrt{-1}} = (e^{\pm x\sqrt{-1}})^n = (\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)^n;$$

$$\text{donc } (\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)^n = \cos nx \pm \sqrt{-1} \sin nx.$$

Ainsi la formule

$$(\cos a \pm \sin a \cdot \sqrt{-1})^m = \cos ma + \sin ma \sqrt{-1},$$

qui n'avait été démontrée (n° 396) que dans le cas où  $m$  était un nombre entier et positif, est maintenant vérifiée pour un exposant quelconque.

444. *Troisième conséquence.* La formule (C) donne encore en prenant les logarithmes des deux membres dans le système népérien,

$$\pm x \sqrt{-1} = \log(\cos x \pm \sqrt{-1} \cdot \sin x);$$

d'où séparant les deux formules contenues dans celle-ci, et retranchant la seconde de la première,

$$2x \sqrt{-1} = \log \frac{\cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x}{\cos x - \sqrt{-1} \cdot \sin x},$$

$$\text{ou bien, } 2x \sqrt{-1} = \log \frac{1 + \sqrt{-1} \cdot \tan x}{1 - \sqrt{-1} \cdot \tan x}.$$

$$\text{Or, on a trouvé (n° 232) } \log \frac{1+y}{1-y} = 2 \left( y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \dots \right);$$

faisant dans cette formule,  $y = \sqrt{-1} \cdot \tan x$ , on obtient

$$\log \frac{1 + \sqrt{-1} \cdot \tan x}{1 - \sqrt{-1} \cdot \tan x} = 2 \left( \tan x - \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} - \dots \right) \sqrt{-1};$$

$$\text{donc } 2x \sqrt{-1} = 2 \left( \tan x - \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} - \dots \right) \sqrt{-1};$$

$$\text{et par conséquent, } x = \tan x - \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} - \dots (D).$$

Cette formule donne la valeur d'un arc en fonction de la tangente de cet arc. Donc, par la méthode inverse des séries (n° 437), on pourrait développer réciproquement  $\tan x$  en fonction de  $x$ . Mais on parvient à ce même développement par le moyen qui suit: on a



$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x (1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}},$$

ou bien, 
$$\operatorname{tang} x = \sin x + \frac{1}{2} \sin^3 x + \frac{3}{8} \sin^5 x + \dots;$$

et alors tout se réduit à remplacer  $\sin x$  par sa valeur

$$x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

Nous n'insisterons pas davantage sur la formation de cette nouvelle série, qui n'offre aucun intérêt, et dont les coefficients ne sont assujettis à aucune loi fixe.

445. Les analystes ont fait servir la formule (D) du n° précédent à la *détermination du rapport approché de la circonférence au diamètre*. Pour que cette formule puisse être utile, il faut que l'arc dont on cherche la valeur soit tout au plus égal à  $50^\circ$ , puisque l'on a  $\operatorname{tang} 50^\circ = 1$ .

Cela posé, soit  $50^\circ = m + n$ , et prenons pour  $m$  l'arc dont la tangente est égale à  $\frac{1}{4}$ , auquel cas on a, d'après la formule (D),

$$m = \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{5 \cdot 4^5} - \frac{1}{7 \cdot 4^7} + \dots,$$

série très convergente dont la loi est manifeste.

D'ailleurs, l'équation  $50^\circ = m + n$ , donne  $n = 50^\circ - m$ ; d'où

$$\operatorname{tang} n = \frac{\operatorname{tang} 50^\circ - \operatorname{tang} m}{1 + \operatorname{tang} m \operatorname{tang} 50^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5};$$

donc en appliquant encore la formule (D),

$$n = \frac{3}{5} - \frac{3^3}{3 \cdot 5^3} + \frac{3^5}{5 \cdot 5^5} - \frac{3^7}{7 \cdot 5^7} + \dots$$

ainsi  $m + n$  ou l'arc de  $50^\circ$ , est représenté par la somme des deux séries

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{5 \cdot 4^5} - \frac{1}{7 \cdot 4^7} + \dots + \frac{3}{5} - \frac{3^3}{3 \cdot 5^3} + \frac{3^5}{5 \cdot 5^5} - \frac{3^7}{7 \cdot 5^7} + \dots$$

La seconde de ces deux séries n'est pas très convergente, et il faudrait un assez grand nombre de termes pour obtenir un degré d'approximation suffisant.

446. Mais on peut parvenir à deux autres séries beaucoup plus convergentes.

Soit  $\nu$  l'arc dont la tangente est égale à  $\frac{1}{5}$ ; il en résulte

$$\nu = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots$$

Or, on a, d'après les formules trigonométriques,

$$\tan 2\nu = \frac{2 \tan \nu}{1 - \tan^2 \nu} = \frac{5}{12}, \quad \tan 4\nu = \frac{2 \tan 2\nu}{1 - \tan^2 2\nu} = 1 + \frac{1}{119}.$$

Comme cette dernière tangente diffère très peu de l'unité, on peut déjà conclure que l'arc  $4\nu$  diffère peu de  $50^\circ$ , et qu'ainsi la tangente de  $4\nu - 50^\circ$  doit être une fraction très petite.

Cela posé, soit  $z = 4\nu - 50^\circ$ , d'où  $\tan z = \tan(4\nu - 50^\circ)$ ;

$$\text{il vient} \quad \tan z = \frac{\tan 4\nu - 1}{1 + \tan 4\nu} = \frac{1}{239};$$

$$\text{donc} \quad z = \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \dots;$$

d'ailleurs, l'équation  $z = 4\nu - 50^\circ$  donne  $50^\circ = 4\nu - z$ .  
Mettant dans cette expression, à la place de  $\nu$  et de  $z$ , leurs valeurs, on obtient

$$50^\circ = \left\{ 4 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \right) \right\} - \left\{ \left( \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \dots \right) \right\},$$

d'où l'on conclut enfin, pour le rapport de la circonférence au diamètre, ou pour le rapport de la demi-circonférence au rayon,

$$200^\circ, \text{ ou } \pi = \left\{ \begin{array}{l} 16 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \right) \\ - 4 \left( \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \dots \right) \end{array} \right\}$$

Il est facile de s'assurer que les quatre premiers termes de la première série, et les deux premiers termes de la seconde, donnent la valeur de  $\pi$  à 0,00001 près.

447. CONCLUSION GÉNÉRALE. En réfléchissant sur tout ce qui vient d'être dit sur les séries circulaires ou trigonométriques, on voit le parti que l'on peut tirer de l'emploi des symboles imaginaires, pour résoudre des questions d'une très grande utilité. Comme, pour parvenir à ce but, on étend à des expressions imaginaires, des formules qui d'abord n'avaient été reconnues vraies que pour des quantités réelles, on pourrait être tenté de révoquer en doute l'exactitude des résultats auxquels on est conduit; cependant si, après certaines transformations, on parvient à des expressions débarrassées d'imaginaires, qui s'accordent avec celles que fournirait un raisonnement strict et rigoureux, on est forcé d'admettre la légitimité des moyens employés.

C'est ainsi que les analystes ont fait les découvertes les plus importantes, auxquelles on ne parviendrait que très difficilement par des moyens en apparence plus satisfaisans.

La méthode suivie pour obtenir les expressions de  $\sin x$  et  $\cos x$ , offre encore l'exemple d'un raisonnement qui conduit promptement au but, quoique laissant d'abord un peu de vague dans l'esprit.

Pour parvenir à ces expressions, on suppose que, l'arc  $a$  devenant nul, le rapport  $\frac{\tan a}{a}$  se réduit à 1. Au premier abord, on a de la peine à concevoir que, l'arc étant nul, il puisse exister un rapport entre l'arc et sa tangente, et que ce rapport soit égal à 1; mais si, au lieu de supposer l'arc tout-à-fait nul, on suppose qu'il ne diffère de 0 que d'une quantité

extrêmement petite, le rapport entre la tangente et l'arc existe et diffère très peu de l'unité; et plus l'arc est petit, moins le rapport diffère de l'unité. D'où l'on peut conclure, qu'à la limite de décroissement de l'arc, c'est-à-dire lorsqu'on a  $a=0$ ,

il en résulte  $\frac{\text{tang } a}{a} = 1$ . L'exactitude des formules auxquelles

on parvient ainsi, exactitude qui se trouve vérifiée par les applications que l'on en fait à la détermination des sinus et cosinus de certains arcs, confirme aussi l'exactitude des principes qui y ont conduit.

*La considération des rapports des grandeurs variables, dans les limites de leurs accroissemens ou de leurs décroissemens, est l'objet de l'Analyse infinitésimale, nouvelle branche des Mathématiques à laquelle la théorie des séries peut être regardée comme une espèce d'introduction.*

---

---

## NOTE

### *Sur les Polynomes rationnels et entiers.*

---

#### PREMIÈRE PARTIE.

#### *Démonstration du théorème énoncé n° 265 (\*).*

*Tout polynome premier P (rationnel et entier) qui divise exactement le produit  $A \times B$  de deux autres polynomes rationnels et entiers, doit nécessairement diviser l'un de ces polynomes.*

Ce théorème général repose sur plusieurs autres propositions qui n'en sont que des cas particuliers, et que nous allons démontrer successivement.

1. PREMIER CAS. Soit P un nombre premier, A un nombre entier quelconque, B un polynome rationnel et entier, mais dépendant d'une seule lettre  $x$ , c'est-à-dire tel que l'on ait

$$B = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + sx + t;$$

( $a, b, c, \dots, s, t$  étant des nombres entiers quelconques positifs ou négatifs).

Comme le produit  $A \times B$  revient à

$$Aa.x^n + Ab.x^{n-1} + Ac.x^{n-2} + \dots + As.x + At,$$

et que P divise par hypothèse ce produit, il s'ensuit nécessairement (n° 30) que P doit diviser chacun des coefficients....

---

(\*) Cette démonstration m'a été communiquée par un ancien élève de M. Lefebvre de Fourcy.

$Aa, Ab, Ac, \dots As, At$ ; donc il faut (*Arith.*, 5<sup>e</sup> édit., n° 133) que  $P$  divise  $A$ , ou bien, chacun des nombres  $a, b, c, \dots s, t$ , et par conséquent  $P$ .

D'où l'on peut conclure que *tout nombre premier  $P$ , qui divise exactement le produit  $A \times B$  de deux quantités, dont l'une  $A$  est un nombre entier quelconque, et l'autre  $B$  un polynôme rationnel et entier, dépendant d'une seule lettre  $\alpha$ , doit diviser  $A$  ou  $B$ .*

2. SECOND CAS. Soient  $P$  un nombre premier,  $A$  et  $B$  deux polynômes rationnels et entiers, dépendant de la seule lettre  $\alpha$ , c'est-à-dire tels que l'on ait

$$A = a\alpha^n + b\alpha^{n-1} + c\alpha^{n-2} + \dots + s\alpha + t,$$

$$B = a'\alpha^{n'-1} + b'\alpha^{n'-2} + \dots + s'\alpha + t';$$

( $a, b, c, \dots s, t, a', b', c' \dots s', t'$  étant des nombres entiers).

Désignons par  $A'$  l'ensemble des termes de  $A$ , dont les coefficients renferment le facteur  $P$ , et par  $A''$  l'ensemble des termes dont les coefficients ne sont pas divisibles par  $P$ ; il en résulte

$$A = A' + A'' \dots (1)$$

Soient de même  $B'$  et  $B''$  les deux parties de  $B$ , dont l'une a tous ses coefficients divisibles, et l'autre ses coefficients non divisibles par  $P$ .

On a pareillement

$$B = B' + B'' \dots (2).$$

Multipliant l'une par l'autre les égalités (1) et (2), on obtient

$$AB = A'B' + A'B'' + A''B' + A''B'' \dots (3).$$

Cela posé, puisque, par hypothèse,  $P$  divise chacun des coefficients de  $A'$  et  $B'$ , il s'ensuit que  $P$  divise les trois premières parties du second membre de l'égalité (3); donc, pour que  $P$  divise le produit  $AB$ , il faut nécessairement qu'il divise la quatrième partie  $A''B''$ . Or, je dis que cette dernière division est impossible; car désignons par  $k\alpha', k'\alpha''$  les deux termes de  $A''$  et  $B''$ ,

affectés du plus haut exposant de  $a$ ; comme leur produit  $kk'.a^{i+j}$  ne peut se réduire avec les autres produits partiels qui entrent dans  $A^iB^j$ , il faut nécessairement (n° 30), pour que  $P$  divise  $A^iB^j$ , qu'il divise  $kk'$ ; ce qui est absurde, puisque le nombre premier  $P$  ne divise ni  $k$  ni  $k'$ .

Le seul moyen de faire cesser l'absurdité, est de supposer  $A^i$  ou  $B^j$  égal à 0; et alors, tous les termes de  $A$  ou de  $B$  étant divisibles par  $B$ , il s'ensuit que  $A$  ou  $B$  doit être divisible par  $P$ , pour que  $A \times B$  soit lui-même divisible par  $P$ .

Donc tout nombre premier  $P$ , qui divise exactement le produit  $A \times B$  de deux polynômes rationnels et entiers, doit diviser tous les coefficients de l'un de ces polynômes, et par conséquent ce polynôme.

3. TROISIÈME CAS. Soient  $A$  un nombre entier quelconque,  $B$  un polynôme rationnel et entier dépendant de la seule lettre  $a$ ,  $P$  un polynôme premier, de même nature que  $B$ .

Puisque, par hypothèse, le produit  $A \times B$  est divisible par  $P$ , on a l'égalité  $A \times B = P \times Q \dots$  (1)

( $Q$  étant une quantité entière, numérique ou algébrique).

Décomposons le nombre  $A$  dans ses facteurs premiers, et soit

$$A = f.f'.f'' \dots f^{(n)}$$

(plusieurs de ces facteurs pouvant être égaux); l'égalité (1) devient

$$f.f'.f'' \dots f^{(n)}.B = P \times Q \dots \quad (2);$$

d'où divisant les deux membres par  $f$ ,

$$f'.f'' \dots f^{(n)}.B = \frac{P \times Q}{f}.$$

Or, le premier membre de celle-ci étant une quantité rationnelle et entière, il doit en être de même du second membre; mais  $f$  est un nombre premier qui ne peut diviser  $P$ , puisque  $P$  est premier; donc, en vertu du second cas,  $f$  doit diviser  $Q$ ; et l'on a  $Q = f \times Q'$  ( $Q'$  étant une quantité entière); d'où

substituant dans l'égalité (2) et divisant par  $f$ ,

$$f' \cdot f'' \dots f^{(n)}. B = P \times Q' \dots (3).$$

Raisonnant sur cette égalité comme sur l'égalité (2), on reconnaitra de même que  $Q' = f' \times Q''$  ( $Q''$  étant une quantité entière); d'où substituant dans (3) et divisant par  $f'$ ,

$$f'' \cdot f''' \dots f^{(n)}. B = P \times Q'' \dots (4);$$

et ainsi de suite. Donc, après avoir supprimé successivement tous les facteurs  $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ , on parviendra enfin à une égalité de la forme

$$B = P \times Q^{(n+1)},$$

$Q^{(n+1)}$  étant une quantité entière, numérique ou algébrique; ce qui démontre que  $B$  est divisible par  $P$ .

Ainsi, *tout polynôme premier (rationnel et entier) dépendant d'une seule lettre  $a$ , qui divise exactement le produit  $A \times B$  d'un nombre entier quelconque par un polynôme rationnel et entier dépendant de la même lettre  $a$ , doit diviser ce dernier polynôme.*

4. QUATRIÈME CAS. Soient  $A, B$  deux polynômes rationnels et entiers dépendant d'une seule lettre  $a$ , et  $P$  un polynôme premier de même nature.

Supposons que  $A$  ne soit pas divisible par  $P$ , et en admettant d'ailleurs que  $A$  soit de degré plus élevé que  $P$ , divisons  $A$  par  $P$ , en poussant la division jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste de degré moindre que  $P$ ; mais afin d'obtenir au quotient des coefficients entiers, multiplions d'abord  $A$  par un nombre convenable  $m$ . (Ce nombre a généralement pour valeur le multiple le plus simple des dénominateurs des coefficients fractionnaires auxquels on parviendrait, si l'on n'effectuait pas cette préparation.) Désignons enfin par  $Q$  le quotient de la division, et par  $R$  le reste; on a l'égalité

$$m.A = P \times Q + R \dots (1).$$

$R$  doit être supposé différent de 0, car autrement il s'ensuivrait



que  $P$  diviserait  $m.A$  et par conséquent  $A$ , en vertu du 3<sup>e</sup> cas, ce qui serait contre la supposition ci-dessus.

Cela posé multiplions par  $B$ , et divisons par  $P$  les deux membres de l'égalité (1); il vient

$$\frac{m.A \times B}{P} = B \times Q + \frac{B \times R}{P}.$$

Or  $P$  devant, par hypothèse, diviser  $A \times B$ , et par conséquent  $m.A \times B$ , il faut nécessairement que  $P$  divise aussi  $B \times R$ ; et si  $R$  est un nombre entier, quelconque, la proposition est démontrée, puisque  $P$ , divisant  $B \times R$ , doit diviser  $B$ , en vertu du 3<sup>e</sup> cas.

Mais supposons que  $R$  soit dépendant de  $\alpha$ , et divisons  $P$  par  $R$ , après avoir toutefois introduit dans  $P$  un facteur numérique  $m'$  propre à donner au quotient des coefficients entiers; il vient encore

$$m'.P = R \times Q' + R' \dots (2).$$

$R'$  doit être différent de 0; car si l'on avait  $R' = 0$ , il s'ensuivrait que  $R$  diviserait  $m'.P$ , et par conséquent que tous les facteurs premiers algébriques de  $R$  diviseraient  $P$ , ce qui est impossible, puisque  $P$  est premier.

Multiplions par  $B$  et divisons par  $P$  les deux membres de l'égalité (2); il vient

$$m'.B = \frac{B \times R \times Q'}{P} + \frac{B \times R'}{P},$$

égalité qui prouve que la divisibilité de  $B \times R$  par  $P$  entraîne celle de  $B \times R'$  par  $P$ . Si  $R'$  est indépendant de  $\alpha$ , la proposition est démontrée, puisque  $P$  divisant  $B \times R'$  doit diviser  $B$ , d'après le 3<sup>e</sup> cas.

Mais supposons  $R'$  dépendant de  $\alpha$ , et continuons de diviser  $P$  par  $R'$ , par  $R'' \dots$ , et ainsi de suite. On parviendra bientôt à un reste  $R^{(n)}$  indépendant de  $\alpha$ , et tel que  $B \times R^{(n)}$  sera divisible par  $P$ . Donc enfin  $B$  lui-même est divisible par  $P$ .

(Dans le cas où l'on aurait  $P$  de degré plus élevé que  $A$ , on

diviserait  $P$  par  $A$ , puis  $P$  par  $R$ ,  $R'$ ,  $R''$ , et les raisonnemens seraient absolument les mêmes.)

Ainsi, dès qu'un polynome premier  $P$  (rationnel et entier), dépendant d'une seule lettre  $\alpha$ , divise exactement le produit  $A \times B$  de deux polynomes rationnels et entiers qui ne dépendent que de la même lettre  $\alpha$ , on peut conclure que  $P$  divise exactement  $A$  ou  $B$ .

5. Il est maintenant bien facile de généraliser la proposition; car en supposant que les trois polynomes  $A$ ,  $B$ ,  $P$  puissent renfermer les deux lettres  $\alpha$ ,  $\zeta$ , ou pourra établir les quatre nouveaux cas:

1°.  $P$  est un nombre premier, ou un polynome premier dépendant de la seule lettre  $\alpha$ ,  $A$  un nombre entier quelconque, ou un polynome rationnel et entier dépendant de la seule lettre  $\alpha$ , et  $B$  un polynome rationnel et entier, renfermant les deux lettres  $\alpha$ ,  $\zeta$ ;

2°.  $P$  un nombre premier, ou un polynome premier dépendant d'une seule lettre  $\alpha$ , et  $A$ ,  $B$  deux polynomes rationnels et entiers, renfermant les deux lettres  $\alpha$ ,  $\zeta$ ;

3°.  $A$  un nombre entier quelconque, ou un polynome rationnel et entier, dépendant d'une seule lettre  $\alpha$ , et  $B$ ,  $P$  deux polynomes rationnels et entiers, renfermant les deux lettres  $\alpha$ ,  $\zeta$ , mais  $P$  un polynome premier;

4°. Enfin,  $A$ ,  $B$ ,  $P$  trois polynomes renfermant les deux lettres  $\alpha$ ,  $\zeta$ , mais  $P$  un polynome premier.

Si l'on applique à chacune de ces hypothèses des raisonnemens analogues à ceux qui ont été établis (nos 1, 2, 3, 4), on parviendra à cette nouvelle proposition, que tout polynome premier  $P$  (rationnel et entier) dépendant de deux lettres  $\alpha$ ,  $\zeta$ , qui divise le produit  $A \times B$  de deux polynomes renfermant les deux mêmes lettres, divise nécessairement l'un des polynomes.

La proposition étant reconnue vraie, dans le cas de deux lettres, on peut ensuite l'étendre au cas de trois, quatre, etc., lettres; donc elle est vraie généralement.

6. On en déduit immédiatement, 1°. que tout polynome pre-

mier  $P$  qui divise  $A^3$ , doit diviser  $A$ , puisque l'on a  $A^3 = A \times A$ . De même,  $P$  ne peut diviser  $A^3, A^4, \dots A^m$ , sans diviser  $A$ .

2°. Que si deux polynomes rationnels et entiers  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux, il en est de même de leurs puissances  $A^m$  et  $B^m$ , car tout facteur premier, commun à  $A^m$  et  $B^m$ , devrait aussi diviser  $A$  et  $B$ , ce qui serait contre l'hypothèse.

7. En réfléchissant sur la proposition principale et sur toutes celles qui constituent la théorie du plus grand commun diviseur, entre deux polynomes rationnels et entiers, on peut remarquer qu'elles ne supposent que les quatre premières opérations de l'Algèbre. Ainsi nous aurions pu, à la rigueur, placer cette théorie tout entière dans le premier chapitre, ce qui eût semblé plus naturel; mais les raisonnemens étant d'une nature trop abstraite pour des commençans, il nous a paru préférable de la renvoyer au chapitre où l'on en fait un plus fréquent usage.

## SECONDE PARTIE.

*Sur la décomposition d'un polynome rationnel et entier en ses facteurs premiers.*

Clairault est le seul auteur qui, dans ses *Éléments d'Algèbre*, ait traité cette question; mais sa méthode, peu commode dans la pratique, n'est pas assez générale. Celle que nous allons exposer a l'avantage de s'appliquer à toute espèce de polynomes rationnels et entiers, et se lie d'ailleurs immédiatement à la méthode des racines commensurables des équations numériques.

Nous démontrerons avant tout un nouveau principe sur lequel nous aurons à nous appuyer.

8. On a vu (n° 251) que, toutes les fois qu'une fonction entière de  $x$  peut être rendue nulle par une valeur quelconque

$x = a$ , le binôme  $x - a$  est un diviseur relatif du polynôme proposé.

Soit maintenant  $X$  un polynôme rationnel et entier de la forme

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Mx + N,$$

( $A, B, C, \dots, M, N$  étant des quantités entières, numériques ou algébriques); et supposons qu'une valeur rationnelle, mais fractionnaire et irréductible,  $x = \frac{a}{c}$ , jouisse de la propriété de rendre nul le polynôme  $X$ . Je dis que ce polynôme est aussi divisible exactement par  $Cx - a$ ; le mot *divisible* étant pris ici dans le sens de la division algébrique ordinaire (n° 239). On doit toutefois supposer  $a$  et  $C$  premiers entre eux, et s'ils ne l'étaient pas, il faudrait commencer par supprimer le facteur commun dans les deux termes de la fraction  $\frac{a}{c}$ .

En effet, il résulte d'abord de ce qui a été dit n° 251, que le quotient de la division de  $X$  par  $x - \frac{a}{c}$ , est exact et égal à

$$\begin{aligned} & Ax^{m-1} + \left(A \cdot \frac{a}{c} + B\right)x^{m-2} + \left(A \cdot \frac{a^2}{c^2} + B \cdot \frac{a}{c} + C\right)x^{m-3} + \dots \\ & + A \cdot \frac{a^{m-1}}{c^{m-1}} + B \cdot \frac{a^{m-2}}{c^{m-2}} + \dots + M; \end{aligned}$$

en sorte que, si l'on appelle  $Q$  ce quotient, on a

$$X = \left(x - \frac{a}{c}\right) \cdot Q \dots \dots (1),$$

$Q$  étant un polynôme de forme fractionnaire, mais dont tous les dénominateurs sont facteurs de  $c^{m-1}$ .

Cela posé, multiplions les deux membres de l'égalité (1) par  $c^m$ ; il vient  $Xc^m = (Cx - a) \cdot Q \cdot c^{m-1}$ ; et il est évident que  $Qc^{m-1}$  peut être considéré comme un polynôme rationnel et entier, ainsi que sa valeur  $\frac{X \cdot c^m}{Cx - a}$ . Mais  $Cx - a$  est un polynôme premier qui ne peut diviser le facteur  $c^m$ , puisque ce facteur

est indépendant de  $x$ ; donc (note n° 3)  $N$  lui-même est divisible par  $Cx - a$ , et l'on a

$$N = (Cx - a)Q' \dots (2),$$

$Q'$  étant un polynome rationnel et entier. *c. q. f. d.*

*N. B.* Comme l'égalité (1) revient à  $N = (Cx - a) \frac{Q}{C}$ , on obtient en la comparant avec l'égalité (2),

$$\frac{Q}{C} = Q', \text{ d'où } Q = Q' \cdot C;$$

ce qui démontre que le quotient  $Q$ , que nous avons dit être de forme fractionnaire, est réellement lui-même un polynome entier et tel que  $C$  est facteur commun à tous ses coefficients.

C'est sur ce principe que s'appuie ce qui a été dit n° 274, ainsi que la détermination des facteurs du premier degré de la forme  $mx + n$  pour les équations numériques. (Voyez les exercices donnés à la fin du n° 336.)

9. Passons actuellement à la recherche des facteurs premiers d'un polynome rationnel et entier.

Considérons, en premier lieu, un polynome de la forme

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + \dots + Ta + U \dots (1),$$

( $P, Q, \dots, T, U$  désignant des quantités algébriques entières).

Il est facile de démontrer, comme on l'a fait n° 333, qu'aucune expression rationnelle fractionnaire  $\frac{a}{C}$  (qu'on peut toujours supposer irréductible), substituée à la place de  $a$ , ne peut rendre nul le polynome proposé.

Supposons en effet qu'on puisse avoir

$$\frac{a^m}{C^m} + P \frac{a^{m-1}}{C^{m-1}} + Q \frac{a^{m-2}}{C^{m-2}} + \dots + T \frac{a}{C} + U = 0;$$

si l'on multiplie par  $C^{m-1}$  et qu'on transpose tous les termes à l'exception du premier, il vient

$$\frac{a^m}{C} = -Pa^{m-1} - Qa^{m-2} \dots \dots Ta^{C^{m-2}} - Ua^{m-1},$$

égalité évidemment absurde; car le second membre est un polynome rationnel et entier, tandis que le premier est essentiellement fractionnaire (*note* n° 6).

Soit en second lieu un polynome rationnel et entier, tel que

$$Aa^m + Ba^{m-1} + \dots + Ma + N.$$

Égalons ce polynome à 0, et posons (n° 280)  $a = \frac{a'}{A}$ ; on trouve après la disparition des dénominateurs,

$$a'^m + Ba'^{m-1} + C.A.a'^{m-2} + DA^2.a'^{m-3} + \dots N.A^{m-1} = 0,$$

équation dont le premier membre est de même forme que le polynome (1) et qui, si elle admet des valeurs rationnelles pour  $a'$ , ne peut en admettre que d'entières.

Désignons par  $p, p', p''$ , les différentes racines entières de cette équation; les racines correspondantes de l'équation

$$Aa^m + Ba^{m-1} + \dots + Ma + N = 0,$$

seront  $\frac{p}{A}, \frac{p'}{A}, \frac{p''}{A} \dots$ . Or, parmi celles-ci, les unes peuvent être entières et représentées par  $a, a', \dots$  les autres fractionnaires et exprimées par  $\frac{\zeta}{\gamma}, \frac{\zeta'}{\gamma'}, \dots$  ( $\zeta$  et  $\gamma, \zeta'$  et  $\gamma' \dots$  étant premiers entre eux).

Par conséquent, les diviseurs rationnels et entiers, du 1<sup>er</sup> degré par rapport à  $a$ , du polynome proposé, seront

$$a - a, \quad a - a', \dots \quad \text{et} \quad \gamma a - \zeta, \quad \gamma' a - \zeta' \dots$$

Il suit de là que la recherche des diviseurs entiers du 1<sup>er</sup> degré par rapport à l'une des lettres qui entrent dans un polynome donné, est ramenée à la recherche des facteurs de la forme  $a - K$ ,  $K$  étant une quantité entière, positive ou négative, numérique ou algébrique; et pour obtenir ces facteurs, il

suffit de savoir résoudre en quantités entières une équation de la forme

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + \dots + Ta + U = 0;$$

P, Q, ..., T, U étant des quantités algébriques entières.

La méthode établie (n° 334) pour résoudre en nombres entiers une équation numérique de même forme, est applicable en tous points au cas dont nous nous occupons ici. Il suffit donc de se reporter à ce numéro, pour se former une idée de la marche qu'il faut suivre à l'égard d'un polynome rationnel et entier, quelque compliqué qu'il soit. Nous nous bornerons à quelques remarques générales.

10. *Première remarque.* L'application de la méthode supposant que le dernier terme du polynome ordonné est décomposé dans ses facteurs premiers, il semble au premier abord qu'on soit conduit à une *pétition de principe*; mais observons, 1°. que ce dernier terme est plus simple que le polynome proposé; 2°. que, dans tous les cas, il renferme une lettre de moins que ce polynome.

Ainsi, en admettant d'abord que le polynome ne renferme qu'une seule lettre, le dernier terme est numérique, et l'on sait déjà trouver tous les diviseurs d'un nombre.

Si le polynome renferme deux lettres et qu'on l'ordonne par rapport à l'une d'elles, le dernier terme n'est plus fonction que d'une seule lettre, et l'on est censé savoir déterminer tous les diviseurs entiers d'un polynome d'une seule lettre.

Si le polynome renferme trois lettres, le dernier terme n'en renferme que deux; et ainsi de suite.

11. *Seconde remarque.* Lorsque le polynome proposé est tel que le coefficient de la plus haute puissance de la lettre principale est différent de l'unité, comme il faut avoir recours à la transformation du n° 280, pour rendre ce coefficient égal à 1, et que cette opération donne lieu, en général, à de nouveaux coefficients très compliqués, il convient d'appliquer d'abord la méthode au polynome lui-même, de la manière indiquée

n° 337. Par ce moyen, on obtient tous les facteurs premiers de la forme  $a - a$ ; après quoi l'on divise le polynome proposé par le produit de tous ces facteurs, et la question se réduit à déterminer tous les facteurs, tels que  $\gamma a - \epsilon$ , du polynome-quotient.

12. *Troisième remarque.* Dans la même circonstance, il convient encore de s'assurer si les coefficients des diverses puissances de la lettre principale n'auraient pas un commun diviseur (n° 271), parce que s'il en existait un, on le supprimerait, et l'on opérerait ensuite sur le polynome résultant de cette suppression.

Le facteur supprimé pourrait lui-même être un polynome décomposable, et ses facteurs premiers seraient les facteurs indépendans de la lettre principale.

13. *Quatrième et dernière remarque.* Toutes les fois que le dernier terme renferme comme facteurs des monomes littéraux, tels que  $b, b^2, \dots, c, c^2, \dots$ , il est plus simple de substituer immédiatement ces quantités prises avec le signe  $+$ , puis avec le signe  $-$ , dans le polynome, parce que le résultat de cette substitution est un polynome tout développé.

Celles de ces quantités qui jouissent de la propriété de rendre nul le polynome, sont reconnues *racines*. C'est la même règle que pour  $+1$  et  $-1$ , par rapport aux équations numériques.

Les exemples suivans éclairciront ces différentes remarques.

---

1<sup>er</sup> EXEMPLE.

14.  $2a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 - b^4.$

Égalons ce polynome à 0, après l'avoir ordonné; il vient

$$2a^4 + ba^3 + b^2a^2 + b^3a - b^4 = 0.$$

Conformément à la remarque du n° 11, cherchons d'abord les diviseurs tels que  $a - a$ .

Or, les diviseurs de  $b^4$  étant  $b, b^2, b^3, b^4$ , il faudrait essayer



ces diviseurs tant avec le signe  $+$  qu'avec le signe  $-$ , et, pour cela, les substituer à la place de  $a$  dans l'équation; mais connue le polynome proposé est *homogène* (*Alg.*, n° 11), il est évident que  $b^4$ , substitué à la place de  $a$ , donnerait pour  $2a^4$  un terme de plus haut degré que tous les autres; et qui, par conséquent, ne pourrait être détruit. Même raisonnement par rapport à  $b^3$  et  $b^4$ . Ainsi, il n'y a lieu à essayer que les diviseurs  $+b$  et  $-b$ .

Or, le dernier seul donne, par sa substitution,

$$2b^4 - b^4 + b^4 - b^4 - b^4 = 0;$$

donc  $-b$  est racine de l'équation, et par conséquent  $a - (-b)$  ou  $a + b$  est diviseur du polynome proposé.

Divisant ce polynome par  $a + b$ , et égalant le quotient à 0, on trouve

$$2a^3 - ba^2 + 2b^2a - b^3 = 0.$$

On pourrait actuellement faire disparaître le coefficient de  $a^3$ , en posant  $a = \frac{c}{2}$ , puis opérer sur l'équation résultante comme sur la proposée; mais si l'on rapproche le 1<sup>er</sup> et le 3<sup>e</sup> termes, le 2<sup>e</sup> et le 4<sup>e</sup> termes, on reconnaît de suite que l'équation revient à

$$2a(a^2 + b^2) - b(a^2 + b^2) = 0, \text{ ou } (2a - b)(a^2 + b^2) = 0.$$

Donc enfin le polynome proposé est égal à

$$(a + b)(2a - b)(a^2 + b^2);$$

ce qui donne *deux* facteurs du premier degré et *un* facteur du second degré.

15. Dans cet exemple, comme dans tous ceux où le polynome est *homogène* et composé de *deux* lettres seulement, on peut ramener la résolution de l'équation à celle d'une équation numérique.

Soit, en effet, l'équation générale

$$Aa^m + Bba^{m-1} + Cb^2a^{m-2} + \dots + Mb^{m-1}a + Nb^m = 0,$$

(A, B, C, ... M, N étant des nombres entiers),

Si l'on pose  $\frac{a}{b} = x$ , d'où  $a = bx$ , il vient

$$Ab^m x^m + Bb^m x^{m-1} + Cb^m x^{m-2} + \dots + Mb^m x + Nb^m = 0,$$

ou supprimant, pour le moment, le facteur  $b^m$ ,

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Mx + N = 0,$$

équation numérique qu'il ne s'agit plus que de résoudre en nombres commensurables. Ces valeurs étant substituées dans la relation  $a = bx$ , donnent les valeurs de  $a$  correspondantes, et, par suite, les diviseurs de la forme  $a - \alpha$ , ou  $\gamma a - \zeta$ .

Ainsi, soit fait dans l'équation relative à l'exemple ci-dessus,  $a = bx$ ; il vient

$$b^4(2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1) = 0.$$

Le facteur entre parenthèses étant égalé à zéro et résolu, on trouve les deux racines

$$x = -1, \quad x = \frac{1}{2};$$

d'où  $a = -b$  ou  $a + b = 0$ ,

et  $a = \frac{b}{2}$ , ou  $2a - b = 0$ .

## 2<sup>e</sup> EXEMPLE.

$$16. a^4 - (b+c)a^3 - (b^3 - 3bc)a^2 + (b^3 - b^2c - bc^2)a - b^3c + b^2c^2 = 0.$$

Le dernier terme  $-b^3c + b^2c^2$  revient à  $b^2c(-b + c)$ ; ce qui donne pour les diviseurs simples,

$$b, c, -b + c, b - c, -c, -b.$$

Il n'y a lieu d'ailleurs à essayer que ces diviseurs, puisque le polynome est homogène; car  $b^3$  ou  $bc$ , par exemple, mis à la place de  $a$  dans l'équation, donnerait  $b^3$  ou  $b^4c^4$ , quantité d'un degré supérieure à toutes les autres, et qui, par conséquent, ne pourrait pas être détruite.

En faisant successivement  $a = b, -b, c, -c$ , on reconnaît que  $b$  seul vérifie l'équation. Ainsi déjà,  $a - b$  est un des diviseurs cherchés.

Il reste maintenant à appliquer la méthode du n° 334 aux deux facteurs  $-b + c, b - c$ .

$$\begin{array}{rcl}
 -b + c, & & b - c \\
 + b^3c \dots\dots\dots & & - b^3c \\
 + b^3 - bc^3 & & + b^3 - 2b^2c - bc^3 \\
 - b^3 - bc & & \phantom{+ b^3 - 2b^2c - bc^3} \\
 - 2b^3 + 2bc & & \phantom{+ b^3 - 2b^2c - bc^3} \\
 + 2b & & \phantom{+ b^3 - 2b^2c - bc^3} \\
 + b - c & & \phantom{+ b^3 - 2b^2c - bc^3} \\
 - 1. & & \phantom{+ b^3 - 2b^2c - bc^3}
 \end{array}$$

Considérons d'abord le facteur  $-b + c$ . Après avoir divisé le dernier terme par ce facteur, ce qui donne  $+b^3c$  pour quotient, on ajoute à ce quotient le coefficient de  $a^3$ , et l'on obtient pour somme,  $b^3 - bc^3$ .

Divisant  $b^3 - bc^3$  par  $-b + c$ , on a pour nouveau quotient  $-b^2 - bc$ , qui, ajouté au coefficient de  $a^2$ , donne pour somme

$$-2b^3 + 2bc.$$

Divisant  $-2b^3 + 2bc$  par  $-b + c$ , on obtient  $+2b$ , quotient qui, ajouté au coefficient de  $a^1$ , donne pour somme

$$+b - c.$$

Divisant enfin  $+b - c$  par  $-b + c$ , on trouve pour quotient  $-1$ . Donc  $-b + c$  est racine.

En appliquant la méthode au second diviseur  $b - c$ , on obtient pour la première somme,  $b^3 - 2b^2c - bc^3$ , quantité

qui n'est pas divisible par  $b - c$ . Ainsi  $b - c$  doit être rejeté.

Il résulte de là que les seuls diviseurs entiers, et du premier degré, du polynôme proposé, sont  $a - b$  et  $a + b - c$ .

Divisant ce polynôme par le produit

$$(a - b)(a + b - c) \text{ ou } a^2 - ac - b^2 + bc,$$

on a pour quotient,  $a^2 - ba + bc$ .

### 3<sup>e</sup> EXEMPLE.

$$17. \quad 2a^4 + (b + 3c)a^3 - (7b^2 - 2bc - c^2)a^2 - 2(b^3 + 3b^2c)a + \dots \\ + 6b^4 - 4b^3c - 2b^2c^2 = 0 \dots (1).$$

Le dernier terme revient à  $2b^2(3b^2 - 2bc - c^2)$ ; or, il est aisé de reconnaître que l'hypothèse  $b = c$  rend nul le facteur entre parenthèses; donc ce dernier terme est divisible par  $b - c$ , et l'on trouve

$$6b^4 - 4b^3c - 2b^2c^2 = 2b^2(b - c)(3b + c).$$

En appliquant la méthode à chacun des diviseurs simples

$$b, \quad b - c, \quad 3b + c, \quad -3b - c, \quad +b + c, \quad -b,$$

$$\text{ou } 2b, \quad 2(b - c), \quad 2(3b + c), \quad -2(3b + c), \quad -2(-b + c), \quad -2b,$$

on reconnaît que  $b - c$  seul satisfait à toutes les conditions.

Ainsi l'on a

$$a = b - c, \text{ d'où } a - b + c = 0.$$

Divisant le polynôme proposé par  $a - b + c$ , on obtient pour quotient,

$$2a^3 + (3b + c)a^2 - 4b^2a - 6b^3 - 2b^2c \dots (2).$$

Pesons, dans ce nouveau polynôme,  $a = \frac{a'}{3}$ ;

il vient  $a'^3 + (3b + c)a'^2 - 8b^2.a' - 24b^3 - 8b^2c \dots (3)$ .

Or, le dernier terme revient à

$$- 8b^2(3b + c);$$

ce qui donne pour les diviseurs simples, abstraction faite du facteur 8,

$$b, \quad 3b + c, \quad -b, \quad -3b - c.$$

L'application de la méthode aux deux diviseurs  $3b + c$ ,  $-3b - c$ , fait reconnaître que  $-(3b + c)$  est racine de l'équation (3), et par conséquent que  $a = -\frac{(3b+c)}{2}$ , est racine de l'équation (2). Donc  $2a + 3b + c$  est diviseur du premier membre de cette équation.

En effectuant la division, on obtient pour quotient,

$$a^2 - 2b^2.$$

Donc enfin, le polynome proposé peut se mettre sous la forme

$$(a - b + c)(2a + 3b + c)(a^2 - 2b^2).$$

18. Ces exemples suffisent pour mettre au fait de la recherche des facteurs du premier degré d'un polynome rationnel et entier. Quant aux diviseurs du second degré ou de degrés supérieurs, il faudrait employer une méthode analogue à celle qui a été établie (n° 339).

Au reste, il arrive souvent, dans les applications particulières, que quelques-unes des lettres qui entrent dans les polynomes n'y sont élevées qu'à la seconde puissance; et, dans ce cas, la détermination des facteurs ne dépend que de la résolution d'une équation du second degré.

Reprenons l'exemple traité n° 16, et observons que la lettre  $c$  n'entre qu'à la seconde puissance dans le polynome.

En l'ordonnant par rapport à cette lettre, on obtient

$$(b^2 - ab)c^2 - (b^3 + ab^2 - 3a^2b + a^3)c + ab^3 - a^2b^2 - a^3b + a^4 = 0;$$

et il suffirait de résoudre cette équation par rapport à  $c$ , puis d'effectuer toutes les opérations et simplifications auxquelles on serait conduit; mais, avant tout, il convient de s'assurer s'il n'existerait pas un diviseur commun à tous les coefficients.

Or, le coefficient  $b^2 - ab$  revient à  $b(b-a)$ ; et il est aisé de reconnaître que l'hypothèse  $b-a=0$ , ou  $b=a$ , anéantit les deux autres coefficients; donc  $b-a$  est diviseur commun. En supprimant ce facteur dans le polynôme, on trouve pour quotient,

$$bc^2 - (b^2 + 2ab - a^2)c + ab^2 - a^3 = 0;$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$c = \frac{b^2 + 2ab - a^2}{2b} \pm \sqrt{\frac{(b^2 + 2ab - a^2)^2}{4b^2} - \frac{(ab^2 - a^3)}{b}},$$

ou réduisant sous le radical au dénominateur  $4b^2$ , développant les calculs et extrayant la racine carrée,

$$c = \frac{b^2 + 2ab - a^2 \pm (b^2 + a^2)}{2b}.$$

$$\text{Donc, 1}^\circ. c = \frac{2b^2 + 2ab}{2b} = b + a; \text{ d'où } c - b - a = 0;$$

$$2^\circ. c = \frac{2ab - 2a^2}{2b} = \frac{ab - a^2}{b}; \text{ d'où } cb - ab + a^2 = 0.$$

Ainsi les diviseurs du polynôme proposé sont

$$b-a, c-b-a, cb-ab+a^2,$$

$$\text{ou } a-b, a-b+c, a^2-ab+bc,$$

comme on l'avait déjà reconnu n° 16.

Le 3<sup>e</sup> exemple (n° 15) peut être traité de la même manière; car la lettre  $c$  n'entre également dans le polynôme qu'à la seconde puissance. On serait conduit à supprimer d'abord le coefficient  $a^2 - 2b^2$ , commun à tous les coefficients.

19. Nous traiterons encore un exemple assez remarquable qu'on rencontre dans la Géométrie analytique.

Soit l'équation

$$(y^2 + x^2 - cx)^2 - (a^2 - c^2)y^2 - a^2(x - c)^2 = 0.$$

Comme, après le développement du premier membre de cette équation, les deux lettres  $a$  et  $c$  n'y entrent qu'à la seconde puissance, on peut ordonner indifféremment par rapport à l'une d'elles.

Ordonnons, par exemple, suivant la lettre  $c$ ; il vient

$$(y^2 + x^2 - a^2)c^2 - 2x(y^2 + x^2 - a^2)c + y^4 + (2x^2 - a^2)y^2 + x^4 - a^2x^2 = 0,$$

équation que l'on peut résoudre par rapport à  $c$ . Mais vérifions auparavant si  $y^2 + x^2 - a^2$ , qui est facteur commun aux deux premiers coefficients ne diviserait pas également le coefficient de  $c$ . Or, en essayant la division, on trouve pour quotient exact,  $y^2 + x^2$ .

Donc l'équation peut se mettre sous la forme

$$(y^2 + x^2 - a^2)(c^2 - 2cx + y^2 + x^2) = 0,$$

$$\text{ou bien } (y^2 + x^2 - a^2)(y^2 + x^2 - c^2) = 0;$$

c'est-à-dire que le premier membre est décomposable dans le produit de deux facteurs rationnels du second degré, que l'on doit d'ailleurs regarder comme des facteurs *premiers*.

Si l'on ordonnait le polynôme par rapport à la lettre  $x$ , on ne pourrait appliquer la méthode du n° 9, puisqu'elle ne donne que les facteurs rationnels du 1<sup>er</sup> degré, et que par le fait, le polynôme n'est décomposable qu'en des facteurs *premiers* du second degré. Mais en ordonnant par rapport à  $y$ , on obtiendrait une équation du 4<sup>e</sup> degré, résoluble à la manière de celles du second degré.

N. B. L'équation que nous venons de traiter est celle du LIEU GÉOMÉTRIQUE des pieds des perpendiculaires abaissées du

*foyer d'une ellipse sur la tangente considérée dans toutes ses positions.*

20. Enfin, la décomposition d'un polynome en facteurs rationnels peut être fort utile dans l'élimination; car on a vu (n° 384) que, lorsqu'on est parvenu à décomposer les premiers membres de deux équations en leurs facteurs simples, la détermination des systèmes de valeurs propres à vérifier ces deux équations, se réduit à celle des systèmes qui correspondent aux combinaisons deux à deux de ces facteurs égalés à zéro.

FIN.

611210



